

B 样条有限元法解矩形域边值问题的高斯积分矩阵传递算法

姬五胜¹, 李 英¹, 游 彬¹, 赵廷刚², 李斌颖³

(1. 上海大学通信工程系, 上海 200072; 2. 兰州师范高等专科学校数学系, 甘肃兰州 730070;
3. 兰州大学信息科学与工程学院, 甘肃兰州, 730000)

摘 要: B 样条有限元法是解决二维矩形场域中电磁场问题的一种理想的数值计算方法. 该方法计算精度高, 并且能保证场量应有的连续性. 本文构造了一种能快速实施 B 样条有限元方法的高斯积分矩阵传递算法 (TGIMA). 该算法通过矩阵形式积运算将每一个高斯积分点的 B 样条函数值传递到 B 样条有限元方程的总体系数矩阵中, 避免了 B 样条子段函数互乘的积分运算, 从而极大地降低了计算的复杂度. 这种算法易于程序实现, 有效地减少了计算量.

关键词: 电磁场; 边值问题; B 样条; 有限元; 高斯积分矩阵传递算法

中图分类号: O441. 4 **文献标识码:** A **文章编号:** 0372-2112 (2003) 12-1771-05

A New Algorithm of B-Spline FEM for Solving 2-D Electromagnetic Field Boundary Problem in Rectangular Regions Transferable Gauss Integral Matrix Algorithm

JI Wu-sheng¹, LI Ying¹, YOU Bin¹, ZHAO Ting-gang², LI Bin-ying³

(1. Shanghai University, Shanghai, 200072, China; 2. Lanzhou Teacher's College, Lanzhou, Gansu 730070, China;
3. School of Information Science and Engineering, Lanzhou University, Lanzhou, Gansu 730000, China)

Abstract: The B-Spline FEM is an effective numerical computation method for solving 2-D electromagnetic field problem of rectangular regions. This method has high computational accuracy without destroying the continuity of adjacent field value. In this paper, a transferable Gauss integral matrix algorithm (TGIMA) which can perform fleetly the B-spline FEM was proposed. By the algorithm, the B-spline function value of every Gauss point was transferred to general coefficient matrix of B-spline FEM equation without integral operations of product of B-spline subinterval function. Consequently the computational complexity can be largely reduced. The algorithm can be programmed conveniently and make the computation easier.

Key words: electromagnetic field; boundary value problem; B-spline; finite element; transferable Gauss integral matrix algorithm

1 引言

有限元方法作为一种基本的计算方法最先应用于力学领域. 1969 年, P. P. Silvester 将有限元法应用于求解时变场的稳态解, 从此有限元法在电磁场问题中得到了广泛的应用. 但是, 传统有限元法以 Lagrange 型多项式为基函数, 在一般情况下, 这类基函数只能保证函数本身在求解区域内的连续性. 八十年代后期, 梁旭彪等人建立了能应用于电磁场问题的 B 样条有限元法^[1]. 它以 B 样条函数作为势函数的基函数, 不仅可以得到更高精度的势函数数值解, 而且其导数也充分逼近原导函数, 保证了场量在相邻单元应有的连续性. B 样条有限元法在计算过程中, 必须建立总体系数矩阵. 总体系数矩阵的

非零元素由沿 x 方向和沿 y 方向的 B 样条函数互乘积分的相互乘积组成, 由于 B 样条函数是分段函数, 使得总体系数矩阵的计算十分繁琐、费时. 本文构造了一种能快速实施 B 样条有限元法的高斯积分矩阵传递算法 (TGIMA), 并通过了几个实例展示了该算法的优点和应用价值.

2 矩形区域上的 B 样条有限元法

一般形式椭圆型方程的混合边值问题可表示为 (文献 [1] 在该问题中未列入诺伊曼边界条件):

$$-\frac{\partial}{\partial x} \left[(x, y) \frac{\partial u}{\partial x} \right] - \frac{\partial}{\partial y} \left[(x, y) \frac{\partial u}{\partial y} \right] - q(x, y) = f(x, y) \quad (1)$$

收稿日期: 2001-12-28; 修回日期: 2002-12-03

基金项目: 上海市教育委员会重点学科基金 (No. 2000J507. 7. 1. QT0606)

$$u \Big|_1 = u_0, \left(\frac{\partial u}{\partial n} + u \right) \Big|_2 = g \quad (2)$$

若为矩形域($a < x < b, c < y < d$),则该矩形域上的总体 B 样条有限元方程为:

$$\{ [E_y] \odot [F_x] + [F_y] \odot [E_x] \} + q [E_y \odot E_x] + [H] \{ U \} = \{ P \} \{ R \} \quad (3)$$

$$\begin{aligned} \text{其中 } [E_x] &= \begin{bmatrix} b \\ a \end{bmatrix} \phi_i(x) \phi_k(x) dx; \\ [F_x] &= \begin{bmatrix} b \\ a \end{bmatrix} \phi_i(x) \phi_k(x) dx, i, k = -2, -1, \dots, N-1; \\ [E_y] &= \begin{bmatrix} d \\ c \end{bmatrix} j(y) i(y) dy; \\ [F_y] &= \begin{bmatrix} d \\ c \end{bmatrix} j(y) i(y) dy, j, l = -2, -1, \dots, M-1; \\ [H] &= \begin{bmatrix} \phi_i(x) \phi_k(x) & j(y) & i(y) & d \end{bmatrix}, \end{aligned}$$

$$i, k = -2, -1, \dots, N-1; j, l = -2, -1, \dots, M-1.$$

式(3)右边第一项 $\{ P \} = (P_{-2} \ P_{-1} \ \dots \ P_{M-1})$, 且

$$P_{kl} = \iint f \phi_k(x) i(y) dy.$$

式(3)右边第二项 $\{ R \} = (R_{-2} \ R_{-1} \ \dots \ R_{M-1})$,

$$R_l = (R_{-2,l} \ R_{-1,l} \ \dots \ R_{N-1,l}), \text{ 并且}$$

$$R_{kl} = \iint g \phi_k(x) i(y) dy.$$

式(3)左边第一项是总体系数矩阵, \odot 代表两个矩阵的 Kronecker 乘积, 第二项 $\{ U \}$ 代表待定的自由度, $\{ \phi_i(x) \}_{i=-2, -1, \dots, N-1}$ 和 $\{ j(y) \}_{j=-2, -1, \dots, M-1}$ 分别是沿 x 方向、 y 方向的改换后的 B 样条基函数^[1]. 改换前的基函数采用等距节点二次 B 样条函数^[1].

3 高斯积分矩阵传递算法(TGIMA)

3.1 计算 B 样条积分的一般方法

将式(3)中的 E_x 展开:

$$\begin{aligned} E_x &= \begin{bmatrix} b \\ a \end{bmatrix} \phi_i(x) \phi_k(x) = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_0 \end{bmatrix} \phi_i(x) \phi_k(x) dx \\ &+ \begin{bmatrix} x_2 \\ x_1 \end{bmatrix} \phi_i(x) \phi_k(x) dx + \dots + \begin{bmatrix} x_N \\ x_{N-1} \end{bmatrix} \phi_i(x) \phi_k(x) dx \\ & \quad i, k = -2, -1, \dots, N-1 \quad (4) \end{aligned}$$

首先来计算等式右边的第一项,只有在区间 $[x_0, x_1]$ 上有定义的二次 B 样条函数 $\phi_{-2}(x)$ 、 $\phi_{-1}(x)$ 、 $\phi_0(x)$ 才会出现在积分函数矩阵中,该项积分的具体计算式如下:

$$\begin{aligned} \int_{x_0}^{x_1} \phi_i(x) \phi_k(x) dx &= \\ \int_{x_0}^{x_1} \begin{bmatrix} \phi_{-2}(x) \phi_{-2}(x) & \phi_{-2}(x) \phi_{-1}(x) & \phi_{-2}(x) \phi_0(x) \\ \phi_{-1}(x) \phi_{-2}(x) & \phi_{-1}(x) \phi_{-1}(x) & \phi_{-1}(x) \phi_0(x) \\ \phi_0(x) \phi_{-2}(x) & \phi_0(x) \phi_{-1}(x) & \phi_0(x) \phi_0(x) \end{bmatrix} dx & (5) \end{aligned}$$

式(5)右边被积函数矩阵的每一项都是两个 B 样条函数的乘积,把被积函数为该形式的积分称为 B 样条函数的互乘积分.在上式中,只要能计算等式右边每一项的积分,就可以计算出整个积分函数矩阵.通常的计算方法就是从 $\phi_{-2}(x)$ 、 $\phi_{-1}(x)$ 、 $\phi_0(x)$ 的表达式中分别取出定义在区间 $[x_0, x_1]$ 上的

子段函数并将其代入式(5),然后进行积分.在实际计算中,当 N 较小时(即场域的网格较稀时),对 E_x 的这种计算方法是可取的.当 N 较大(即场域的网格较密)时,应用这种方法计算量很大,不利于编程和计算.基于这种考虑,本文构造一种适合于计算 B 样条函数互乘积分的高斯积分矩阵传递算法.

3.2 高斯积分矩阵传递算法(TGIMA)

3.2.1 高斯积分点坐标矩阵的建立 为了利用一维高斯积分计算区间 $[x_i, x_j]$ 上 B 样条函数的互乘积分,引入如下变换:

$$x = \frac{1}{2}(x_j + x_i) + \frac{1}{2}(x_j - x_i)t \quad (6)$$

$$\begin{aligned} \text{则 } \int_{x_i}^{x_j} \phi_i(x) \phi_k(x) dx &= \int_{-1}^1 \frac{1}{2}(x_j - x_i)t \phi_i(t) \phi_k(t) dt \\ &= \frac{1}{2}(x_j - x_i) \int_{-1}^1 W \phi_i(t) \phi_k(t) dt \quad (7) \end{aligned}$$

式(7)中 W 是权因子, t 是高斯积分点的坐标.由于 B 样条函数互乘积分的被积函数是四次函数,故采取三个高斯积分点完全满足计算精度要求.区间 $[-1, 1]$ 上的高斯积分点 t 的坐标依次是 $-0.7745966692, 0, 0.7745966692$, 将这三点坐标值代入式(6)可得 $[x_i, x_j]$ 区间上相应的高斯积分点坐标.将 $a = x_0 < x_1 < \dots < x_N = b$ 在左右两端点分别向外扩充两点,那么沿 x 方向有 $(N+5)$ 个节点,它们组成 $(N+4)$ 个积分区间 $[x_{-2}, x_{-1}], [x_{-1}, x_0], \dots, [x_N, x_{N+1}], [x_{N+1}, x_{N+2}]$. 在每一个区间上运用式(6)将分别得出对应的 $(N+4)$ 组高斯积分点坐标.将这 $(N+4)$ 组坐标值按从小到大的顺序组合成一个 $(N+4) \times 3$ 阶矩阵,称其为高斯积分点坐标矩阵.

3.2.2 高斯积分点坐标矩阵转化为高斯积分点函数值矩阵

将高斯积分点坐标矩阵代入 B 样条函数互乘积分中的每一个 B 样条函数,就会得到与 B 样条函数对应的高斯积分点函数值矩阵.如果 B 样条函数序号不同,所得到的高斯积分点函数值矩阵也不同.容易看出,高斯积分点函数值矩阵与高斯积分点坐标矩阵的阶数一致,它的每一个元素是将高斯积分点坐标矩阵中相应位置上的高斯积分点坐标值代入该序号 B 样条函数所得的结果.

3.2.3 利用高斯积分点函数值矩阵实现 B 样条函数互乘积分的三点高斯积分法求解

在式(7)中,按 3.2.2 中的方法, $\phi_i(x)$ 、 $\phi_k(x)$ 都能得到对应的高斯积分点函数值矩阵,分别记为 e_i 、 e_k .在此基础上,构造一个与高斯积分点函数值矩阵同阶的权函数矩阵,记为 W ,该矩阵的每一行的三个元素均是 $5/9, 8/9, 5/9$.通过下式可获得 B 样条函数互乘积分值 $z_{i,k}$:

$$\begin{aligned} Z_{i,k} &= \frac{1}{2}(x_j - x_i) W \odot e_i \odot e_k \\ & \quad i, k = -2, -1, \dots, N-1 \quad (8) \end{aligned}$$

上式表示将 e_i 、 e_k 和 W 三个同阶矩阵的对应元素分别相乘后所得各项再求总和(\odot 代表形式积),再乘以系数 $(x_j - x_i)/2$.由于 $\phi_i(x)$ 、 $\phi_k(x)$ 各自只有一个子段函数与 $[x_i, x_j]$ 区间对应,即它们的高斯积分点函数值矩阵应该只有一行非零元素,而实际的 e_i 、 e_k 均包含三行(或四行)非零元素,故在利用式(8)计算时,必须将 e_i 、 e_k 中与积分区间 $[x_i, x_j]$ 不对应的元素全部置零,才能得到正确的积分值.如果 $|i - k| < 3$, 式

(8) 计算所得的结果不等于零;反之,如果 $|i - k| > 3$, 则计算所得的结果则等于零.

3.2.4 总体系数矩阵的形成 在式(3)中,总体系数矩阵包括三项,以下我们对这三项中的元素分别进行处理.

(1) 对 $[E_x]$ 、 $[F_x]$ 、 $[E_y]$ 、 $[F_y]$ 矩阵的处理

式(5)右边的每一项积分可按 3.2.2 和 3.2.3 叙述的方法计算.在 B 样条有限元方法中,为了构造系数矩阵的需要,须将这九个积分值组成的 3×3 阶矩阵变换成 $(N + 4) \times (N + 4)$ 阶矩阵.把式(5)的结果记为 z^1 , 让 z^1 与布尔选择矩阵 v^1 相乘,可实现上述目的,其计算公式为:

$$Z_1 = (v^1)^T z^1 v^1 = \begin{bmatrix} z_{-2,-2} & z_{-2,-1} & z_{-2,0} & 0 & \dots & 0 \\ z_{-1,-2} & z_{-1,-1} & z_{-1,0} & 0 & \dots & 0 \\ z_{0,-2} & z_{0,-1} & z_{0,0} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix} \quad (9)$$

其中 $v^1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}$

式(4)右边每一项均可按与式(9)类似的处理办法构造对应 $(N + 4) \times (N + 4)$ 的阶矩阵.这样就得到一系列 $Z_1, Z_2, \dots, Z_{N-1}, Z_N$, 将它们相加便得矩阵 Z_x , 即

$$Z_x = Z_1 + Z_2 + \dots + Z_{N-1} + Z_N \quad (10)$$

Z_x 代表 $[E_x]$ 矩阵.按照同样的处理方法可以计算出 $[F_x]$ 、 $[E_y]$ 、 $[F_y]$ 矩阵.

(2) 对 $[H]$ 矩阵的处理

由于诺伊曼边界条件在混合边值问题的古典变分泛函中已得到自动满足,所以关于 $[H]$ 的计算可进一步简化:

$$[H] = \begin{bmatrix} \phi_i(x) \phi_k(x) & j(y) & i(y) & d \\ \phi_i(x) \phi_k(x) & j(y) & i(y) & d \\ \phi_i(x) \phi_k(x) & j(y) & i(y) & d \\ \phi_i(x) \phi_k(x) & j(y) & i(y) & d \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \int_a^b \phi_i(x) \phi_k(x) dx \\ \int_c^d \phi_i(x) \phi_k(x) dx \\ \int_a^b \phi_i(x) \phi_k(x) dx \\ \int_c^d \phi_i(x) \phi_k(x) dx \end{bmatrix} \odot \begin{bmatrix} j(c) & i(c) \\ j(d) & i(d) \\ j(c) & i(c) \\ j(d) & i(d) \end{bmatrix}$$

表 2 TGMA 和传统有限元法计算矩形波导 TE 的截止波长 λ_c 的结果对照

波型	TE_{10}	TE_{20}	TE_{01}	TE_{11}	TE_{30}	TE_{21}	TE_{31}	TE_{40}	TE_{02}	TE_{41}	TE_{22}
理论值	4.572	2.286	2.032	1.856865067	1.524	1.518735736	1.2192	1.143	1.016	0.996210839	0.928432533
TGMA 数值解	4.57198512	2.285734659	2.031986006	1.856852278	1.523029485	1.518652078	1.218699906	1.140458836	1.015882071	0.994525378	0.991696027
传统有限元法数值解	4.569	2.262	1.979	1.790	1.488	1.440	1.141	1.093	0.923	0.916	0.891
TGMA 相对误差 (%)	0.000688706	0.011607198	0.000688706	0.000688706	0.063682103	0.005508343	0.041018196	0.222324064	0.011607198	0.169187213	6.814010905
传统有限元法相对误差 (%)	0.066	1.05	2.61	3.61	2.36	5.20	6.40	4.37	9.150	8.03	3.99

$$i, k = -2, -1, \dots, N - 1; j, l = -2, -1, \dots, M - 1 \quad (11)$$

关于 $[P]$ 、 $[R]$ 的处理与 $[H]$ 类似.

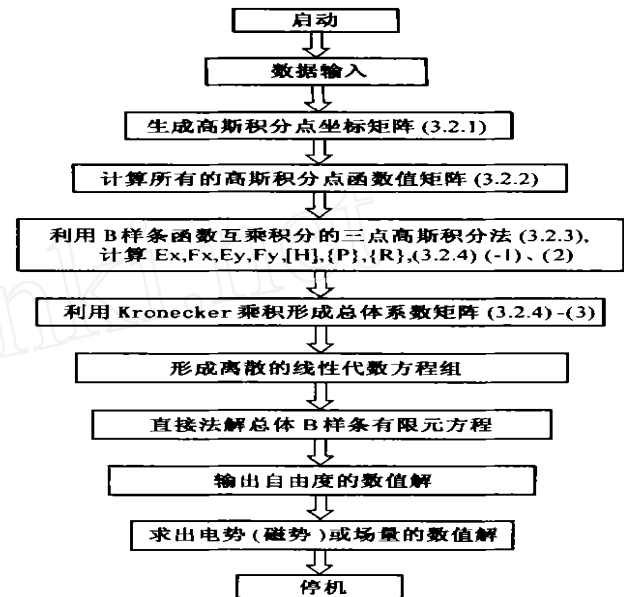
(3) 总体系数矩阵的形成

如果已执行(1)、(2)中所有的计算,就可以按照式(3)构建总体系数矩阵.

3.3 B 样条有限元方法求解电磁场问题的流程

总体系数矩阵确立以后,利用改换后 B 样条函数的在左端点、右端点处的特点^[1],将强加边界条件(狄利克雷边界条件)转化为对边界上自由度的约束,然后利用直接法求解势函数和场量.表 1 是求解过程流程图:

表 1 B 样条有限元法求解电磁场问题基本流程图



4 数值试验

4.1 矩形波导截止波长的分布问题求解

作为典型示例,选取矩形波导 BI-100 ($a \times b = 2.286 \times 1.016 \text{cm}^2$) 中 TE 波的截止波长 λ_c 的分布问题来进行分析.该问题的解与 z 轴无关,其计算区域为二维平面.将场域以 10×10 分格均匀剖分,则求解场域上改换后的 B 样条基函数总共有 24 个.计算时采用高斯积分矩阵传递算法,所得 λ_c 的数值解及相对误差见表 2.表 2 中也列举了文献[2]中用传统有限元法计算所得的结果.

从表 2 中可以看出, TGIMA 计算矩形波导截止波长 λ_c 的相对误差值基本上都比较小, 尤其是 TE_{10} 、 TE_{01} 、 TE_{11} 波型的结果十分精确. 显而易见, 采用 100 个矩形单元的 TGIMA 计算结果的精度远高于采用 65 个节点 (相当于 96 个三角形单元) 的传统有限元法的计算结果.

4.1 分层媒质问题的电势与场量求解

一个截面为矩形的长直金属管, 管内部填充两种介质, 它们的介电常数之比为 $\epsilon_1 / \epsilon_2 = 20$. 金属管的边界条件及大小如图 1 所示. 求管内电势和电场强度的分布.

对于 x 轴的区间 $[0, 1]$, 以 0.1 间隔采取均匀分格, 组成 12 个改换后的 B 样条基函数. 由于沿 y 轴媒质分布不均匀, 将媒质分界面上的节点以二重节点对待, 这样沿 y 轴方向构成 13 个改换后的 B 样条基函数, 依次记为 $\phi_1(y)$, $\phi_2(y)$, $\phi_3(y)$, \dots , $\phi_9(y)$, $\phi_{10}(y)$. 其中 $\phi_3(y)$ 、 $\phi_5(y)$ 分别是右端为二重节

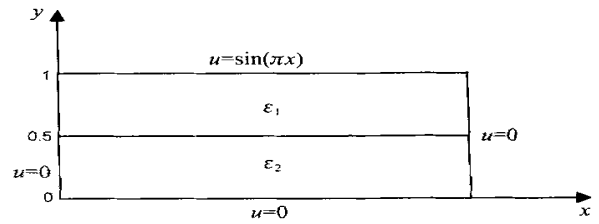


图 1 长直金属管的结构及边界条件

点的 B 样条函数和左端为二重节点的 B 样条基函数, $\phi_4(y)$ 是中间为二重节点的 B 样条函数. 关于 $\phi_3(y)$ 、 $\phi_4(y)$ 、 $\phi_5(y)$ 的构造见文献 [3]. 运用 TGIMA, 计算所得关于分层媒质问题电势的部分数值解如表 3 所示, 并以电势的解析解作为精确值, 计算了其相对误差 (表 4). 表 5 列举了 TGIMA 计算该问题的电场强度部分数值解和相对误差 (以解析解作为精确值).

表 3 TGIMA 计算媒质分层问题所得电势数值解

节点坐标	解析解	数值解	节点坐标	解析解	数值解	节点坐标	解析解	数值解
(0.1, 0.1)	0.0162764	0.0162756	(0.2, 0.2)	0.0650000	0.0649963	(0.3, 0.2)	0.0894648	0.0894597
(0.1, 0.3)	0.0554691	0.0554666	(0.2, 0.4)	0.1565163	0.1565047	(0.3, 0.4)	0.2154262	0.2154026
(0.1, 0.7)	0.1455013	0.1454936	(0.2, 0.6)	0.2380836	0.2380678	(0.3, 0.6)	0.3276940	0.3276722
(0.1, 0.9)	0.2330689	0.2330520	(0.2, 0.8)	0.3429767	0.3429605	(0.3, 0.8)	0.4720670	0.4720446
(0.4, 0.1)	0.0500937	0.0500911	(0.5, 0.2)	0.1105846	0.1105782	(0.6, 0.1)	0.0500937	0.0500911
(0.4, 0.5)	0.3609819	0.3609818	(0.5, 0.5)	0.3795589	0.3795587	(0.6, 0.5)	0.3609819	0.3609818
(0.4, 0.7)	0.4478070	0.4477834	(0.5, 0.6)	0.4050520	0.4050251	(0.6, 0.7)	0.4478070	0.4477834
(0.4, 0.9)	0.7173122	0.7172604	(0.5, 0.8)	0.5835069	0.5834792	(0.6, 0.9)	0.7173122	0.7172604

表 4 TGIMA 计算媒质分层问题在不同纵坐标下电势的相对误差 (%)

$y = 0.1$	$y = 0.2$	$y = 0.3$	$y = 0.4$	$y = 0.5$	$y = 0.6$	$y = 0.7$	$y = 0.8$	$y = 0.9$
0.0051932	0.0057336	0.0045567	0.0074125	0.0000383	0.0066390	0.0052612	0.0047487	0.0072219

表 5 TGIMA 计算媒质分层问题所得电场强度数值解及相对误差

节点坐标	解析解	数值解	相对误差 (%)	节点坐标	解析解	数值解	相对误差 (%)
(0.1, 0.1)	0.2302581	0.2301487	0.0474877	(0.3, 0.7)	1.1226095	1.1243791	0.1576334
(0.1, 0.4)	0.8517335	0.8569534	0.6128603	(0.4, 0.4)	0.9709042	0.9639115	0.7202166
(0.2, 0.2)	0.4620091	0.4610421	0.2093182	(0.4, 0.8)	1.4415756	1.4334166	0.5659768
(0.2, 0.5)	1.2306996	1.2333759	0.2174625	(0.5, 0.6)	0.4490432	0.4455620	0.7752360
(0.3, 0.3)	0.7026594	0.6995256	0.4459829	(0.5, 0.9)	2.0486007	2.0313062	0.8442111

在表 3 中可以看出, $x = 0.6$ 和 $x = 0.4$ 处在对应点上的数值解是一致的. 事实上, $x = 0.7$ 和 $x = 0.3$ 处, $x = 0.8$ 和 $x = 0.2$ 处, $x = 0.9$ 和 $x = 0.1$ 处在对应点上的数值解也是相同

的, 故在表 3 中未列出. 由表 4 和表 5 可见, 电势函数和电场强度的数值解的相对误差分别小于 0.0075% 和 0.85%, 二者的计算精度均十分理想.



TGIMA 建立在 B 样条有限元法的基础之上,而 B 样条有限元法以 B 样条函数作为势函数的基函数, B 样条函数最重要的特性是它的光滑性,即它的一阶导数连续,这也是 B 样条有限元法优越于传统有限元法的地方.应用 TGIMA 求解电磁场问题,势函数的导数也充分逼近原导函数,保证了场量在相邻单元应有的连续性,所以得到的电势和电场强度的数值解精度更高.

5 结论

高斯积分矩阵传递算法(TGIMA)从 x 轴(或 y 轴)的高斯积分点坐标矩阵出发,依次得到场域上所有 B 样条基函数关于高斯积分点的函数值矩阵,然后利用这些矩阵进行了一系列形式积运算,并提取了这些形式积运算结果中的有效元素,将它们传递到总体系数矩阵中去,最终得到了 B 样条有限元方程.该算法利用已知值之间乘积的传递运算,代替了 B 样条子段函数之间的互乘积分运算,使编程更加简便,有效地降低了计算量.综上所述,高斯积分矩阵传递算法是实施 B 样条有限元法的一种行之有效的算法,它易于编程,在降低计算量方面有明显的优势.

参考文献:

- [1] 梁旭彪,简柏敦,倪光正. B 样条有限元法[J]. 中国电机工程学报,1987,7(6):9-20.
- [2] 盛剑霓. 电磁场数值分析[M]. 北京:科学出版社,1984,269.
- [3] 李岳生. 样条与插值[M]. 上海:上海科学技术出版社,1983. 127-132.

作者简介:



姬五胜 男,1968 年生于甘肃,讲师,2000 年在兰州大学获硕士学位,目前在上海大学攻读无线电物理专业博士学位,研究方向:MCM 互连、封装的建模和仿真、微波集成电路设计、电磁场数值计算.

李 英 男,1934 年生于江苏,上海大学教授、博士生导师、中国电子学会微波光子学专业委员会主任,出版专著 4 本,译著 1 本,发表论文 150 多篇,主要研究方向:电磁场与微波技术.



游 彬 女,1974 年生于兰州,2000 年在兰州大学获硕士学位,目前在上海大学攻读无线电物理专业博士学位,感兴趣的研究方向:电磁场数值计算、射频电路设计、微波滤波器设计与分析等.



赵廷刚 男,1970 年生于甘肃,讲师,2002 年在兰州大学获理学硕士学位,目前在上海大学攻读计算数学博士学位,感兴趣的研究方向:偏微分方程数值解.