

# 基于小波包变换的自适应均衡算法

黄奎<sup>1</sup>, 吕锐<sup>2</sup>

(1. 中国科学院软件研究所, 北京 100080; 2. 北京广播学院数字化工程中心, 北京 100024)

**摘要:** 本文在推导出离散正交小波包变换对应的正交矩阵的基础上, 提出了基于小波包变换的自适应均衡算法, 并分析了这种均衡算法的性能, 给出了计算机仿真结果. 另外, 为了使基于小波包变换的自适应均衡算法应用于实际, 给出了减低算法复杂度的方法.

**关键词:** 自适应均衡; 小波包变换; 优化算法; 正交矩阵

**中图分类号:** TN911.5 **文献标识码:** A **文章编号:** 0372-2112 (2003) 08-1205-04

## Adaptive Equalization Algorithm Based on Wavelet Packet Transform

HUANG Kui<sup>1</sup>, LV Rui<sup>2</sup>

(1. Institute of Software Chinese Academy of Sciences, Beijing 100080, China;

2. Ecdav of Beijing Broadcasting Institute, Beijing 100024, China)

**Abstract:** Adaptive equalization algorithm based on wavelet packet transform is proposed in the paper, upon the basis of the given orthogonal matrices corresponding to discrete orthogonal wavelet packet transform. The performance of the algorithm is analyzed, and we prove the analysis results from computer simulation. Additionally, in order to apply wavelet packet transform based adaptive equalization algorithm to various fields, the approach to minimize computational complexity is given.

**Key words:** adaptive equalization; wavelet packet transform; optimized algorithm; orthogonal matrices

### 1 引言

采用自适应均衡技术能够有效抑制多径信道衰减引入的 ISI (Inter-Symbol Interference), 其中基于最小均方 LMS (Least Mean Square) 的均衡算法应用较为广泛. 但 LMS 均衡算法收敛速度较慢, 通过对信号进行能量归一化的正交变换, 可以有效提高均衡算法的收敛速度. 目前已有的一些基于小波变换的自适应均衡算法的研究<sup>[1-3, 8]</sup>, 在此基础上, 本文提出了基于小波包变换的自适应均衡算法.

本文的第二部分根据小波包离散变换的滤波器组, 推导出正交小波包离散变换对应的正交矩阵, 第三部分给出了基于小波包变换的自适应均衡器结构, 分析了这种均衡算法的性能, 第四部分提出了减低算法复杂度的方法, 第五部分给出了计算机仿真结果, 第六部分是结论.

### 2 正交小波包变换矩阵

为便于分析小波包变换的特性, 根据小波对应的低通和高通滤波器, 推导小波包变换对应的正交矩阵. 为避免产生额外的小波包变换系数, 采用有限长度的离散信号周期化扩展

(periodic padding), 作为离散小波变换的边界扩展模式<sup>[5]</sup>, 处理小波包变换的边界失真.

小波包变换的低通滤波器和高通滤波器分别用  $h = [h_0, h_1, \dots, h_{2N-1}]$ ,  $g = [g_0, g_1, \dots, g_{2N-1}]$  表示, 滤波器的抽头长度为  $2N$ . 为简单起见, 设  $N$  为 2 的整数幂. 经推导, 可以得出  $i(1 \leq i \leq J - \log_2 2N + 1)$  级小波分解对应的  $2^{J-i+1} \times 2^{J-i+1}$  矩阵  $W_i$  为:

$$W_i = \begin{bmatrix} h_N & \dots & h_{2N-1} & 0 & \dots & 0 & h_0 & \dots & h_{N-1} \\ h_{N-2} & \dots & h_{2N-3} & h_{2N-2} & \dots & 0 & 0 & \dots & h_{N-3} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ h_{N+2} & \dots & 0 & 0 & \dots & h_1 & h_2 & \dots & h_{N+1} \\ g_N & \dots & g_{2N-1} & 0 & \dots & 0 & g_0 & \dots & g_{N-1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ g_{N+2} & \dots & 0 & 0 & \dots & g_1 & g_2 & \dots & g_{N+1} \end{bmatrix} \quad (1)$$

式中每一行 0 元素的个数为  $2^{J-i+1} - 2N$ . 由小波特性可知  $2^{J-i+1} \times 2^{J-i+1}$  维矩阵  $W_i$  为正交矩阵.

同样可以得到  $i(J - \log_2 2N + 1 < i \leq J)$  级小波分解对应的  $2^{J-i+1} \times 2^{J-i+1}$  矩阵  $W_i$  为:

$$W_i = \begin{bmatrix} h_0 & h_1 & h_2 & \dots & h_{2^{J-i+1}-2} & h_{2^{J-i+1}-1} \\ h_{2^{J-i+1}-2} & h_{2^{J-i+1}-1} & h_0 & \dots & h_{2^{J-i+1}-4} & h_{2^{J-i+1}-3} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ h_2 & h_3 & h_4 & \dots & h_0 & h_1 \\ g_0 & g_1 & g_2 & \dots & g_{2^{J-i+1}-2} & g_{2^{J-i+1}-1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ g_2 & g_3 & g_4 & \dots & g_0 & g_1 \end{bmatrix} \quad J - \log_2 2N + 1 < i < J \quad (2)$$

式中矩阵元素  $h_m = h_m + h_{2^{J-i+1}+m} + \dots + h_{2N-2^{J-i+1}+m}$ ,  $g_m = g_m + g_{2^{J-i+1}+m} + \dots + g_{2N-2^{J-i+1}+m}$ , 其中  $0 \leq m < 2^{J-i+1}$ , 可证  $W_i$  为正交矩阵.

$J$  级小波分解和  $J$  级完全小波包分解的  $2^J \times 2^J$  矩阵  $WT_J$ ,  $WPT_J$  可表示为:

$$WT_J = \begin{bmatrix} W_J & O & O & \dots & O \\ O & I & O & \dots & O \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ O & O & O & \dots & I \end{bmatrix} \times \dots \times \begin{bmatrix} W_2 & O \\ O & I \end{bmatrix} \times W_1 \quad (3)$$

$$WPT_J = \begin{bmatrix} W_J & O & O & \dots & O \\ O & W_J & O & \dots & O \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ O & O & O & \dots & W_J \end{bmatrix} \times \dots \times \begin{bmatrix} W_2 & O \\ O & W_2 \end{bmatrix} \times W_1 \quad (4)$$

上面两式中  $O$  为零矩阵,  $I$  为单位矩阵, 可知  $WT_J$ ,  $WPT_J$  为  $2^J \times 2^J$  正交矩阵.

### 3 基于小波包变换的自适应均衡算法

#### 3.1 LMS 均衡算法的正交小波包变换表示形式

设均衡器  $q(n)$  的抽头数为  $M = 2^J$ , 有限长度的均衡器  $q(n)$  可以用  $J$  级小波包完全分解形式来表示:  $q(n) = \sum_{l=0}^{2^{J-1}} k_{l-1} c_{l,k,l} \psi_{l,k,l}(n)$ . 式中  $c_{l,k,l}$  为  $J$  级分解的小波包系数,  $\psi_{l,k,l}(n)$  为小波函数, 这里定义  $S = 2^J$ ,  $k_1 = M/S$ , 如果  $K_1 < 2N$ , 则  $1 \leq J - \log_2 2N + 1$ , 若  $K_1 < 2N$ , 则  $J - \log_2 2N + 1 < J$ . 均衡器的输出  $z(n)$  为:

$$z(n) = \sum_{i=0}^{M-1} y(n-i) \sum_{l=0}^{2^{J-1}} \sum_{k=0}^{k_{l-1}} c_{l,k,l} \psi_{l,k,l}(n-i) \quad (5)$$

由上式可以看出,  $q(n)$  的输出可以看成是输入信号  $y(n)$  小波包变换的系数加权.

#### 3.2 基于小波包变换的自适应均衡算法

由 LMS 均衡算法的小波包变换形式, 得到基于小波包变换的自适应均衡器结构如图 1.

设输入信号  $Y(n) = [y(n), \dots, y(n-M+1)]^T$ , 小波包完全分解后第  $l$  路并行信号  $R_l$  为  $R_l(n) = [r_{l,0}(n), r_{l,1}(n), \dots, r_{l, \frac{M}{S}-1}(n)]$ ,  $1 \leq l \leq S$ . 令  $R(n) = [R_1(n), R_2(n), \dots, R_S(n)]^T$ . 根据式 (5) 可以得到第  $l$  路并行等效均衡器的矩阵形式为:  $Q_W^l(n) = [c_{l,0,l-1}(n), c_{l,1,l-1}(n), \dots, c_{l, \frac{M}{S}-1,l-1}(n)]$ , 令  $Q(n) = [Q_W^1(n), Q_W^2(n), \dots, Q_W^S(n)]^T$ . 均衡器的输出信号为  $z(n)$ , 均衡器的输出判决符号为  $d(n)$ , 均衡器的误差符号为  $e(n)$ .

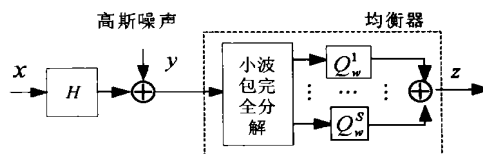


图 1 基于小波包变换的自适应均衡器结构

根据常规 LMS 均衡算法, 可以得到基于正交小波包变换的线性均衡算法为:

$$R(n) = WPT_J Y(n) \quad (6)$$

$$z(n) = Q^T(n) R(n) \quad (7)$$

$$e(n) = d(n) - z(n) \quad (8)$$

$$Q(n+1) = Q(n) + 2\mu e(n) R(n) \quad (9)$$

式 (9) 中  $\mu$  为步长因子. 为提高均衡的收敛速度, 需对迭代时均衡器系数增加量进行功率归一化处理. 设输入信号  $R(n)$  的自相关矩阵的对角线上元素  $r_m^2(n)$  ( $m=0, 1, \dots, M-1$ ) 为  $R(n)$  的第  $m$  个元素的功率. 由于信号自相关矩阵不确定, 所以实际应用中通常采用其估计值, 估计方法为:

$$r_m^2(n+1) = r_m^2(n) + (1 - \alpha) |r_{e,f}(n+1)|^2, \quad 0 < \alpha < 1, m=0, 1, \dots, M-1 \quad (10)$$

均衡器抽头系数的迭代按下式进行:

$$c_{l,f,e-1}(n+1) = c_{l,f,e-1}(n) + \frac{2\mu e(n) r_{e,f}(n)}{r_m^2(n)} \quad (11)$$

式中  $e = \text{INT}(m/K) + 1$ ,  $f = m - K \times \text{INT}(m/K)$ ,  $K = M/S$ ,  $\text{INT}$  表示取整.  $r_{e,f}(n)$  表示第  $n$  次迭代过程中  $R(n)$  的第  $e$  路并行信号的第  $f$  个元素.

#### 3.3 基于小波包变换的 LMS 均衡算法性能分析

下面将基于小波包变换的 LMS 算法称为 WPILMS (Wavelet Packet Transform based LMS), 本节分析 WPILMS 均衡器算法性能.

**3.3.1 维纳最优解** 设  $R_{yy}(n)$ ,  $R_{rd}(n)$  分别为  $Y(n)$  与  $R(n)$  的自相关矩阵, 设  $P_{yd}(n)$ ,  $P_{rd}(n)$  分别为  $Y(n)$ 、 $R(n)$  与判决符号的  $d(n)$  的互相关矩阵, 可以推导出 WPILMS 算法维纳最优解为<sup>[3]</sup>:

$$Q_{opt}^{WPT} = WPT_J R_{yy}^{-1}(n) P_{yd}(n) = WPT_J Q_{opt} \quad (12)$$

$Q_{opt} = R_{yy}^{-1}(n) P_{yd}(n)$  为常规 LMS 算法维纳最优解.

**3.3.2 收敛速度** 根据文献[6]的研究, 设  $\lambda_{\max}$ 、 $\lambda_{\min}$  分别为输入自相关矩阵的最大、最小特征值, 在对步长增加量进行功率归一化后, 正交变换后的信号自相关矩阵呈对角分布,  $\lambda_{\max}$ 、 $\lambda_{\min}$  比值显著减小, 提高了均衡器的收敛速度. 根据正交矩阵  $WT_J$  和  $WPT_J$  的形式, 可以得到如下的结论:

(1) 由于不同小波基对应正交矩阵不同, 对信号自相关矩阵特征值分布的影响也不同, 所以基于不同小波基的

WPILMS 算法收敛速度不同:

(2) 随着小波包分解级数的增加,由于正交矩阵  $W_i$  的影响,信号的自相关矩阵更趋于对角分布,因此收敛速度加快,但是当分解级数达到一定值时,由于自相关矩阵变化不再明显,收敛速度不会随着分解级数的增加而明显加快;

(3) 分解级数  $i (i > 1)$  相同时,WPILMS 均衡算法比基于小波变换的 LMS 均衡算法收敛速度快。

**3.3.3 计算复杂度** WPILMS 均衡算法,在每一步迭代过程中,都需要进行  $M$  点信号的  $i$  级小波包变换过程,和常规 LMS 均衡算法相比,增加了计算量,与基于小波变换的 LMS 均衡算法相比,计算量也有一定程度的增加。

### 4 基于小波包变换均衡算法优化

通过观察,可以发现迭代过程中存在冗余计算,去除迭代计算过程中的冗余,能够有效降低运算复杂度.由于小波包分解的低通滤波和高通滤波相似,这里给出低通滤波运算优化部分.

对于第  $i (1 \leq i \leq J - \log_2 2N + 1)$  级小波包分解,可以得到均衡器第  $n$  次迭代结果:

$$\left. \begin{aligned} r_{h,0}^i(n) &= h_0 r_{h,2^{i-1}}^{i-1}(n) + \dots + h_{N-1} r_{h,2^{i-1}-1}^{i-1}(n) \\ &\quad + h_{N-2} r_{h,0}^{i-1}(n) + \dots + h_{2N-1} r_{h,N-1}^{i-1}(n) \\ r_{h,1}^i(n) &= h_0 r_{h,2^{i-1}-N+2}^{i-1}(n) + \dots + h_{N-3} r_{h,2^{i-1}-1}^{i-1}(n) \\ &\quad + h_{N-2} r_{h,0}^{i-1}(n) + \dots + h_{2N-1} r_{h,N+1}^{i-1}(n) \\ r_{h,2^{i-1}}^i(n) &= h_0 r_{h,2^{i-1}-N-2}^{i-1}(n) + \dots + h_{N+1} r_{h,2^{i-1}-1}^{i-1}(n) \\ &\quad + h_{N+2} r_{h,0}^{i-1}(n) + \dots + h_{2N-1} r_{h,N-3}^{i-1}(n) \end{aligned} \right\} (13)$$

式中  $r_{h,m}^0(n) = x(n-m)$ ,同理可以得到均衡器第  $n+2$  次迭代的结果.

比较第  $n$  次和第  $n+2$  次迭代结果可以得到:

$$\left. \begin{aligned} r_{h,j}^1(n+2) &= h_{N-2j}x(n+2) - h_{N-2j+1}x(n+1) \\ &= r_{h,j-1}^1(n) - h_{N-2j}x(n-M+2) - h_{N-2j+1}x(n-M+1), \\ &\quad 1 \leq j \leq N/2 \\ r_{h,j}^1(n+2) &= r_{h,j-1}^1(n), \quad N/2 < j \leq (M-N)/2 \\ r_{h,j}^1(n+2) &= h_{N+m-2j}x(n+2) - h_{N+m-2j+1}x(n+1) \\ &= r_{h,j-1}^1(n) - h_{N+m-2j}x(n-M+2) - h_{N+m-2j+1}x(n-M+1), \\ &\quad (M-N)/2 < j \leq \frac{M}{2} - 1 \\ r_{h,0}^1(n+2) &= h_Nx(n+2) - h_{N+1}x(n+1) \\ &= r_{h,\frac{M}{2}-1}^1(n) - h_Nx(n-M+2) - h_{N+1}x(n-M+1) \end{aligned} \right\} (14)$$

由式(14)中的第二个等式可得:

$$r_{h,j}^1(n+4) = r_{h,j-1}^1(n+2) = r_{h,j-2}^1(n), \quad \frac{N}{2} + 1 < j \leq (M-N)/2 \quad (15)$$

由式(15)和第  $n+4$  次迭代结果可以得到  $r_{h,j}^2(n+4)$ 、 $r_{h,j-1}^2(n)$  之间的关系.对于  $i=1$  可以得出如下结论:  $r_{h,j}^i(n+2^i) = r_{h,j-1}^i(n)$ .等式成立时, $j$  的取值空间大小为:

$$\max \left\{ \frac{M - (2^{i+1} - 2)N}{2^i}, 0 \right\} \quad (16)$$

当  $r_{h,j}^i(n+2^i) = r_{h,j-1}^i(n)$  时,  $r_{h,j}^i(n+2^i)$  与  $r_{h,j-1}^i(n)$  不同乘积单元的最大个数为:

$$\begin{cases} \min\{2N, 2j\} & i = 1 \\ \min\{2N, (2 - 1/2^{i-2})N + 1\} & 2 \leq i < J - \log_2 2N + 1 \end{cases} \quad (17)$$

由式(16)、(17),可以得出优化后第  $i$  级小波分解需要的乘积运算量与未优化的乘积运算量之比.随着分解级数的增加,减少的运算量迅速下降,因此,当  $i$  增加到一定值时,无法进行算法优化.

设迭代次数为  $T, M \gg 2N, N \geq 2$ ,每次迭代时均衡器滤波计算及系数更新各需  $M$  次乘法运算.表 1 中给出常规 LMS 与优化前后的 WPILMS 运算量比较,表中分析了一级和二级分解的运算量.

为了实现优化算法,需要存储下一步迭代使用的中间结果,因此算法运算量的下降是以占用更多内存空间为代价的,其占用空间可以近似用  $O(MN)$  表示.为此,文献[7]建议使用  $M(M=S)$  子带滤波器实现小波包变换,以降低占用的存储空间.

表 1 LMS 与 WPILMS 的乘法运算量比较

	常规	一级分解	二级分解
优化前	$2MT$	$(2N+2)MT$	$(4N+2)MT$
优化后	$2MT$	$2MT+4NM+4N(T-2)$	$2MT+4NM+4N(T-2)+8NM+6N(N+1)(T-4)$

### 5 计算机仿真

下面通过计算机仿真,从不同方面分析比较了 WPILMS 均衡算法的收敛性能.

均衡器输入为基于自回归模型生成的随机二进制信号<sup>[6,9]</sup>,均值为 0,方差为 1,信噪比为 30dB,信道冲激响应为  $[0.227, 0.460, 0.688, 0.460, 0.227]$ .均衡器长度  $M=64$ ,选取的步长因子  $\mu=0.010$ ,接近于 1.期待响应  $d(n)$  由均衡器输入经过系数近似为最佳均衡器系数  $W_{opt}$  的有限长度滤波器重建<sup>[9]</sup>,迭代次数为 500 次,重复运算 200 次进行平均作为 MSE(Mean Square Error)值.

图中 db4 指 4 阶 Daubechies 小波.图 2(a)验证了:LMS 算法收敛速度较慢,而基于小波的自适应均衡算法收敛速度较快;基于不同小波基的均衡算法的收敛速度不同,阶数较大的小波对应的收敛速度更快.从图 2(b)可以看出,随着小波分解级数的增加,均衡算法的收敛速度加快,但当分解级数达到一定值时,收敛速度不会随着级数增加而明显加快.图 2(c)说明分解级数相同时,WPILMS 均衡算法比基于小波变换的均衡算法的收敛速度快.

### 6 结论

本文给出了 WPILMS 算法的均衡器结构,简要分析了算法性能.计算机仿真表明基于小波包变换的均衡算法相对于

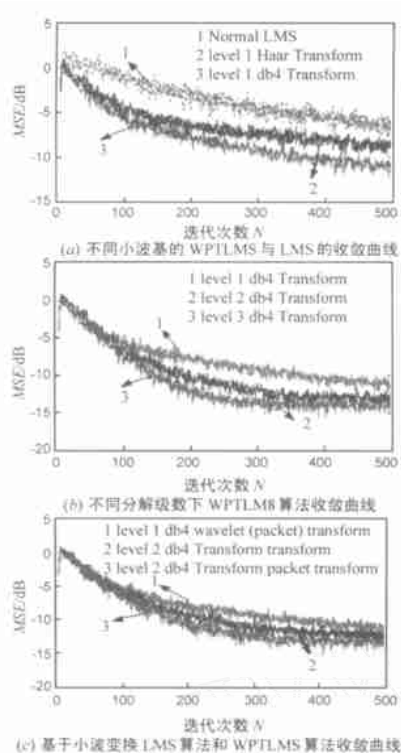


图2 WPTLMS算法收敛学习曲线

常规LMS和基于小波变换的LMS均衡算法,有效提高了收敛速度,同时给出了降低算法运算量的方法,分析了优化算法的性能。

#### 参考文献:

- [1] 刘丰,徐金标,王新梅.基于正交小波的判决反馈均衡算法[J].电子学报,1998,26(10):4-8.
- [2] 石庆华,程时昕.基于PR-QMF理论的判决反馈均衡器[J].通

信学报,2001,22(1):116-121.

- [3] 曾召华,刘贵忠,马社祥.基于正交小波变换的瞬变步长LMS自适应滤波器算法[J].通信学报,2001,22(4):123-128.
- [4] 沈福民.自适应信号处理[M].西安:西安电子科技大学出版社,2001:48-56.
- [5] Matlab Help Document of Wavelet Toolbox (Dealing with Border Distortion) [M/CD]:283-292.
- [6] F,Beaufays. Transform domain adaptive filters:an analytical approach [J]. IEEE Trans.on Signal Processing,1995,43(2):422-431.
- [7] Attallah,S. Wavelet transform domain LMS algorithm with minimum computational complexity[A]. In the Proceedings of International conference telecommunications[C]. Cheju, Korea,1999.66-70.
- [8] Attallah,S. The wavelet transform domain LMS adaptive filter in the context of equalization[A]. In the proceedings of International Conference Telecommunications[C]. Cheju, Korea,1999.55-59.
- [9] Farhang-Boroujeny B,S Gazor. Selection of orthonormal transforms for improving performance of transform domain normalized LMS algorithm [J]. IEE Proceedings,1992,139(5):327-335.

#### 作者简介:



黄 奎 男,1977年8月生于河南信阳,2001年于北京广播学院获硕士学位,2001年后于中科院软件所攻读博士学位,研究兴趣包括无线通信,信号处理,移动 QoS. Email: hk @iscas. ac. cn.

吕 锐 男,1964年5月生于湖南邵阳,1991年于国防科技大学获博士学位,1991年至1993年在北京理工大学博士后流动站工作,现为北京广播学院教授、博士生导师,研究方向为实时信号处理,无线通信,宽带网络。