

解耦的转换测量 Kalman 滤波算法

王宏强,黎 湘,庄钊文,郭桂蓉

(国防科技大学电子科学与工程学院,ATR 国家重点实验室,湖南长沙 410073)

摘 要: 对于极坐标观测下的目标跟踪问题,基于转换测量 Kalman 滤波器(CMKF),应用正规变换,得到了解耦的 CMKF 算法,同时研究了 CMKF 和解耦 CMKF 算法的初值估计问题.仿真结果表明了解耦 CMKF 算法及其初值估计的有效性.

关键词: 解耦滤波器;转换测量 Kalman 滤波(CMKF);目标跟踪

中图分类号: TN95 **文献标识码:** A **文章编号:** 0372-2112 (2003) 06-0867-04

Decoupled Converted Measurement Kalman Filter

WANG Hong-qiang, LI Xiang, ZHUANG Zhao-wen, GUO Gui-rong

(ATR Key Laboratory, National University of Defense Technology, Changsha, Hunan 410073, China)

Abstract: Using canonical transform, a decoupled filter, which is analytic form, is proposed based on converted measurement Kalman filter (CMKF) for target tracking when target positions are measured in polar coordinates. Initial values for CMKF and decoupled CMKF are also investigated. Simulation results show its validity.

Key words: decoupled filter; converted measurement Kalman filter (CMKF); target tracking

1 引言

应用 Kalman 滤波算法对雷达目标进行跟踪时,目标运动的状态方程往往在直角坐标系下描述,而测量值在极坐标系或球坐标系下给出,此时涉及的是非线性系统中的跟踪问题. Bar-Shalom 的去偏转换测量 Kalman 滤波 (CMKF)^[1,2]被认为是目前解决此类问题较好的一种方法.但是由 CMKF 得到的转换测量误差的方差 R 为非对角矩阵,即转换测量误差在各坐标轴之间是相关的,只能采用耦合的 Kalman 滤波,从而增加了实际应用中的计算复杂度,也不便于对算法进行理论分析.

对于一般滤波器的解耦问题,已有文献[3~7]进行了深入研究.本文采用正规变换法^[4],通过对 R 进行一定的变形,经过理论推导,得到了解耦 CMKF 变换的解析表达式,对 CMKF 以及解耦 CMKF 的初值选取也进行了深入研究.

2 目标运动状态模型

考虑以下目标运动状态模型:

$$X(k+1) = \Phi X(k) + GW(k) \quad (1)$$

$$Z^p(k) = h(X(k)) + V^p(k) \quad (2)$$

其中 $X = [X_1' \ X_2']'$, $X_1 = [x \ \dot{x}]'$, $X_2 = [y \ \dot{y}]'$ 为状态变量; $Z^p = [r_m \ \theta_m]$ 为极坐标下目标斜距、方位角的测量值; $h(\cdot)$ 为非线性函数; V^p 为极坐标下相互独立的零均值、高斯、白的目标距离和方位的测量噪声,方差分别为 σ_r^2 、 σ_θ^2 ; W 为过程噪

声,且

$$Q \triangleq E[W(k)W'(k)] = \text{diag}[q, q] \quad (3)$$

不失一般性,再设 $\Phi = \text{diag}[\Phi_2, \Phi_2]$, $G = \text{diag}[G_2, G_2]$, 其中下标“2”意为二阶系统, $\text{diag}[\cdot]$ 表示对角块矩阵,且

$$\Phi_2 = \begin{bmatrix} 1 & T \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad G_2 = \begin{bmatrix} T^2/2 \\ T \end{bmatrix} \quad (4)$$

式中 T 为采样间隔.注意 G 并非方阵,用 $\text{diag}[\cdot]$ 只是为了表述简单.

3 转换测量 Kalman 滤波算法(CMKF)

对 $Z^p(k)$ 进行非线性坐标转换并去偏^[1,2],得直角坐标系下目标的测量方程为

$$Z(k) = HX(k) + V(k) \quad (5)$$

其中 $Z(k) = [z_x(k) \ z_y(k)]'$ 为直角坐标系下的观测; $H = \text{diag}[H_2, H_2]$, $H_2 = [1 \ 0]$, 为测量矩阵; $V(k)$ 为去偏后的转换测量噪声,为零均值的白噪声,方差 $\text{Var}[V(k)] = R$. 在测量值已知的条件下, R 中各元素取值如下:

$$\begin{aligned} R^{11} = & r_m^2 e^{-2\sigma_\theta^2} [\cos^2 \theta_m (\cosh 2\sigma_\theta^2 - \cosh \sigma_\theta^2) + \sin^2 \theta_m (\sinh 2\sigma_\theta^2 \\ & - \sinh \sigma_\theta^2)] + \sigma_r^2 e^{-2\sigma_\theta^2} [\cos^2 \theta_m (2\cosh 2\sigma_\theta^2 - \cosh \sigma_\theta^2) \\ & + \sin^2 \theta_m (2\sinh 2\sigma_\theta^2 - \sinh \sigma_\theta^2)] \end{aligned} \quad (6)$$

$$\begin{aligned} R^{22} = & r_m^2 e^{-2\sigma_\theta^2} [\sin^2 \theta_m (\cosh 2\sigma_\theta^2 - \cosh \sigma_\theta^2) + \cos^2 \theta_m (\sinh 2\sigma_\theta^2 \\ & - \sinh \sigma_\theta^2)] + \sigma_r^2 e^{-2\sigma_\theta^2} [\sin^2 \theta_m (2\cosh 2\sigma_\theta^2 - \cosh \sigma_\theta^2) \end{aligned}$$

收稿日期:2002-04-28;修回日期:2002-09-15

基金项目:国防预研项目资助(No. 413010701-2)

$$+ \cos^2 \theta_m (2 \sinh 2 \sigma_\theta^2 - \sinh \sigma_\theta^2) \quad (7)$$

$$R^{12} = \sin \theta_m \cos \theta_m e^{-4 \sigma_\theta^2} [\sigma_r^2 + (r_m^2 + \sigma_r^2) (1 - e^{\sigma_\theta^2})] \quad (8)$$

式(6)~(8)中 r_m 、 θ_m 为每时刻的测量值,式中省略了时间标签 k . 下文叙述中,在不引起混淆的情况下均作类似处理.

经过以上对转换测量值进行去偏并求解转换测量值误差的方差后,式(1)、(5)均为直角坐标系下的线性方程,因而可用标准的 Kalman 滤波算法进行目标状态估计.但是,由式(8)可见, R 中非对角元素不为零,因而滤波器在各坐标轴方向是耦合的.为了减少实际应用中的计算复杂度,以及方便对算法进行理论分析,解耦形式的滤波算法是我们所期望的.

4 解耦的 CMKF 算法

4.1 正规变换技术

由文献[4]有以下定理:

假设 R 正定,则存在 $\lambda_i^2 (i=1,2)$ 和 R -正交矩阵 M ,使得二维二阶目标模型(1)、(5)可以写成如下解耦形式

$$X^*(k+1) = \Phi X^*(k) + G W^*(k) \quad (9)$$

$$Z^*(k) = H X^*(k) + V^*(k) \quad (10)$$

式中 $X^* = M X$, $Z^* = M Z$, $W^* = M W$, $V^* = M V$,且

$$Q^* \triangleq \text{cov}(W^*) = M Q M = \text{diag}[\lambda_1^2, \lambda_2^2] \quad (11)$$

$$R^* \triangleq \text{cov}(V^*) = M R M = I \quad (I \text{ 为 } 2 \times 2 \text{ 单位矩阵}) \quad (12)$$

2×2 矩阵 M 与 4 维矢量 X 的相乘定义为

$$X^* \triangleq \begin{bmatrix} X_1^* \\ X_2^* \end{bmatrix} = M X = \begin{bmatrix} \sum_{j=1}^2 m_{1j} X_j \\ \sum_{j=1}^2 m_{2j} X_j \end{bmatrix} \quad (13)$$

文献[4]证明了以上正规变换后的系统与原系统等价,并且定理中的 $\lambda_i^2 (i=1,2, \text{为空间维数})$ 为广义特征值问题 $Qy = \lambda^2 Ry$ 的实特征值,而 $M = [m_{ij}] = [e_1 \ e_2]$,其中 e_i 是对应于 λ_i^2 的 R -正交特征矢量.

由于 Φ 、 G 、 H 都是对角(块)阵,经过正规变换后的 Q^* 、 R^* 也是对角(块)阵,因而系统(9)、(10)在各坐标轴方向是解耦的,即状态分量及其估计沿各坐标轴方向是独立的.

4.2 解耦的 CMKF 算法

应用上述定理对 CMKF 解耦的关键是求解广义特征值和正规变换矩阵.为了求解和分析的方便,首先对式(6)~(8)中 $\cos^2 \theta_m$ 、 $\sin^2 \theta_m$ 项的系数分别进行合并整理,并令

$$a = [r_m^2 (\cosh 2 \sigma_\theta^2 - \cosh \sigma_\theta^2) + \sigma_r^2 (2 \cosh 2 \sigma_\theta^2 - \cosh \sigma_\theta^2)] e^{-2 \sigma_\theta^2} \quad (14)$$

$$b = -[r_m^2 (e^{-\sigma_\theta^2} - e^{-2 \sigma_\theta^2}) + \sigma_r^2 (e^{-\sigma_\theta^2} - 2e^{-2 \sigma_\theta^2})] e^{-2 \sigma_\theta^2} \quad (15)$$

则 R 可写成:

$$R = \begin{bmatrix} a - b \sin^2 \theta_m & b \sin \theta_m \cos \theta_m \\ b \sin^2 \theta_m \cos \theta_m & a - b \cos^2 \theta_m \end{bmatrix} \quad (16)$$

需要注意的是,式(16)与文献[8]中的结果在形式上相同,但前者是基于测量值,而后者是基于目标真值,因而式中各参数的取值是不同的.

对于广义特征值问题 $Qy = \lambda^2 Ry$,代入式(3)中的 Q 和式(16)中的 R ,经整理有

$$(a^2 - ab) \lambda^4 - (2a - b) \lambda^2 + q^2 = 0 \quad (17)$$

解以上关于 λ^2 的二次方程,得

$$\lambda_1^2 = q/a, \quad \lambda_2^2 = q/(a-b) \quad (18)$$

应用 Gram-Schmidt 正交化过程,得以上特征值对应的正交特征矢量为 $y_1 = s [\cos \theta_m \ \sin \theta_m]^T$, $y_2 = l [\sin \theta_m \ -\cos \theta_m]^T$,其中 s 、 l 为任意非零数.

由 $M^T R M = I$,得到

$$e_1 = \frac{1}{\sqrt{a}} \begin{bmatrix} \cos \theta_m \\ \sin \theta_m \end{bmatrix}, \quad e_2 = \frac{1}{\sqrt{a-b}} \begin{bmatrix} \sin \theta_m \\ -\cos \theta_m \end{bmatrix} \quad (19)$$

从而 R -正交矩阵 M 及其逆变换为

$$M = \begin{bmatrix} \frac{\cos \theta_m}{\sqrt{a}} & \frac{\sin \theta_m}{\sqrt{a-b}} \\ \frac{\sin \theta_m}{\sqrt{a}} & \frac{-\cos \theta_m}{\sqrt{a-b}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \theta_m & \sin \theta_m \\ \sin \theta_m & -\cos \theta_m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{a}} & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{a-b}} \end{bmatrix} \quad (20)$$

$$M^{-1} = \begin{bmatrix} \sqrt{a} \cos \theta_m & \sqrt{a} \sin \theta_m \\ \sqrt{a-b} \sin \theta_m & -\sqrt{a-b} \cos \theta_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sqrt{a} & 0 \\ 0 & \sqrt{a-b} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \theta_m & \sin \theta_m \\ \sin \theta_m & -\cos \theta_m \end{bmatrix} \quad (21)$$

以上得到了对 CMKF 进行正规变换的解析表达式.从变换矩阵 M 的表达式可以清楚地看出正规变换的物理含义.对于变换

$$X^* = M X = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{a}} & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{a-b}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \theta_m & \sin \theta_m \\ \sin \theta_m & -\cos \theta_m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{bmatrix} \quad (22)$$

显见,它是将原直角坐标系逆时针旋转 θ_m 角度,使得新 x 轴对准目标视线方向,取值为原斜距以 $\frac{1}{\sqrt{a}}$ 归一化,而原 x 、 y 轴在垂直于目标视线方向的投影差以 $\frac{1}{\sqrt{a-b}}$ 归一化,作为新 y 轴.归一化系数体现了 $R^{-1}Q$ 特征值 λ_i^2 (在稳态 Kalman 滤波器中称为机动指数^[9])中包含的信(过程噪声 Q)噪(测量噪声 R)之比在各方向上的分布.

通过以上的正规变换,过程噪声和转换测量误差在各个坐标轴方向上相互独立,因而就可以在各个坐标轴方向上同时独立进行 Kalman 滤波,得到解耦的 CMKF 算法如图 1 所示.

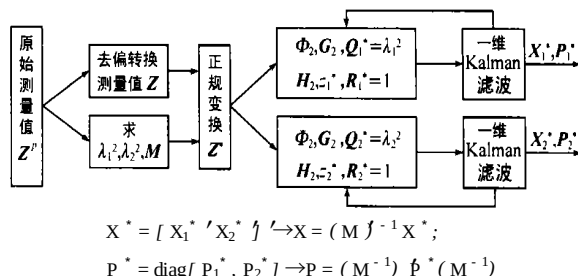


图 1 解耦 CMKF 算法流程图

图中 $Z^*(k) = M^T(k) Z(k) = [z_1^*(k) \ z_2^*(k)]^T$ 需要注意的是 Φ_2 、 G_2 、 H_2 的下标“2”指二阶系统,而 z^* 、 Q^* 、 R^* 的下标指代正规系统中的坐标轴方向.

解耦算法虽然基于 CMKF,但只保留了其中的去偏过程,

而 R 的计算已不再需要,并且由于已经得到了正规变换矩阵的解析表达式,因而也无需实时求解广义特征值,而只需代入测量值通过式(18)、(20)、(21)直接计算 $\hat{x}_1^i$ 、 $\hat{x}_2^i$ 、 M 、 M^{-1} 即可,从而减少了运算中的许多中间环节。

4.3 滤波初值估计

CMKF 算法中,在极坐标系下原来相互独立的观测噪声,由于坐标转换的非线性,使得直角坐标系下的观测噪声在同一时刻成为相关的,体现在 R 中的非对角元素式(8)不为零。对于初始估计误差协方差阵的估算,如果将其设为一对角阵^[10](多数情况下的一种简单处理方法),将带来较大的初始偏差。这里,我们以前两点观测的差分作为初始估计(同于传统方法),而对于误差协方差阵,基于 R 中的元素值,联合目标模型(1)、(5),经推导有以下结果

$$\hat{X}(2|2) = \begin{bmatrix} z_x(2) & \frac{z_x(2) - z_x(1)}{T} & z_y(2) & \frac{z_y(2) - z_y(1)}{T} \end{bmatrix}^T \quad (23)$$

$$P(2|2) = E[\tilde{X}(2|2)\tilde{X}^T(2|2)] = \begin{bmatrix} P_{xx} & P_{xy} \\ P_{xy} & P_{yy} \end{bmatrix} \quad (24)$$

式中, $\tilde{X}(2|2) = X(2) - \hat{X}(2|2)$, 且

$$P_{xx} = \begin{bmatrix} R^{11}(2) & \frac{R^{11}(2)}{T} \\ \frac{R^{11}(2)}{T} & \frac{R^{11}(2)}{T^2} + \frac{T^2 q}{4} \end{bmatrix}, \quad (25)$$

$$P_{xy} = \begin{bmatrix} R^{12}(2) & \frac{R^{12}(2)}{T} \\ \frac{R^{12}(2)}{T} & \frac{R^{12}(2)}{T^2} \end{bmatrix} \quad (25)$$

$$P_{yy} = \begin{bmatrix} R^{22}(2) & \frac{R^{22}(2)}{T} \\ \frac{R^{22}(2)}{T} & \frac{R^{22}(2)}{T^2} + \frac{T^2 q}{4} \end{bmatrix} \quad (26)$$

式中 $R(k)$ 表示 k 时刻的值。

对于解耦 CMKF 的滤波初值,按照以上方法,基于式(9)、(10),有结果

$$\hat{X}^*(2|2) = \begin{bmatrix} z_1^*(2) & \frac{z_1^*(2) - z_1^*(1)}{T} & z_2^*(2) & \frac{z_2^*(2) - z_2^*(1)}{T} \end{bmatrix}^T \quad (27)$$

$$P^*(2|2) = E[\tilde{X}^*(2|2)(\tilde{X}^*(2|2))^T] = \begin{bmatrix} P_{11}^* & \mathbf{0}_{2 \times 2} \\ \mathbf{0}_{2 \times 2} & P_{22}^* \end{bmatrix} \quad (28)$$

式中, $\tilde{X}^*(2|2) = X^*(2) - \hat{X}^*(2|2)$, $\mathbf{0}_{2 \times 2}$ 表示 2×2 零矩阵,而

$$P_{11}^* = \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{T} \\ \frac{1}{T} & \frac{2}{T^2} + \frac{T^2 q}{4a(1)} \end{bmatrix}, \quad P_{22}^* = \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{T} \\ \frac{1}{T} & \frac{2}{T^2} + \frac{T^2 q}{4(a(1) - b(1))} \end{bmatrix} \quad (29)$$

式中 $a(k)$ 、 $b(k)$ 表示 k 时刻的值。

比较式(24)、(28)可以看出,CMKF 算法中由于 R 不为对角矩阵,因而 $P(2|2)$ 中各轴交叉项元素也不为零。经过正规变换, R^* 成为单位矩阵,相应的 $P^*(2|2)$ 成为对角块矩阵,即各轴交叉项元素为零,从而滤波流程就可以按照图 1 进行。

5 仿真结果及分析

为了表明解耦 CMKF 算法的有效性,这里给出对文献[1]中的目标运动形式进行跟踪的仿真实验结果。假设目标初始距离 70km,方位角 45° 并以 15m/s 的速度沿 Y 轴方向运动。过程噪声 $q = 0.01^2 \text{m/s}^2$, 距离观测误差标准差 $\sigma_r = 50\text{m}$, 方位观测误差标准差分别取 $\sigma_\theta = 0.5^\circ$ 、 $\sigma_\theta = 1.5^\circ$, 采样间隔 $T = 60\text{s}$ 。

定义位置、速度均方根误差 RMSE 作为对算法的评价指标:

$$RMSE = \sqrt{\frac{1}{N_k} \sum_{i=1}^{N_k} \sum_{j=1}^{M_k} [x_j^i(t_k) - \hat{x}_j^i(t_k)]^2} \quad (30)$$

其中 $x(k)$ 、 $\hat{x}(k)$ 分别为目标位置(或者速度)分量的真值和估计值, M_k 为维数, N_k 为 Monte Carlo 实验次数。

应用原 CMKF 与本文的解耦 CMKF 算法对目标进行跟踪,仿真中滤波初始值分别由式(23)、(24)以及式(27)、(28)得到。1000 次 Monte Carlo 实验结果如图 2、3 所示。

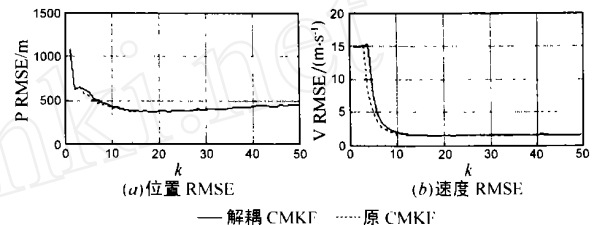


图 2 目标跟踪 RMSE, $\sigma_\theta = 0.5^\circ$

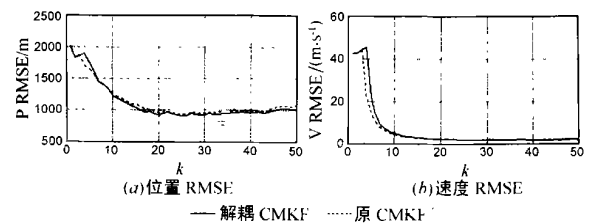


图 3 目标跟踪 RMSE, $\sigma_\theta = 1.5^\circ$

实验结果表明,在不同程度的观测噪声下,CMKF 算法与解耦 CMKF 算法的跟踪性能基本相同,从而通过实验验证了本文提出的解耦 CMKF 算法的有效性。

6 总结

非线性测量是目标跟踪中的一个现实问题,而滤波器的解耦问题是实际应用中的一个十分重要的问题。文献[3]指出,一个 9 维状态耦合滤波器相比于三个 3 维状态解耦滤波器,计算量前者是后者的 9 倍左右,存储空间的优势也是显而易见的,同时能够减少 Kalman 滤波中“病态矩阵”问题的影响^[3,5]。本文针对非线性测量下目标跟踪的应用背景,应用正规变换解决了 CMKF 滤波器的耦合问题。更为重要的是,针对二维情况下的具体问题,得到了解耦 CMKF 变换的解析表达式,不仅减少了计算中的许多中间环节,而且更加清楚地表明了转换测量和正规变换的物理含义。文中对 CMKF 及解耦 CMKF 算法的初值估计也相应进行了较为深入的研究。

本文得到的解耦 CMKF 算法的意义不仅在于其减少了计算的复杂性,便于硬件并行处理,而且在于对算法的理论分析也将更加便利,因为它将相关的多维问题转化为独立的一维问题,同时进行了归一化处理,而且变换表达式是解析形式.有关这方面的应用将在后续文章中阐述.同时需要指出的是,本文变换的解析表达式是在假定过程噪声在各坐标轴方向互不相关的二维情况下得到的,对于过程噪声相关以及三维或更高维情况下的解耦滤波形式将是下一步需要研究的.

参考文献:

- [1] Lerro D, Bar-Shalom Y. Tracking with debiased consistent converted measurements versus EKF [J]. IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems, 1993, 29(3): 1015 - 1022.
- [2] Bar-Shalom Y. A tutorial on multitarget-multisensor tracking and fusion [R]. 1997 IEEE National Radar Conference, NY: Syracuse, May, 1997.
- [3] Blackman S, Popoli R. Design and Analysis of Modern Tracking Systems [M]. Norwood, MA: Artech House, 1999. 191 - 193.
- [4] Li X R. Canonical transform for tracking with kinematic models [J]. IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems, 1997, 33(4): 1212 - 1223.
- [5] Daum F E, Fitzgerald R J. Decoupled Kalman filters for phased array radar tracking [J]. IEEE Transactions on Automatic Control, 1983, AC-28(3): 269 - 282.
- [6] Rogers S R. Instability of a decoupled Kalman tracking filter [J]. IEEE Transactions on Automatic Control, 1989, AC-34(3): 469 - 471.
- [7] Rogers S R. Steady-state performance of the decoupled Kalman filter [A]. Proceedings NAECON 1988 [C]. 334 - 339.
- [8] 杨春玲, 刘国岁, 余英林. 非线性系统中多传感器目标跟踪性能分析 [J]. 电子学报, 2000, 28(3): 101 - 103.
- [9] Kalata P R. The tracking index: A generalized parameter for $\alpha\beta$ and $\alpha\beta\gamma$ target trackers [J]. IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems, 1984, 20(2): 174 - 182.
- [10] 杨春玲, 倪晋麟, 刘国岁, 郑全战. 转换坐标卡尔曼滤波器的雷达目标跟踪 [J]. 电子学报, 1999, 27(3): 121 - 123.

作者简介:



王宏强 男, 1970 年 6 月生于陕西省, 博士研究生, 讲师, 参与编写论著《现代模式识别》, 已发表学术论文十余篇, 主要研究方向为多传感器数据融合、目标跟踪与自动目标识别等.



黎 湘 男, 1967 年 9 月生于湖南省, 博士, 副教授, 已发表学术论文二十余篇, 目前主要从事精确制导、信息融合、非线性信号处理等领域的研究工作.