

基于 OPG 理论的自适应滤波器设计及其在图像处理中的应用

彭冬亮, 吴铁军

(浙江大学智能系统与决策研究所, 浙江大学工业控制技术国家重点实验室, 浙江杭州 310027)

摘要: 本文基于单参数变换群理论提出了一种新的自适应滤波器的设计方法, 并且给出了滤波器与图像卷积的算法. 参数变化后的滤波器的可以表示为事先给定的一组基本滤波器的线性组合. 这种滤波器在不同方向、尺度和位置上和图像进行卷积时, 可以显著提高运算效率. 最后给出了一个图像边缘提取的算例, 表明这种方法是有效的.

关键词: 自适应滤波器; 单参数变换群; 可控制函数; 边缘检测

中图分类号: TN911. 7 **文献标识码:** A **文章编号:** 0372-2112 (2004) 01-0118-03

OPG Based Adaptive Filter Design and Its Application in Image Processing

PENG Dong-liang, WU Tie-jun

(Institute of Intelligent System and Decision Making, Zhejiang University;
National Laboratory of Industrial Control Technology, Hangzhou Zhejiang 310027, China)

Abstract: A novel adaptive filter design technique is proposed in this paper according the theory of One-parameter Transformation Group. An algorithm for the convolution of this filter and an image is also given. The filter, after this parameter changes, can be represented in form of the linear combination of a fixed finite set of basis filters. When this kind of filters are convoluted with a image in different orientations, positions and scales, the computing efficiency is improved remarkably. An example for edge-detection is given to demonstrate validity of this method.

Key words: adaptive filter; one-parameter transformation group; steerable functions; edge-detection

1 引言

在计算机视觉问题的研究中, 首先需要对所获得的数字图像进行预处理, 如噪声滤波、边缘检测、图像锐化等. 在对初始图像进行上述处理时, 常常通过在不同方向、位置和尺度上对其进行滤波来获取图像在对应位置、方向和尺度上的某个特征信息, 如边缘、纹理等. 解决这些问题的常规方法是: 当滤波方向、位置和尺度变化时, 滤波器需要做相应的调整, 同时按照原来的算法重新进行卷积运算得到滤波后图像. 因为每一次调整都要进行一次卷积运算, 所以这种方法的计算效率是比较低的. 当需要对大量图像进行实时处理时, 提高计算速度、降低算法的计算复杂度是十分重要的.

Freeman 和 Adelson 基于函数极坐标形式的 Fourier 级数展开提出了一种方向可调滤波器的设计方法^[1], 通过引入可控制函数概念, 将任一方向的滤波器表示为一组基滤波函数的线性组合. 由于卷积也是线性运算, 所以图像经过任一方向滤波器后的响应可以用该图像通过一组基滤波器的响应的线性组合表示, 避免了重复卷积运算, 从而减少了运算量. Simoncell 等把可控制函数推广到平移情况, 并且构造了一种多尺度变换, 这种变换在一定程度上克服了小波变换对平移的依赖性^[2]. Petrona 基于奇异值分解理论, 讨论了旋转和尺度变换作用下可控制函数的构造问题^[3]. 这些方法在可控制函数的表

示和确定上都比较繁琐, 文献^[4,5]从 Lie 群角度对函数的描述进行简化. 可控制函数在图像处理中的应用正在研究中^[6,7].

本文从单参数变换群(OPG)的角度概括了可控制函数的确定, 即可控制滤波器的设计问题, 把滤波器的尺度变换、平移变换和旋转变换问题在 OPG 意义下统一起来. 这种滤波器对参数变化具有明显的自适应能力. 利用可控制滤波器改进了用 Canny 滤波器进行图像边缘检测算法^[8], 降低了原有算法的计算复杂度, 并且通过仿真验证了算法的有效性.

2 单参数变换群及其无穷小形式

定义 1^[9] (单参数变换群) 若在 $x - y$ 平面上给出变换

$$x_1 = f(x, y, \theta) \quad y_1 = g(x, y, \theta) \quad (-\infty < \theta < +\infty) \quad (1)$$

若 (1) $\theta = 0$ 表示恒等变换, 即 $x = f(x, y, 0)$, $y = g(x, y, 0)$;

(2) $\theta = -\theta$ 表示逆变换, 即 $x = f(x_1, y_1, -\theta)$, $y = g(x_1, y_1, -\theta)$;

(3) 两个变换的“乘积”仍为变化族(1)中的“元素”, 如 $x_1 = f(x_1, y_1, \theta_1)$, $y_1 = g(x_1, y_1, \theta_1)$, 则“乘积”两次连续变换: $(x, y) \rightarrow (x_1, y_1) \rightarrow (x_2, y_2)$;

当(1)~(3)满足时, 称(1)为单参数变换群(OPG).

OPG的许多性质可以通过研究其无穷小形式的性质来说明, 并且已知一个 OPG 的无穷小形式就可以确定整体变换(1)^[9].

定义 2^[9] (OPG 的无穷小) 将 (1) 在 $\epsilon = 0$ 附近做一阶 Taylor 展开

$$x_1 = x + \epsilon \frac{\partial x}{\partial x} + O(\epsilon^2) \quad y_1 = y + \epsilon \frac{\partial y}{\partial y} + O(\epsilon^2) \quad (2)$$

其中 $\frac{\partial x}{\partial x} = \frac{dx_1}{d\epsilon} \Big|_{\epsilon=0}$, $\frac{\partial y}{\partial y} = \frac{dy_1}{d\epsilon} \Big|_{\epsilon=0}$

称式 (2) 为式 (1) 的无穷小形式, (x, y) 和 (x_1, y_1) 分别为 (x, y) 的无穷小。

利用 OPG 的无穷小形式可以引入一个类似微分的算子 L , 并且有如下命题成立。

命题 1^[9] 设式 (1) 和式 (2) 分别是平面上点 (x, y) 在参数为 ϵ 的单参数变换群 G 作用下的整体变换和变换的无穷小形式, 则对于任意函数 $f(x, y)$ 有

$$f(x_1, y_1) = e^{\epsilon L} f(x, y)$$

其中 $L = (x, y) \frac{\partial}{\partial x} + (x, y) \frac{\partial}{\partial y}$ 是 OPG 的生成元, 级数形式的微分算子 $e^{\epsilon L} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\epsilon^n}{n!} L^n$ 。根据上面的讨论结果, 本文给出了几种常见的变换群及其生成元, 如表 1 所示。

表 1 常见的几个 OPG 及其生成元

OPG	整体变换	生成元 L
平移群 (x 方向)	$x_1 = x + \epsilon, y_1 = y$	$\frac{\partial}{\partial x}$
平移群 (y 方向)	$x_1 = x, y_1 = y + \epsilon$	$\frac{\partial}{\partial y}$
旋转群	$x_1 = x \cos \epsilon - y \sin \epsilon$ $y_1 = x \sin \epsilon + y \cos \epsilon$	$-y \frac{\partial}{\partial x} + x \frac{\partial}{\partial y}$
伸缩群	$x_1 = e^{\epsilon} x, y_1 = e^{\epsilon} y$	$x \frac{\partial}{\partial x} + y \frac{\partial}{\partial y}$
双曲旋转群	$x_1 = x e^{\epsilon}, y_1 = y e^{-\epsilon}$	$x \frac{\partial}{\partial x} - y \frac{\partial}{\partial y}$
双曲旋转群	$x_1 = x \cosh \epsilon + y \sinh \epsilon$ $y_1 = x \sinh \epsilon + y \cosh \epsilon$	$x \frac{\partial}{\partial y} + y \frac{\partial}{\partial x}$

3 可控制函数及其基函数的确定

在 Freeman 和 Adelson 的文章中提出了“可控制”函数的概念。

定义 3^[11] (可控制函数或可控制滤波器) 设 $f(x, y) : R^2 \rightarrow R$, G 是参数为 ϵ 的 OPG, 对任意 $g(\epsilon) \in G$, 若存在有限确定函数集合 $\{\phi_i | 1 < i < n\}$, 使得

$$g(\epsilon) f(x, y) = \sum_{i=1}^n \alpha_i(\epsilon) \phi_i(x, y)$$

称 $f(x, y)$ 在变换群 G 作用下是可控制的, $\{\alpha_i(\epsilon)\}, \{\phi_i(x, y)\}$ 分别为调节函数和基函数。注意到 $\{\alpha_i(\epsilon)\}$ 只依赖于变换参数 ϵ , 而且上面的表示形式是可分离的。这里不失一般性假设 n 是所需要的基函数的最小数目, 显然这些基函数是彼此线性无关的。

下面我们由 OPG 的生成元对 $f(x, y)$ 的重复作用给出这 n 个基函数的一组解 (基函数不唯一), 以便把可控制函数经变换作用后的函数表示为原来函数在生成元作用下生成函数

的线性组合, 而这些生成函数族可以事先确定。

命题 2 设 $f(x, y)$ 在 OPG (参数为 ϵ) G 作用下是“可控制”的, 对于任意 $g(\epsilon) \in G$, 经 $g(\epsilon)$ 变换作用后生成的函数可以写成以下 n 个线性无关基函数的线性组合

$$g(\epsilon) f(x, y) = \sum_{i=1}^n \alpha_i(\epsilon) L^{i-1} f(x, y)$$

证明 由命题 1 可知, $g(\epsilon) f(x, y) = e^{\epsilon L} f(x, y)$, $e^{\epsilon L}$ 是关于算子 L 的无穷级数。设 $L^m f$ 是第一个与前面序列线性相关的项, 即 $L^m f(x, y) = \sum_{i=0}^{m-1} L^i f(x, y)$, 则有

$$\begin{aligned} L^{m+1} f(x, y) &= L(L^m f(x, y)) = \sum_{i=0}^{m-1} L^{i+1} f(x, y) \\ &= \sum_{i=0}^{m-2} L^{i+1} f(x, y) + L^m f(x, y) \end{aligned}$$

可见 $L^{m+1} f(x, y)$ 可以表示为前 m 项 $L^i f(x, y)$ ($i = 0, 1, \dots, m-1$) 的线性组合。所以当 $i > m+1$ 时, $L^i f(x, y)$ 也可以表示为前 m 项 $L^i f(x, y)$ 的线性组合。从而命题得证。

例 1 在旋转群作用下讨论 Gaussian 函数 $G(x, y) = e^{-(x^2+y^2)}$ 及其对 x 的一阶偏导数 $G_x(x, y) = -2xe^{-(x^2+y^2)}$ 对应的基函数。

由表 1 可知, 旋转群的生成元 $L = -y \frac{\partial}{\partial x} + x \frac{\partial}{\partial y}$; $LG(x, y) = 0$; $LG_x(x, y) = 2ye^{-(x^2+y^2)} = -G_y(x, y)$; $L^2 G_x(x, y) = -G_x(x, y)$

所以 $G(x, y)$ 的基函数就是其本身, 这也和 Gaussian 函数的旋转对称性是吻合的; $G_x(x, y)$ 的基函数是 $\{G_x(x, y), LG_x(x, y)\}$, 这说明 Gaussian 函数沿任一方向的一阶导数可以由 G_x 和 G_y 的线性组合来表示。

例 2 平移群作用下 $f(x) = x^2$ 的基函数。

因为 $L = \frac{\partial}{\partial x}$, $Lf = 2x$, $L^2 f = 2$, $L^3 f = 0$, 所以 $f(x)$ 在平移群作用下的基函数是 $\{f, Lf, L^2 f\}$ 。

顺便指出, 调节函数 $\alpha_i(\epsilon)$ 可以通过待定系数法确定, 例如对于 G_x 的旋转变换, 可以先将其表示为极坐标形式 $G_x(r, \theta) = -2r \cos \theta e^{-r^2}$, 当其旋转角为 θ 时有

$$G_x(r, \theta + \epsilon) = -2r \cos(\theta + \epsilon) e^{-r^2} = \cos \epsilon G_x - \sin \epsilon G_y$$

所以, $\alpha_1(\epsilon) = \cos \epsilon$, $\alpha_2(\epsilon) = \sin \epsilon$ 。

4 可控制滤波器在图像处理中的应用

在机器视觉的低级阶段和图像处理中, 常常会对一幅图像在不同方向和尺度上进行多次重复的卷积运算。如果卷积中的核函数具有上述的可控制性质, 则卷积过程可用图 1 表示。

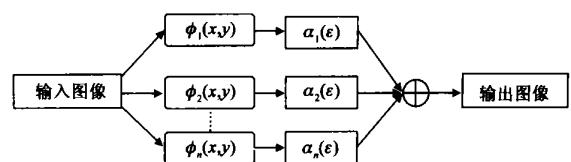


图 1 可控制滤波器图像处理过程框图

算法 可控制滤波器和图像卷积

(1) 根据命题 2 确定可控制滤波器的基函数,再由待定系数法推出调节函数的表达式;

(2) 计算图像与每一个基函数的卷积;

(3) 对给定的某个参数值计算对应的调节函数值;

(4) 计算图像最后的卷积结果.

这个算法可以用于改进 Canny 边缘检测器^[8]的算法. Canny 边缘检测器首先对图像进行高斯平滑滤波,然后计算不同方向的导数幅值,经过非极大值抑制和双阈值处理后可以确定边缘的位置和方向.由于导数运算可以沿任意方向,所以确定边缘像素点处的最大梯度方向,计算量也是比较大的.如果滤波和计算梯度的算子具有可控制性质,我们可以找到两个基本的滤波方向,将这两个方向的滤波结果事先确定出来,则图像沿任意方向的滤波结果可以由这两个基本滤波结果通过适当的线性组合表示,从而避免了卷积运算,提高了计算速度.因为卷积和导数运算的可交换性,所以有

$$\partial G/\partial n * f = (n \cdot \nabla G) * f = n \cdot \nabla (G * f)$$

其中, $\partial G/\partial n$ 为高斯函数 $G(x, y)$ 沿方向 n (单位向量) 的方向导数. 设方向 n 与 x 轴的夹角为 θ , 因为

$$n \cdot \nabla G = \cos \theta G_x + \sin \theta G_y$$

注意这里 $\partial G/\partial n$ 实际上是将坐标轴 x 旋转到 n 方向,与前面讨论的旋转群作用下函数旋转角度相差一个符号. 所以只要知道了 $G_x * f$ 和 $G_y * f$, 就可以很容易求出沿任一方向的梯度,根据梯度最大值就可以确定边缘的方向.

下面的两幅图分别是利用改进的 Canny 边缘检测器和未改进 Canny 边缘检测器对 Lenna 图像检测的结果,实验结果表明用改进算法得出的边缘检测结果和未改进算法的检测结果没有太大差别.从计算复杂度角度讲,如果采用了 $N \times N$ 卷积模板(一般 $N = 2, 3, 5, 7$),对于原来的 Canny 算法,每次卷积运算都做需要 N^2 次乘法,改进后除了在两个基本方向各需要做 N^2 次乘法外,在求出旋转角的正弦和余弦值后,其余方向的卷积只需做 2 次乘法.所以这种设计方法在不损失图像边缘检测精度的前提下有效地降低了计算量,这对大规模图像的实时处理是很有价值的.

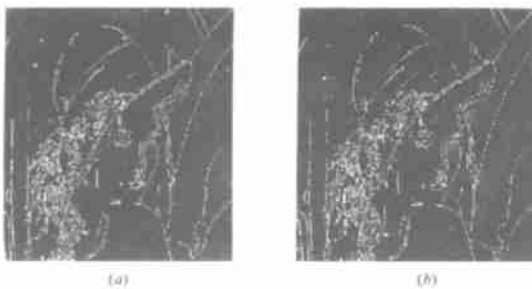


图 2 改进 Canny 边缘检测算法 (a) 和未改进 Canny 边缘检测算法 (b) 仿真结果

5 结论

用具有可控制性质的函数作为滤波器已经在图像处理和计算机视觉的许多问题中得到应用.从数学角度对这类函数进行分析以便使其应用有合理的解释是很重要的.本文从 OPG 的角度讨论了这类函数的分解及基函数的确定问题,提出了可控制滤波器和图像卷积的算法,并且将这种设计思想用于图像的边缘检测问题,实验结果表明这种方法是有效的.进一步需要研究的问题是多个变换连续作用下滤波器的设计问题.

参考文献:

- [1] Freeman W T, Adelson E H. The design and use of steerable filters [J]. IEEE Trans Pattern Anal. Machine Intell. 1991, 13 (9): 891 - 906.
- [2] Simoncelli E P, Freeman W T, Adelson E H, et al. Shiftable multiscale transforms [J]. IEEE Trans Information Theory. 1992, 38 (2): 587 - 607.
- [3] Perona P. Deformable kernels for early vision [J]. IEEE Trans Pattern Anal. Machine Intell. 1995, 17 (5): 488 - 499.
- [4] Hel-Or Y, Teo P C. Canonical decomposition of steerable functions [A]. IEEE Computer Society Conference on Computer Vision and Pattern Recognition [C]. San Francisco, CA. 1996. 809 - 816.
- [5] Teo P C, Hel-Or Y. Lie generators for computing steerable functions [J]. Pattern Recognition Letters. 1998, 19 (1): 7 - 17.
- [6] Bharath A A. Steerable filters for multirate shape extraction [A]. IEEE Seminar on Time-scale and Time-Frequency Analysis and Applications [C]. London, UK. 2000, 17/1 - 17/6.
- [7] Manduchi R, Portilla J. Independent component analysis of textures [A]. IEEE International Conference on Computer Vision [C]. Corfu, Greece, 1999. 1054 - 1060.
- [8] Canny J F. A computational approach to edge detection [J]. IEEE Trans Pattern Anal. Machine Intell. 1986, 8 (6): 679 - 698.
- [9] 潘祖梁. 非线性问题的数学方法及其应用 [M]. 杭州: 浙江大学出版社, 1998.

作者简介:

彭冬亮 男, 1977 年生于山西晋中, 分别于 1998 和 2000 年在哈尔滨工业大学飞行器设计专业获学士和硕士学位, 现为浙江大学控制科学与工程专业在读博士, 研究方向是微型柔性机器人的建模和机器人视觉、图像处理、以及空间柔性结构的动力学与控制.

吴铁军 男, 1950 年生于江苏南京, 1988 年获浙江大学工业自动化专业博士学位, 现为该校智能系统与决策研究所所长, 教授, 博士生导师, 当前主要研究领域为智能系统控制与决策及其在动态生产调度、微机器人控制、网络流量控制、环境工程自动化和智能交通系统中的应用.