

基于物理模型的声音合成理论研究

吴永忠¹, 韩江洪¹, 张 利², 郑淑丽¹, 程文娟¹

(11 合肥工业大学计算机信息学院, 安徽合肥 230009; 21 合肥工业大学机械与汽车工程学院, 安徽合肥 230009)

摘 要: 基于物理模型的声音合成技术是一种可以精确描述物体发声的方法, 其实质是以物体的振动 PDE 方程为基础来直接合成声音, 该方法已逐步成为目前声音合成技术领域内的研究热点. 本文从理论上和试验上证明了一个被研究者广为引用的一维基础 PDE 方程存在的局限性, 利用力学理论推导出了新的振动 PDE 方程, 并从理论上和试验上证明了其正确性, 从而提出了更具普遍意义的新一维声音合成基础方程, 克服了传统方程的缺陷.

关键词: 物理模型; 声音合成; 偏微分方程; 局限性

中图分类号: J611. 1 **文献标识码:** A **文章编号:** 03722112 (2003) 12188204

Theoretical Research on Sound Synthesis Technique Based on Physical Model

WU Yongzhong¹, HAN Jianghong¹, ZHANG Li², ZHENG Shuli¹, CHENG Wenjuan²

(11 Department of Computer and Information, Hefei University of Technology, Hefei, Anhui 230009, China;

21 School of Mechanical and Automotive Engineering, Hefei University of Technology, Hefei, Anhui 230009, China)

Abstract: Sound synthesis technique based on physical model is a kind of accurate method to describe objects sounds. The method is based on partial differential object's vibration equation of to synthesize sound directly. Presently, the method is becoming an important research field on digital sound synthesis. Under our research, we discover that the PDE cited by many researchers for a long time is extreme limitation, and prove those by theory and experimentation. And then, we derive a new PDE by dynamics elements. Last, we prove that our new PDE is correct. So, a new basic and universal equation has been proposed by the paper for sound synthesis based on physical model.

Key words: physical model; sound synthesis; PDE; limitation

1 引言

基于物理模型 (Physical Model) 的声音合成技术是利用声学 and 力学理论, 通过偏微分方程 (PDE: partial differential equation) 来描述物体的振动物理特性. 它是对声音产生的物理机制的描述, 而不是对声音本身的描述^[1,4], 而其它现有的合成方法均是对音频本身时频特征的描述. 由于它可以精确描述声音的产生及其产生过程, 因此, 成为目前乐器仿真、声音合成领域的研究热点.

从物理特性上来说, 管乐器 (wind)、弦乐器 (string)、长笛 (flute) 等可以用一维 PDE 来精确描述, 鼓 (drum)、锣 (gong)、钹 (cymbal) 等可以用二维 PDE 来描述^[1,2,3,6].

方程 (1) 是物理模型声音合成方法中的一个著名的基础方程 (以下简称传统 PDE), 它是在理想刚性振动方程的基础上添加了两个阻尼项而得到的一维振动方程, 其目的是为了描述振动体振动幅度和频率的自然衰减. 该方程是德国学者 A. N. Tychonoff 和 A. A. Samiski 于 1959 年提出的^[11], 后被德国^[1,3,4,5,7]、法国^[10,12,13]、意大利^[14]、其它^[2] 等国外的研究者

广泛引用, 国内目前尚未见相关的文献报告. 但是, 我们在从事该领域的研究中发现了它在理论上的局限性和应用中的不足, 难以精确地描述物体的振动特性, 不具有普遍意义. 本文第二节从理论上对此作了分析, 从试验上作了验证; 第三节利用力学理论作了新的推演, 提出了具有普遍意义的新方程 (以下简称 NPDE); 第四节对 NPDE 做了详细的理论分析和试验验证; 最后做了总结.

2 传统 PDE 方程的解析

2.1 PDE 表达式形式

按照传统理论, 物体的振动可由一个一维如式 (1) 或者多维偏微分方程 (PDE) 及其边界条件、初始条件和激励条件来描述^[1,3,6]. 限于篇幅, 本文只讨论一维情形, 多维的证明和推导, 我们不再在此讨论.

$$QA \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} - T_0 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} + EI \frac{\partial^4 y}{\partial x^4} + d_1 \frac{\partial y}{\partial t} + d_3 \frac{\partial^3 y}{\partial t^3} = f(x, t) \quad (1)$$

其中: t 和 x 为时空坐标, $y = y(x, t)$ 表示振动的偏移量, E 表示杨氏弹性模量, T_0 表示琴弦两端的标称张力, Q 表示材料的密

度, A 表示横截面积, I 表示惯性矩, d_1 和 d_3 分别表示二个不同的阻尼因子, $f(x, t)$ 表示外部激励.

对于两端固定的弦, 方程(1)的边界条件如下:

$$y(0, t) = 0, \quad y(L, t) = 0 \quad (2)$$

$$y_d(0, t) = 0, \quad y_d(L, t) = 0 \quad (3)$$

其中: y_d 表示 $\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$, y_c 表示微分 $\frac{\partial y}{\partial x}$.

初始化条件:

$$y(x, 0) = U(x), \quad t = 0 \quad (4)$$

$$\dot{y}(x, 0) = v(x), \quad t = 0 \quad (5)$$

\dot{y} 表示微分 $\frac{\partial y}{\partial t}$, \ddot{y} 表示 $\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}$.

2.1.2 PDE 方程的定解

为了简化讨论, 下面以拨弹弦为例来求传统 PDE 方程的定解. 对于两端固定的拨弹弦, 由于受力后作自由振动, 有 $f(x, t) = 0$, 初速度 $v = 0$, 故式(1)可化为:

$$QA \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} - T_0 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} + EI \frac{\partial^4 y}{\partial x^4} + d_1 \frac{\partial y}{\partial t} + d_3 \frac{\partial^3 y}{\partial t \partial x^2} = 0 \quad (6)$$

式(5)可化为:

$$\dot{y}(x, 0) = 0, \quad t = 0 \quad (7)$$

联立方程(2)、(3)、(4)、(6)、(7), 可求得方程(6)的定解为:

$$y(x, t) = \frac{2}{L} \sum_{l=1}^{+\infty} e^{-A} [A_L \cos(X_l t) + B_L \sin(X_l t)] \sin(B_l x) \quad (8)$$

其中: $A_L = \frac{2y \sin(B_l x_0)}{B_l^2(L - x_0)x_0}$, $B_L = \frac{AA_L}{X_L}$, $B_L = \frac{PL}{L}$ (9)

$$B = EI B_L^4 + T_0 B_L^2 \quad (10)$$

$$A = (d_1 - d_3 B_L^2) / (2QA) \quad (11)$$

$$X_L^2 = B / (QA) - A^2 \quad (12)$$

x_0 为弦的拨弹点.

3 传统 PDE 的局限性

根据式(8)可知: 自由振动体的振动具有衰减因子 e^{-A} . 显然, 在常态下, 物体振动的阻尼系数 d_1 和 d_3 有限大, 且 $d_1 > 0$, $d_3 > 0$. 为了证明其局限性, 令: $N = \sqrt{\frac{d_1 L}{d_3 P^2}}$, 为临界频率, 考虑以下四种情况:

情形 1 当 L 取有限大, 且满足 $L < N$ 时, 恒有 $A > 0$ 成立, 若 $t \rightarrow +\infty$, 则 $e^{-A} \rightarrow 0$. 它所表达的物理意义为: 系统中特征频率小于 N 的波, 其振荡幅度呈指数衰减, 当时间趋于无穷时, 幅度衰减为 0. 这符合物理规律.

情形 2 当 $L = N$, 恒有 $A = 0$ 成立. 它所表达的物理意义为: 系统中特征频率等于 N 的波, 将以等幅振荡的形式无限持续下去. 显然, 这与阻尼振动的规律不相符合.

情形 3 若取 $L > N$, 由于 d_1 和 d_3 有限大且大于 0, 故可得: $A < 0$, 则 $e^{-A} \rightarrow +\infty$. 它所表达的物理意义为: 系统中特征频率为无穷大的波, 其振动幅度将为无穷大.

情形 4 若 L 截取为有限大, 且 $L > N$ 时, 有 $A < 0$, 当 $t \rightarrow +\infty$ 时, 则有 $e^{-A} \rightarrow +\infty$ 成立. 它所表达的物理意义为: 系

统中特征频率大于 N 的波, 其振荡幅度随着时间的增加呈指数增长; 当时间趋于无穷时, 幅度为无穷大.

显然方程(1)仅在满足情形 1 的状态下成立. 事实上, 根据振动理论, 物体振动的频率是由基波及其无限多次谐波组成, 如果式(1)成立, 则在情形 3、4 下将发生共振, 情形 2 下将发生无阻尼振荡, 这与事实和理论相矛盾.

对于上述讨论, 通过计算仿真, 也有同样的结论^[16].

通过上述讨论可知: 方程(1)导致共振或无阻尼振荡的原因在于引入了阻尼项 d_3 , 若 $d_3 = 0$, 则共振现象将消除. 也许, 正是为了回避这种局限性, 另外一些文献^[10]在引用方程(1)时, 忽略了其第五项, 得到方程:

$$QA \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} - T_0 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} + EI \frac{\partial^4 y}{\partial x^4} + d_1 \frac{\partial y}{\partial t} = f(x, t) \quad (13)$$

这种忽略尽管提高了系统的稳定性, 但是它却忽略了阻尼对高频成分的衰减^[16].

由此, 可得出这样的结论: 方程(1)有理论上的局限性, 它只是对振动体在一定特殊状态下的近似描述, 不能精确地描述物体的振动, 该方程不具有普遍意义.

上述结论是在激励为零(即拨弹弦)的情况下得到的, 对于激励非零的状况, 也有同样的结论.

4 NPDE 方程的建立

从理论上说, 对于一个两端固定的拨弹琴弦, 在激励信号的作用下, 将产生三种振动模式, 即: 横向振动、纵向振动和扭转振动模式, 当忽略扭转模式时, 它们分别由惯性力、粘滞阻尼力、轴向张力、粘滞阻尼应力等共同作用而产生的^[9].

图 1(a) 示一两端紧固的等截面琴弦, 图 1(b) 示其横向受力. 图中, 弦受任意分布载荷 $f(x, t)$ 的作用, 杨氏弹性模量为 E , 惯性矩为 I , 长度为 L , 截面积为 A , 质量密度为 Q , 单位长度质量为 $m = QA$, 轴向张力为 T_0 . 受两种阻尼力的影响, 一种是与横向速度成正比的粘滞阻尼力 $f_d = -c \frac{\partial y}{\partial t}$, 其中 c 为位移速度阻尼系数. 另一种是截面上各纤维以一定速度反复变形、沿截面高度产生分布的粘滞阻尼应力 R_d , 如图 1(c) 所示. 设 R_d 的大小与各点的应变速度成正比, 即 $R_d = c_s \frac{\partial y}{\partial t}$, 其中 c_s 为应变速度阻尼系数, E 为弦的弯曲应变.

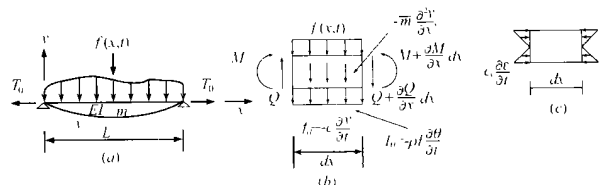


图 1 两端紧固弦的受力图

产生的阻尼弯矩为: $M_d = QR_d z dA$, 其中 z 为截面上的点到中性轴的距离.

$$- R_d = c_s \frac{\partial y}{\partial t}, E = -z \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \quad (14)$$

$$\wedge M_d = -Q^2 dA c_s \frac{\partial^3 y}{\partial t \partial x^2} = -c_s \int \frac{\partial^3 y}{\partial t \partial x^2}$$

轴向张力 T_0 产生的弯矩为: $M_T = T_0 y$ (15)

微元惯性力为:

$$I_m = - \frac{d}{dt} \left[m dx \frac{dy}{dt} \right] = - m \frac{d^2 y}{dt^2} dx$$
 (16)

微元粘滞阻尼力: $f_d = - c \frac{dy}{dt} dx$ (17)

根据达朗伯原理, $\sum Y = 0$, $\sum m_0 = 0$, 这时微元的动平衡方程为:

$$- Q + (Q + dQ) + N_y + f(x, t) dx - m \frac{d^2 y}{dt^2} dx - c \frac{dy}{dt} dx = 0$$
 (18)

$$M - (M + dM) + Q dx + N_y \frac{dx}{2} + f(x, t) dx \frac{dx}{2} - m \frac{d^2 y}{dt^2} dx \frac{dx}{2} - c \frac{dy}{dt} dx \frac{dx}{2} = 0$$
 (19)

又 $\sum N_y U_0$, 并忽略式(19)中二次高阶小量, 上两式可化为:

$$\frac{dQ}{dx} = - f(x, t) + m \frac{d^2 y}{dt^2} dx + c \frac{dy}{dt}$$
 (20)

$$\frac{dM}{dx} = Q$$
 (21)

对式(21)两边取 x 的一阶导数, 可得:

$$\frac{d^2 M}{dx^2} = - f(x, t) + m \frac{d^2 y}{dt^2} dx + c \frac{dy}{dt}$$
 (22)

根据图(1), 轴向张力产生的弯矩为

$$M_N = N_y$$
 (23)

其中: N 为坐标 (x, y) 处的张力.

弦截面 x 上的总弯矩为:

$$M = - EI \frac{d^2 y}{dx^2} + M_d + M_N$$
 (24)

根据式(14)、(23)和(24), 可得:

$$M = - EI \frac{d^2 y}{dx^2} dx + - c_s I \frac{d^3 y}{dt dx^2} + N_y$$
 (25)

对上式两边取 x 的二次导数, 可得:

$$\frac{d^2 M}{dx^2} = - EI \frac{d^4 y}{dx^4} - c_s I \frac{d^5 y}{dt dx^4} + N_y + N \frac{d^2 y}{dx^2}$$
 (26)

根据式(22)和(26), 可得:

$$EI \frac{d^4 y}{dx^4} - N \frac{d^2 y}{dx^2} + m \frac{d^2 y}{dt^2} dx + c \frac{dy}{dt} + c_s I \frac{d^5 y}{dt dx^4} = f(x, t)$$
 (27)

方程(27)就是一维振动系统的新方程, 即 NPDE. 与传统 PDE 方程相比, 它们的差别在于第五项.

5 NPDE 的正确性证明

5.1 理论证明

忽略推导过程, NPDE 对于拨弹弦的定解形式仍方程(8), 但其中:

$$A = (c + c_s B_1^4) / (2QA)$$

因上式右边各项均为正数, 所以, 恒有 $A > 0$ 成立. 当 $ty +]$ 或者 $Ly +]$ 时, $e^{-A} y > 0$. 振动始终处于逐步衰减状态, 系统是稳定的.

故: 该结论从理论上解决了方程(1)的

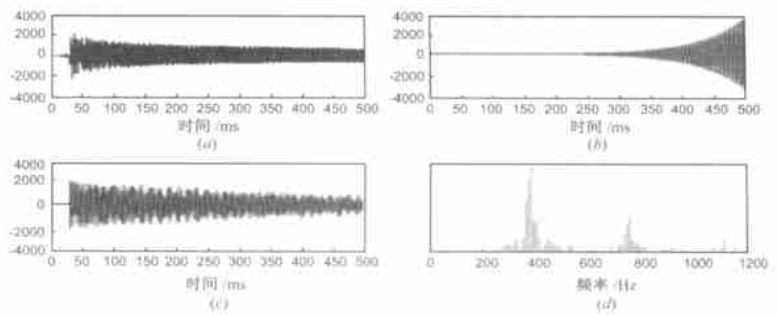


图 2 吉他 B 弦第 7 品位波形与频谱

局限性.

5.2 试验验证

本试验在赛扬 II 667 PC 平台上实现 1

取钢弦吉他, 其 B 弦参数为: 琴弦长度为 $L = 0.65m$, 直径 $D = 0.34mm$, $T_0 = 73N$; 密度 $Q = 7800kg/m^3$; $E = 210 \times 10^{11}N/m^2$; $c = 3 \times 10^{-3}kg/(ms)$, $c_s = 5 \times 10^{-4}kg/(ms)$, 惯性矩 $I = 6156 \times 10^{-16}$, $d_1 = 3 \times 10^{-3}kg/(ms)$, $d_3 = 5 \times 10^{-4}kg/ms$, $T_s = 0.1024ms$ 频谱分析采用 FFT 算法, 分辨率为 1125Hz.

(1) 波形对比

波形对比如图 2 所示, 它显示了吉他 B 弦第 7 品位(7th fret)激励后第一个 500ms 内的振动波形及频谱密度, 其理论基音频率 $f_1 = 369.99Hz$ 其中, 图 2(a)^[15] 是真实吉他的振动波形; 图 2(b) 为采用传统 PDE 方程的计算结果 ($L = 1$), 显然, 它产生了自激振荡; 图 2(c) 和 (d) 是采用 NPDE 方程的计算结果 ($L = [1, 1024]$), 前者为仿真波形图, 后者为频谱密度图, 基音频率为 $f = 368.75Hz$, 与其理论基音频率相比, 误差很小, 高次谐波为 $2f, 3f, \dots$. 直观地比较图 2(a)、(b)、(c), 显然, NPDE 的波形更接近真实. 另外, NPDE 的仿真结果还比文献 [15] 用数字波导方法得出的仿真结果更精确. 由此可见, NPDE 更具合理性.

(2) 音色对比

表 1 列出了 B 弦从空弦(0) 到第 6 品位基音频率和谐波的理论试验结果.

从上表试验数据对比来看, 在计算弦的基音频率方面, 二者都有相同的精度. 但是, 传统 PDE 丢失了高次谐波分量, 而 NPDE 方程的谐波分量很准确.

根据上述试验, 我们同样可以得出结论: 传统 PDE 方程有很大的局限性, 相反, NPDE 方程可以精确地描述物体的振

表 1

(频率单位: Hz)

品位	0	1	2	3	4	5	6
理论基音频率(Hz)	246.94	261.63	277.18	293.67	311.13	329.63	349.23
NPDE 基音频率	247.5	261.25	277.5	293.75	311.25	328.75	348.75
传统 PDE 基音频率	246.25	261.25	276.25	293.75	311.25	331.25	351.25
NPDE 谐波频率	准确	准确	准确	准确	准确	准确	准确
传统 PDE 谐波频率	无	无	无	无	无	无	无

动特性.

6 结束语

本文从理论上和应用上证明了传统一维 PDE 存在的缺陷,提出了新的一维基础方程(NPDE). 尽管本文所研究的仅是拨弹弦,但它同样适用于其它很多一维振动体. 根据同样的原理也可以得到多维(MD)方程,其方程型式近似,不同的是其理论证明和推导过程更加复杂.

参考文献:

- [1] Lutz Trautmann, Rudolf Rabenstein. Digital sound synthesis based on transfer function models[A]. Proc 1999 IEEE Workshop on Applications of Signal Processings to Audio and Acoustics[C]. New York. IEEE, 1999. 17- 20.
- [2] A Chaigne, A Askenfelt. Numerical simulations of piano strings. I. A physical model for struck string using finite difference methods[J]. J Acoust Soc Am, 1994, 95(2) 1112- 1118.
- [3] L Trautmann, S Petrusch, R Rabenstein. Physical modeling of drum by transfer function methods[A]. Int Conf on Acoustics Speech and Signal Proc[C]. Salt Lake City: ICASSP, Utah, 2001.
- [4] Rudolf Rabenstein, Lutz Trautmann. Digital sound synthesis by physical modelling[A]. Symposium On Image and Signal Processing and Analysis[C]. Pula, Croatia: ISPA, 2001.
- [5] Lutz Trautmann, Rudolf Rabenstein. Transfer function models with non2 linear excitations for digital sound synthesis[A]. Xth European Signal Processing Conference[C]. Tampere, Finland: EUSIPCO, 2000. 5- 8.
- [6] Kees van Doel, Dinesh K Pai. The Sounds of Physical Shapes[J]. Presence 1998 by the Massachusetts Institute of Technology, 1998, 7(4): 382- 395.
- [7] Lutz Trautmann, Rudolf Rabenstein. Sound synthesis with tension modulated nonlinearities based on functional transformations[A]. Acoustics and Music: Theory and Applications[C]. Jamaica: AMTA, 2000. 20- 22.
- [8] G Cuzzucoli, V Lombardo. Physical model of the plucking process in the classical guitar[A]. In Proc Int Computer Music Conf[C]. Thessaloniki, Greece: PI CMC, 1997. 172- 179.
- [9] 龙驭球,包世华. 结构力学(第二版下册)[M]. 北京:高等教育出版社, 1996. 221- 229.

- [10] M Aramaki, J Bensa, L Daudet, Ph Guilemain, R Krpnl and Martinet. Resynthesis of coupled piano string vibrations based on physical modeling[J]. Journal of New Music Research, 2001, 22(5).
- [11] A N Tychonoff, A A Samski. Differentialgleichungen der mathematischen Physik[M]. Berlin: VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, 1959.
- [12] M Aramaki, J Beansa, L Daudet etc. Synthesis of Musical Sounds: From Mechanical Models to Signal Processing Models[DB]. <http://www.diku.dk/musinf/papers/psip01.pdf>, 2001.
- [13] C Valette, C Cuesta. M canique de la corde vibrante[M]. Trait des Nouvelles Technologies(S rie M canique), Paris: Ed. Herm s, 1993.
- [14] Marco Palumbi and Lorenzo Seno, METAL STRING: Physical modelling of bowed strings - a new model and algorithm[DB]. <http://www.axnet.it/cm>, 2002.
- [15] Matti Karjalainen, Vesa Valimaki, Zoltan Jancsy. Towards high2quality sound synthesis of the guitar and string instruments[A]. International Computer Music Conference[C]. 1995 Tokyo, Japan: ICMC, 1995.
- [16] 吴永忠. 基于物理模型的声音合成技术理论研究[D]. 合肥:合肥工业大学, 2003.

作者简介:



吴永忠 男, 1964年6月生于四川省, 高级工程师, 计算机应用专业博士生, 研究方向: 矿用监测系统、信号处理.



韩江洪 男, 1954年9月生于安徽省, 研究员、博导、副校长, 研究方向: 计算机控制与信息系统.

张利 妇, 1955年11月生于安徽省蚌埠市, 硕士, 副教授, 硕士生导师, 研究方向: 信息家电, 计算机集成制造系统.