

循环时延估计子性能分析

黄知涛, 周一宇, 姜文利

(国防科技大学电子科学与工程学院, 湖南长沙 410073)

摘要: 文章详细分析并推导得到了一类循环时延估计子的估计理论精度. 在较高信噪比条件下 ($SNR > -5\text{dB}$), 仿真得到的估计精度与理论估计精度基本上是一致的, 这说明了文章理论分析的正确性. 在高斯白噪声和慢变化时变高斯白噪声两种噪声模型下对二相编码和四相编码信号的仿真实验表明, 循环估计子估计性能确实要优于实际中经常使用的能量辐射计.

关键词: 循环估计子; 时延估计; 精度分析

中图分类号: TN911 **文献标识码:** A **文章编号:** 0372-2112 (2004) 02-0092-06

Estimation Performance for Cyclic Time-Delay Estimator

HUANG Zhi-tao, ZHOU Yi-yu, JIANG Wen-li

(School of Electronic Science and Engineering, N U D T, Changsha, Hunan 410073, China)

Abstract: The estimation accuracy for the cyclic time-delay estimator is discussed under the condition of white gaussian noise. Simulation results show that the simulation accuracy value is approximately the same as the theoretical one in the condition $SNR > -5\text{dB}$, which indicates the exactness of the accuracy analysis. At the same time, under the condition of different background noise with WGN (White Gaussian Noise) and slowly time-variant WGN, simulation results based on biphas coding and quadriphase coding signals show that the cyclic estimator really performs better than the radiometer widely used in practice.

Key words: cyclic estimator; time-delay estimation; accuracy analysis

1 引言

循环平稳信号处理方法已经在许多领域得到了广泛的应用, 如雷达信号检测、天线波束形成、信号参数估计及系统辨识^[1]等. 与传统的信号处理方法相比, 循环平稳信号处理方法能够适应不同特性噪声信号环境, 具有抗干扰及信号选择的能力, 这为设计性能优良稳健的信号处理算法提供了基础^[1, 7, 8].

早在 80 年代中期, William A Gardner 教授就研究并发表了利用信号循环平稳性进行信号时延估计的论文^[2, 3], 在此基础上作者对文献^[2, 3]的适用条件做了进一步推广, 研究并给出了基于循环互模糊函数 (CCA) 的时延和多普勒联合估计方法^[4]. 但此种估计方法的估计性能与信号环境(噪声特性和信噪比水平等)、信号参数等的关系文献^[2~4]都未进行分析.

本文主要对上述时延估计方法的精度进行理论分析, 并在实际中广泛使用的能量辐射计(也称为广义相关估计方法)^[1, 9]的估计性能进行仿真比较. 全文组织如下: 第二部分简单讨论并给出循环估计子的数学表式, 第三部分详细推导平稳噪声条件下循环估计子的估计性能, 第四部分针对二相编码和四相编码信号在不同特性噪声背景下进行估计性能的数字仿真试验, 文章最后对全文进行总结.

2 循环时延估计方法

时延估计的信号模型可简写成下面的形式

$$x(t) = s(t) \quad (1)$$

$$y(t) = as(t - D) + n(t) \quad (2)$$

其中, $s(t)$ 为本地辐射信号, a 表示回波信号相对于发射信号的幅度衰减因子, $n(t)$ 为零均值噪声, 且与信号 $s(t)$ 是互不循环相关的; D 为回波信号相对于发射信号的时延.

作者在文献^[4]中研究并给出了基于循环互模糊函数 (CCA) 的时延) 多普勒联合估计的数学表式. 其中, 令 $f = 0$ 可以得到只对时延估计的数学表式, 如下所示

$$(u = D) = \arg \left[\max_u |C_{y,x}^A(u, 0)| \right] \quad (3)$$

其中

$$|C_{y,x}^A(u, 0)| > \left| \int_0^1 R_{y,x}^A(S) \left(R_s^A(S - u) \right)^* dS \right| \quad (4)$$

将式(1)、(2)代入到式(4)有

$$\begin{aligned} |C_{y,x}^A(u, 0)| &= \left| a e^{-jPA} \int_0^1 R_{n,s}^A(S) \left(R_s^A(S - D) \left(R_s^A(S - u) \right)^* dS \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \int_0^1 R_{n,s}^A(S) \left(R_s^A(S - u) \right)^* dS \right| \\ &> |a e^{-jPA} U_s^A(u - D) + U_s^A(u)| \quad (5) \end{aligned}$$

$$\text{其中 } U_s^\Delta(u-D) > \int_{Q_1} R_s^\Delta(S-D) \left(R_s^\Delta(S-u) \right)^* dS \quad (6)$$

$$U_s^\Delta > \int_{Q_1} R_{n,s}^\Delta(S) \left(R_s^\Delta(S-u) \right)^* dS \quad (7)$$

当 $n(t) = 0$ 时, 式(5)简化为

$$\begin{aligned} |C_{y,x}^\Delta(u,0)| &= \left| a \int_{Q_1} R_s^\Delta(S-D) \left(R_s^\Delta(S-u) \right)^* dS \right| \\ &= \left| a \int_{Q_1} |R_s^\Delta(S-D)|^2 dS \right| \\ &= \left| a \int_{Q_1} |R_s^\Delta(S)|^2 dS \right| \end{aligned} \quad (8)$$

等号成立的条件是 $u = D$, 也即当 $u = D$ 时 $|R_{y,x}^\Delta(u,0)|$ 取得最大值, 从而

$$\left[\frac{5 |C_{y,x}^\Delta(u,0)|}{5u} \right]_{u=D} = 0 \quad (9)$$

根据式(9)的结论知道, 当 $n(t)$ 不为零时 D 的估计值 \hat{D} 可通过下式得到

$$\left[\frac{5 |C_{y,x}^\Delta(u,0)|}{5u} \right]_{u=\hat{D}} = 0 \quad (10)$$

由于 $|C_{y,x}^\Delta(u,0)|^2$ 和 $|C_{y,x}^\Delta(u,0)|$ 的峰点一致, 而 $5 |C_{y,x}^\Delta(u,0)|^2 \setminus 5u$ 和 $5 |C_{y,x}^\Delta(u,0)| \setminus 5u$ 零点一致, 因此估计值 \hat{D} 还可以通过下式得到

$$\left[\frac{5 |C_{y,x}^\Delta(u,0)|^2}{5u} \right]_{u=\hat{D}} = 0 \quad (11)$$

3 时延估值精度分析

由于不可能做到无限长时间观测, 从而 $U_s^\Delta(u)$ 不恒为零, 这时 $|C_{y,x}^\Delta(u,0)|$ 的最大值与 $|U_s^\Delta(u)|$ 的最大值不再吻合, 时延估计值 \hat{D} 将偏离真值 D .

对式(5)左右两边平方得

$$\begin{aligned} |C_{y,x}^\Delta(u,0)|^2 &= |a|^2 |U_s^\Delta(u-D)|^2 \\ &+ 2\text{Re} \left[a e^{-jP\Delta} U_s^\Delta(u-D) \left(U_h^\Delta(u) \right)^* \right] + |U_h^\Delta(u)|^2 \end{aligned} \quad (12)$$

在高信杂比条件下忽略式(12)等号右边第三项的影响, 近似有

$$\begin{aligned} |C_{y,x}^\Delta(u,0)|^2 &= |a|^2 |U_s^\Delta(u-D)|^2 \\ &+ 2\text{Re} \left[a e^{-jP\Delta} U_s^\Delta(u-D) \left(U_h^\Delta(u) \right)^* \right] \end{aligned} \quad (13)$$

将式(13)代入到式(11)可得

$$\begin{aligned} |a|^2 \left[\frac{5 |U_s^\Delta(u,D)|^2}{5u} \right]_{u=\hat{D}} \\ + 2\text{Re} \left[a e^{-jP\Delta} \frac{5}{5u} \left\{ U_s^\Delta(u-D) \left(U_h^\Delta(u) \right)^* \right\} \right]_{u=\hat{D}} = 0 \end{aligned} \quad (14)$$

将式(14)两个偏导数在 $u = D$ 点按泰勒级数展开, 对第一项做一阶近似, 对第二项只取一项近似有

$$\begin{aligned} |a|^2 \left[\frac{5 |U_s^\Delta(u-D)|^2}{5u} \right]_{u=D} + |a|^2 \left[\frac{5 |U_s^\Delta(u-D)|^2}{5u} \right]_{u=D} (D-\hat{D}) \\ + |a|^2 \left[\frac{5^2 |U_s^\Delta(u-D)|^2}{5u^2} \right]_{u=D} (D-\hat{D}) \end{aligned} \quad (15)$$

$$\begin{aligned} \text{Re} \left[\frac{5}{5u} \left\{ U_s^\Delta(u-D) \left(U_h^\Delta(u) \right)^* \right\} \right]_{u=D} \\ + U \text{Re} \left[\frac{5}{5u} \left\{ U_s^\Delta(u-D) \left(U_h^\Delta(u) \right)^* \right\} \right]_{u=D} \end{aligned} \quad (16)$$

将式(9)的结果代入到式(15)得到

$$\begin{aligned} |a|^2 \left[\frac{5 |U_s^\Delta(u-D)|^2}{5u} \right]_{u=D} \\ + |a|^2 \left[\frac{5^2 |U_s^\Delta(u-D)|^2}{5u^2} \right]_{u=D} (D-\hat{D}) \end{aligned} \quad (17)$$

再将式(16)、(17)代入到式(14)可计算得到估值与真值之差为

$$(D-\hat{D}) = - \frac{2\text{Re} \left[a e^{-jP\Delta} \frac{5}{5u} \left\{ U_s^\Delta(u-D) \left(U_h^\Delta(u) \right)^* \right\} \right]_{u=D}}{|a|^2 \left[\frac{5^2 |U_s^\Delta(u-D)|^2}{5u^2} \right]_{u=D}} \quad (18)$$

下面计算估值 \hat{D} 的均值和方差以分析该估值方法的性能. 对式(18)取统计均值有

$$E[D-\hat{D}] = - \frac{2\text{Re} \left[a e^{-jP\Delta} \frac{5}{5u} \left\{ U_s^\Delta(u-D) E \left[\left(U_h^\Delta(u) \right)^* \right] \right\} \right]_{u=D}}{|a|^2 \left[\frac{5^2 |U_s^\Delta(u-D)|^2}{5u^2} \right]_{u=D}} \quad (19)$$

根据式(7)对 $U_h^\Delta(u)$ 的定义有

$$\begin{aligned} E \left[\left(U_h^\Delta(u) \right)^* \right] &= E \left[\int_{Q_1} \left(R_{n,s}^\Delta(S) \right)^* R_s^\Delta(S-u) dS \right] \\ &= \int_{Q_1} E \left[\left(R_{n,s}^\Delta(S) \right)^* \right] R_s^\Delta(S-u) dS \end{aligned} \quad (20)$$

噪声 $n(t)$ 在循环频率 A 处不存在谱相关特性, 于是有

$$E \left[\left(U_h^\Delta(u) \right)^* \right] = 0 \quad (21)$$

将式(21)结果代入到式(19)有下面的结论

$$E[D-\hat{D}] = 0 \quad (22)$$

上式说明, 估值 \hat{D} 是对真值 D 的一个无偏估计.

令 R_D^2 表示估值 \hat{D} 对真值 D 的均方误差, 即 $R_D^2 = E \left[(D-\hat{D})^2 \right]$, 则由式(18)并化简后得

$$R_D^2 = \frac{E \left\{ \left[2\text{Re} \left[a e^{-jP\Delta} \frac{5}{5u} \left\{ U_s^\Delta(u-D) \left(U_h^\Delta(u) \right)^* \right\} \right]_{u=D} \right]^2 \right\}}{\left[|a|^2 \left[\frac{5^2 |U_s^\Delta(u-D)|^2}{5u^2} \right]_{u=D} \right]^2} \quad (23)$$

上式形式较为复杂, 下面将对其简化. 由于有下式成立

$$\begin{aligned} \frac{5}{5u} \left\{ U_s^\Delta(u-D) \left(U_h^\Delta(u) \right)^* \right\} &= U_s^\Delta(u-D) \frac{5}{5u} \left\{ U_h^\Delta(u) \right\}^* \\ &+ \left(U_h^\Delta(u) \right)^* \frac{5}{5u} U_s^\Delta(u-D) \end{aligned} \quad (24)$$

于是在 $u = D$ 处的偏微分计算如下

$$\begin{aligned} \left[\frac{5}{5u} \left\{ U_s^\Delta(u-D) \left(U_h^\Delta(u) \right)^* \right\} \right]_{u=D} &= U_s^\Delta(0) \left[\frac{5}{5u} \left\{ U_h^\Delta(u) \right\}^* \right]_{u=D} \\ + \left(U_h^\Delta(D) \right)^* \left[\frac{5}{5u} U_s^\Delta(u-D) \right]_{u=D} &= U_s^\Delta(0) \left[\frac{5}{5u} \left\{ \left(U_h^\Delta(u) \right)^* \right\} \right]_{u=D} \end{aligned} \quad (25)$$

其中, $U_s^\Delta(0)$ 为循环相关函数 $R_s^\Delta(S)$ 的能量, 如下式所示

$$\begin{aligned} U_s^\Delta(0) &= \int_{Q_1} |R_s^\Delta(S-D)|^2 dS = \int_{Q_1} |R_s^\Delta(S)|^2 dS \\ &= \int_{Q_1} |S_s^\Delta(f)|^2 df \end{aligned} \quad (26)$$

由于

$$2\text{Re}\left\{ a e^{-jP\Delta D} \left[\frac{5}{5u} \left\{ U_s^\Delta(u-D) \left(U_h^\Delta(u) \right)^* \right\} \right]_{u=D} \right\} \\ = a U_s^\Delta(0) \left[e^{-jP\Delta D} \frac{5}{5u} \left\{ U_h^\Delta(u) \right\}^* + e^{jP\Delta D} \frac{5}{5u} U_h^\Delta(u) \right]_{u=D} \quad (27)$$

从而

$$E \left[\left[2\text{Re} \left\{ a e^{-jP\Delta D} \left[\frac{5}{5u} \left\{ U_s^\Delta(u-D) \left(U_h^\Delta(u) \right)^* \right\} \right]_{u=D} \right\} \right]^2 \right] \\ = \left[a U_s^\Delta(0) \right]^2 \left\{ 2E \left[\text{Re} \left[a e^{-jP\Delta D} \frac{5}{5u} U_h^\Delta(u) \right]^2 \right] \right. \\ \left. + 2E \left[\left| \frac{5}{5u} U_h^\Delta(u) \right|^2 \right]_{u=D} \right\} \\ U^2 \left[a U_s^\Delta(0) \right]^2 E \left[\left| \frac{5}{5u} U_h^\Delta(u) \right|^2 \right]_{u=D} \quad (28)$$

当满足下面两个条件时式(28)成立: 第一要求 $R_{n,s}^\Delta(S)$ 是白噪声, 第二 $E \left[\left(R_{n,s}^\Delta(S) \right)^2 \right] = 0$. 对于第一个条件在文献[5]、[6]中已经证明: 当 $n(t)$ 是零均值白噪声时, $R_{n,s}^\Delta(S)$ 仍是一零均值平稳噪声, 且在观测时间足够长时 $R_{n,s}^\Delta(S)$ 可近似为一白噪声. 下面来证明第二个条件也是成立的.

设白噪声复包络 $n(t)$ 由实部 $n_1(t)$ 和虚部 $n_2(t)$ 组成, 且

$$E \left[\left| \frac{5}{5u} U_h^\Delta(u) \right|^2 \right]_{u=D} = E \left[\int_0^1 Q_1 R_s^\Delta(S) \frac{5}{5u} \left(R_s^\Delta(S-u) \right)^* dS \int_0^1 \left(R_{n,s}^\Delta(S) \right)^* \frac{5}{5u} R_s^\Delta(S-u) dS \right]_{u=D} \\ = E \left[\int_0^1 \int_0^1 Q_1 Q_1 R_{n,s}^\Delta(S_1) \left(R_{n,s}^\Delta(S_2) \right)^* \frac{5}{5u} \left(R_s^\Delta(S_1-u) \right)^* \frac{5}{5u} R_s^\Delta(S_2-u) dS_1 dS_2 \right]_{u=D} \\ = \left\{ \int_0^1 \int_0^1 E \left[R_{n,s}^\Delta(S_1) \left(R_{n,s}^\Delta(S_2) \right)^* \right] \frac{5}{5u} \left(R_s^\Delta(S_1-u) \right)^* \frac{5}{5u} R_s^\Delta(S_2-u) dS_1 dS_2 \right\}_{u=D} \quad (33)$$

上面已经分析指出, 在一定条件下 $R_{n,s}^\Delta(S)$ 近似为一白噪声. 因此, 式(33)可近似写成下面的形式

$$E \left[\left| \frac{5}{5u} U_h^\Delta(u) \right|^2 \right]_{u=D} U \left\{ K \int_0^1 \int_0^1 Q_1 Q_1 D(S_1-S_2) \right. \\ \left. \# \frac{5}{5u} \left(R_s^\Delta(S_1-u) \right)^* \frac{5}{5u} R_s^\Delta(S_2-u) dS_1 dS_2 \right\}_{u=D} \\ = K \left\{ \int_0^1 \int_0^1 \left| \frac{5}{5u} R_s^\Delta(S-u) \right|^2 dS \right\}_{u=D} \quad (34)$$

其中, $K(> 0)$ 为 $R_{n,s}^\Delta(S)$ 近似白噪声时的功率谱密度^[6]. 由于

$$\frac{5}{5u} R_s^\Delta(S-u) = - \left[R_s^\Delta(S-u) \right] \quad (35)$$

$$\left[R_s^\Delta(S-u) \right] = \int_0^1 j 2P f S_s^\Delta(f) e^{j2P f (S-u)} df \quad (36)$$

因此, 式(34)还可写成下面的形式

$$E \left[\left| \frac{5}{5u} U_h^\Delta(u) \right|^2 \right]_{u=D} U K \int_0^1 \int_0^1 m 4P^2 f_1 f_2 S_s^\Delta(f_1) \\ \# \left[S_s^\Delta(f_2) \right]^* e^{j2P f (S-u)(f_1-f_2)} df_1 df_2 dS \\ = K \int_0^1 \int_0^1 4P^2 f_1 f_2 S_s^\Delta(f_1) \left[S_s^\Delta(f_2) \right]^* \\ \# e^{-j2P u(f_1-f_2)} D(f_1-f_2) df_1 df_2 \\ = 4P^2 K \int_0^1 f^2 \left| S_s^\Delta(f) \right|^2 df \quad (37)$$

将式(37)代入到式(28)可得

$$E \left[\left[2\text{Re} \left\{ a e^{-jP\Delta D} \left[\frac{5}{5u} \left\{ U_s^\Delta(u) \left(U_h^\Delta(u) \right)^* \right\} \right]_{u=D} \right\} \right]^2 \right]$$

实部 $n_1(t)$ 与虚部 $n_2(t)$ 是零均值独立同分布的, 即

$$E \left[n_1(t) \right] = E \left[n_2(t) \right] = E \left[n_1(t) n_2(t) \right] = 0 \quad (29)$$

$$E \left[n_1^2(t) \right] = E \left[n_2^2(t) \right] = E \left[|n(t)|^2 \right] / 2 \quad (30)$$

于是有

$$E \left[n^2(t) \right] = E \left[\left(n_1(t) + j^* n_2(t) \right)^2 \right] \\ = E \left[\left(n_1^2(t) \right) - E \left[n_2^2(t) \right] + 2j^* E \left[n_1(t) n_2(t) \right] \right] \\ = 0 \quad (31)$$

上式说明第二个条件也是满足的. 于是

$$E \left[\left[e^{-jP\Delta D} \frac{5}{5u} U_h^\Delta(u) \right]^2 \right] \\ = E \# \left[\int_0^1 \int_0^1 K_{n,s}^\Delta(S_1) R_{n,s}^\Delta(S_2) \left(R_s^\Delta(S_1-u) \right)^* \left(R_s^\Delta(S_2-u) \right)^* dS_1 dS_2 \right] \\ = \int_0^1 \int_0^1 E \left[R_{n,s}^\Delta(S_1) R_{n,s}^\Delta(S_2) \right] \left(R_s^\Delta(S_1-u) \right)^* \left(R_s^\Delta(S_2-u) \right)^* dS_1 dS_2 \quad (32)$$

因此, 在足够观测时间长度的前提下, 式(28)确实是近似成立的.

下面计算 $E \left[\left| \frac{5}{5u} U_h^\Delta(u) \right|^2 \right]_{u=D}$ 的值. 由式(7)可知

$$U 8K \left[P a U_s^\Delta(0) \right]^2 \int_0^1 f^2 \left| S_s^\Delta(f) \right|^2 df \quad (38)$$

上面已经对式(23)右边分子进行了简化, 下面对分母进行化简. 由式(6)可知

$$\left| U_s^\Delta(u-D) \right|^2 = \int_0^1 \int_0^1 R_s^\Delta(S_1-D) R_s^\Delta(S_2-u) \\ \# \left[R_s^\Delta(S_1-u) \right]^* \left[R_s^\Delta(S_2-D) \right]^* dS_1 dS_2 \quad (39)$$

因此

$$\frac{5^2}{5u^2} \left| U_s^\Delta(u-D) \right|^2 = \int_0^1 \int_0^1 R_s^\Delta(S_1-D) \left(R_s^\Delta(S_2-D) \right)^* \\ \# \frac{5^2}{5u^2} \left[R_s^\Delta(S_2-u) \left(R_s^\Delta(S_1-u) \right)^* \right] dS_1 dS_2 \quad (40)$$

而

$$\frac{5}{5u} \left[R_s^\Delta(S_2-u) \left(R_s^\Delta(S_1-u) \right)^* \right] = \left(R_s^\Delta(S_1-u) \right)^* \\ \# \frac{5}{5u} R_s^\Delta(S_2-u) + R_s^\Delta(S_2-u) \frac{5}{5u} \left(R_s^\Delta(S_1-u) \right)^* \quad (41)$$

进而

$$\frac{5^2}{5u^2} \left[R_s^\Delta(S_2-u) \left(R_s^\Delta(S_1-u) \right)^* \right] = \left(R_s^\Delta(S_1-u) \right)^* \\ \# \frac{5^2}{5u^2} R_s^\Delta(S_2-u) + R_s^\Delta(S_2-u) \frac{5^2}{5u^2} \left(R_s^\Delta(S_1-u) \right)^* \\ + 2 \frac{5}{5u} \left(R_s^\Delta(S_1-u) \right)^* \frac{5}{5u} R_s^\Delta(S_2-u) \quad (42)$$

又因为

$$\begin{aligned}
 & \left\{ \mathbf{k}_{(-1,1)} R_s^\Delta(S_1 - D) \left(R_s^\Delta(S_2 - D) \right)^* \frac{5}{5u} \left(R_s^\Delta(S_1 - u) \right)^* \frac{5}{5u} R_s^\Delta(S_2 - D) dS_2 dS_1 \right\}_{u=D} \\
 &= \left\{ \mathbf{k}_{(-1,1)} R_s^\Delta(S_1 - D) \left(R_s^\Delta(S_2 - D) \right)^* \mathbf{k}_{(-1,1)} 4P^2 f_1 f_2 S_s^\Delta(f_2) \left(S_s^\Delta(f_1) \right)^* e^{-j2P f_1 (S_1 - u)} e^{-j2P f_2 (S_2 - u)} df_1 df_2 dS_2 dS_1 \right\}_{u=D} \\
 &= 4P^2 \mathbf{k}_{(-1,1)} f_1 f_2 |S_s^\Delta(f_2)|^2 |S_s^\Delta(f_1)|^2 df_1 df_2 \\
 &= 4P^2 \left| \mathbf{Q}_{(-1,1)} f |S_s^\Delta(f)|^2 df \right|^2 \tag{43}
 \end{aligned}$$

并且

$$\begin{aligned}
 & \left\{ \mathbf{k}_{(-1,1)} R_s^\Delta(S_1 - D) \left(R_s^\Delta(S_2 - D) \right)^* \left(R_s^\Delta(S_1 - u) \right)^* \frac{5^2}{5u^2} R_s^\Delta(S_2 - u) dS_2 dS_1 \right\}_{u=D} \\
 &= \mathbf{Q}_{(-1,1)} |R_s^\Delta(S_1 - D)|^2 dS_1 \left\{ \mathbf{Q}_{(-1,1)} \left(R_s^\Delta(S_2 - D) \right)^* \frac{5^2}{5u^2} R_s^\Delta(S_2 - u) dS_2 \right\}_{u=D} \\
 &= -U_s^\Delta(0) \left\{ \mathbf{k}_{(-1,1)} \left(S_s^\Delta(f_1) \right)^* e^{-j2P f_1 (S_2 - D)} df \mathbf{Q}_{(-1,1)} 4P^2 f_2^2 S_s^\Delta(f_2) e^{-j2P f_2 (S_2 - u)} df_2 dS_2 \right\}_{u=D} \\
 &= -4P^2 U_s^\Delta(0) \mathbf{m}_{(-1,1)} f_2^2 \left(S_s^\Delta(f_1) \right)^* S_s^\Delta(f_2) e^{-j2P(f_2 - f_1)(S_2 - D)} df_1 df_2 dS_2 \\
 &= -4P^2 U_s^\Delta(0) \mathbf{Q}_{(-1,1)} f^2 |S_s^\Delta(f)|^2 df \tag{44}
 \end{aligned}$$

同理

$$\begin{aligned}
 & \left\{ \mathbf{k}_{(-1,1)} R_s^\Delta(S_1 - D) \left(R_s^\Delta(S_2 - D) \right)^* R_s^\Delta(S_2 - u) \frac{5^2}{5u^2} \left(R_s^\Delta(S_2 - u) \right)^* dS_2 dS_1 \right\}_{u=D} \\
 &= -4P^2 U_s^\Delta(0) \mathbf{Q}_{(-1,1)} f^2 |S_s^\Delta(f)|^2 df \tag{45}
 \end{aligned}$$

根据式(43)~(45)推导结果可得

$$\begin{aligned}
 & \left[a^2 \left(\frac{5^2}{5u^2} |U_s^\Delta(u - D)|^2 \right)_{u=D} \right]^2 = 64P^4 a^4 \\
 & \# \left[U_s^\Delta(0) \mathbf{Q}_{(-1,1)} f^2 |S_s^\Delta(f)|^2 df - \mathbf{Q}_{(-1,1)} f |S_s^\Delta(f)|^2 df \right]^2 \tag{46}
 \end{aligned}$$

将式(38)、(46)结果代入到式(23)有

$$\begin{aligned}
 & \frac{K [U_s^\Delta(0)] \mathbf{Q}_{(-1,1)} f^2 |S_s^\Delta(f)|^2 df}{8P^2 a^2 \left[U_s^\Delta(0) \mathbf{Q}_{(-1,1)} f^2 |S_s^\Delta(f)|^2 df - \left| \mathbf{Q}_{(-1,1)} f |S_s^\Delta(f)|^2 df \right|^2 \right]^2} \tag{47}
 \end{aligned}$$

令 f 表示频谱 $|S_s^\Delta(f)|^2$ 的一阶原点矩, B_A^2 为频谱 $|S_s^\Delta(f)|^2$ 的二阶中心矩, 且

$$f > \frac{\mathbf{Q}_{(-1,1)} f |S_s^\Delta(f)|^2 df}{\mathbf{Q}_{(-1,1)} |S_s^\Delta(f)|^2 df} = \frac{\mathbf{Q}_{(-1,1)} f |S_s^\Delta(f)|^2 df}{U_s^\Delta(0)} \tag{48}$$

$$B_A^2 > \frac{\mathbf{Q}_{(-1,1)} (f - f)^2 |S_s^\Delta(f)|^2 df}{\mathbf{Q}_{(-1,1)} |S_s^\Delta(f)|^2 df} = \frac{\mathbf{Q}_{(-1,1)} (f - f)^2 |S_s^\Delta(f)|^2 df}{U_s^\Delta(0)} \tag{49}$$

通常满足 $f = 0$, 于是

$$B_A^2 U \frac{\mathbf{Q}_{(-1,1)} f^2 |S_s^\Delta(f)|^2 df}{U_s^\Delta(0)} \tag{50}$$

将式(50)代入式(47)有

$$R_D^2 U \frac{K}{8P^2 a^2 B_A^2 U_s^\Delta(0)} \tag{51}$$

设白噪声的功率谱密度为 $N_0/2$, 则根据文献[5, 6]的讨论结果有

$$K = S_{st}^0(f + A/2) G_n(f - A/2) / T \mu kN_0 / 2T \tag{52}$$

将式(52)结果代入式(51)有

$$R_D^2 U \frac{K}{8TP^2(a^2/N_0) B_A^2 U_s^\Delta(0)} \tag{53}$$

令

$$SNR_{out} > \frac{Ta^2 U_s^\Delta(0)}{kN_0/2} \tag{54}$$

$$B_A > 2P B_A \tag{55}$$

则由文献[5]的讨论知道, SNR_{out} 就是循环相关匹配滤波器最大输出信噪比。于是, 式(53)可表示为

$$R_D^2 U \frac{1}{2B_A^2 @SNR_{out}} \tag{56}$$

或者

$$R_D U \frac{1}{B_A \sqrt{2SNR_{out}}} \tag{57}$$

式(57)表明, 基于循环相关估计的时延估值均方根误差与最大输出信噪比和均方根带宽成反比。在形式上, 该估值均方根误差与最大似然估计得到的时延理论估值精度^[10]是一致的, 不同的是各参量的物理意义不一样。

4 仿真分析及讨论

下面以二相编码和四相编码信号为例对慢变化时变噪声背景下循环估计子的估计性能进行仿真分析, 并与实际中经

常使用的能量辐射计 (Radiometer)^[1,9] 的估计性能进行比较。

二相编码和四相编码都是循环平稳信号^[1], 且循环频率为 $2f_0/k/T_c$ 和 $2f_0/k/T_c$ 。其中, f_0 为信号载频, T_c 为编码信号码元宽度。仿真中信号采样间隔 $T_s = 107s$, 信号载频为 $1/(5T_s) = 2MHz$; 积累时间长度为 $M = 32768T_s$, 谱分析 FFT 计算点数 N 为 512, 从而有 $M/N = 64m1$, 满足文献[1]提出的高精度谱分析要求。试验中 Monte Carlo 仿真次数为 10000。

仿真产生的慢变化时变噪声采用文献[9]提出的时变噪声模型。该慢变化时变噪声仍是高斯噪声, 其方差是高斯变量的平方, 在一次单独实验中噪声仍是平稳高斯白噪声。用 R_N 表示时变高斯噪声的方差, 且该方差的均值为 $u_N = E[R_N]$, 衡量时变噪声变化快慢的方差偏移系数为 Q_N , 定义为 $Q_N = \sqrt{E[R_N^2] - u_N^2} / u_N$, 在该试验中高斯噪声的方差偏移系数 Q_N 取为 0.1。以下仿真结果中横坐标为信噪比, 单位 dB, 纵坐标为归一化估计均方误差, 归一化值为 T_s 。

图 1 给出了四相编码信号不同码元宽度时循环估计子和传统能量辐射计估计性能仿真结果, 其中循环频率选择为单倍码速率 $1/T_c$ 和双倍码速率 $2/T_c$ 。图 1 显示, 随着码元宽度的增加, 循环估计子和能量辐射计的估计性能都变差, 同时循环估计子与能量辐射计的性能差异也越来越明显。这说明: 降低码元宽度有利于提高估计精度, 而在码元宽度固定的情况下, 循环估计子估计性能要优于能量辐射计, 并且随着码元宽度的增加这种优势越来越明显。降低码元宽度能使信号的谱相关特性更加明显, 因此能提高估计精度。

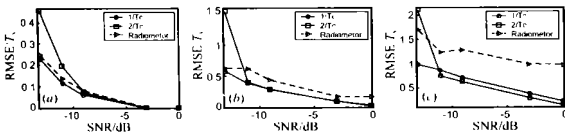


图 1 四相编码信号在不同码元宽度条件下循环估计子与能量辐射计估计性能比较: (a) 码元宽度 $T_c = 16T_s$; (b) 码元宽度 $T_c = 32T_s$; (c) 码元宽度 $T_c = 64T_s$ 。

图 2 给出了平稳噪声背景下循环估计子和能量辐射计的理论精度与仿真精度的比较。由仿真结果可见, 在高信噪比时 ($SNR > -5dB$), 仿真精度与理论精度比较接近; 随着信噪比的降低, 理论计算精度与仿真精度相差越来越远。这主要是因为低信噪比时推导精度分析的假设前提条件(假设信噪比足够高, 因此忽略了噪声高阶项)已不满足, 根据式(57)计算估值理论精度会产生较大的误差。

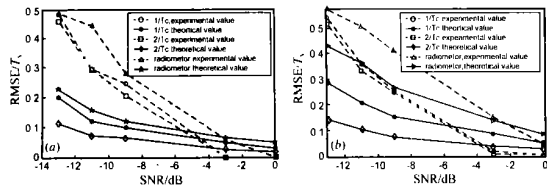


图 2 码元宽度 $T_c = 32T_s$, 估值理论精度与试验精度比较; 虚线为仿真精度, 实线为理论计算精度: (a) 二相编码信号; (b) 四相编码信号

图 3 给出了在平稳噪声 (stationary noise) 和时变噪声 (time

variant noise) 两种噪声模型下两种不同时延估计方法的精度变化趋势。由仿真结果可见, 两种估计子随着噪声特性的改变, 性能都会有所改变, 但这种改变并不是十分明显。这说明上述两种时延估计子都具有较好的适应不同噪声特性的能力。

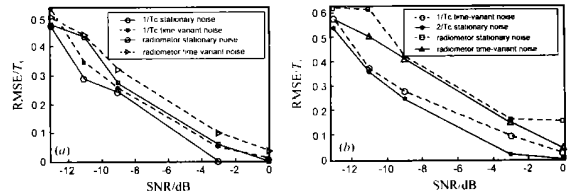


图 3 码元宽度 $T_c = 32T_s$, 比较平稳噪声背景和时变噪声背景下循环估计子和能量辐射计的估计性能; 虚线为时变噪声背景时的仿真精度, 实线为平稳噪声背景时的仿真精度: (a) 二相编码信号; (b) 四相编码信号

图 4 给出了在平稳噪声和时变噪声两种噪声模型下循环估计子对二相编码和四相编码的估计精度比较。仿真结果显示, 在不同循环频率处循环估计子对二相编码和四相编码的估计性能基本上是一致的。这说明在码速率相同的情况下, 估计精度与编码信号样式是无关的。这给编码信号的截获提供了方便。

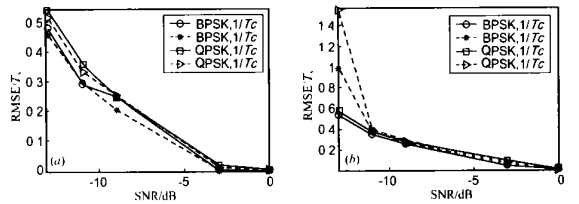


图 4 不同噪声背景下二相编码和四相编码估计性能比较, 码元宽度 $T_c = 32T_s$; (a) 平稳噪声背景; (b) 时变噪声背景

5 总结

针对文献[1,4]研究的利用信号循环平稳性进行信号时延估计的方法, 文章详细分析了在平稳噪声假设前提下这种循环估计子的估计性能, 首次推导得到了估计精度的数学解析表式。在高斯白噪声和慢变化时变高斯白噪声两种噪声模型下对二相编码和四相编码的仿真试验表明, 循环估计子的估计性能确实要优于能量辐射计, 并且循环估计子的估计性能与编码信号样式是无关的, 而与编码信号码元宽度存在着密切的关系。码元宽度越大循环估计子的估计性能越差, 而对能量辐射计的性能优势却越明显。同时, 仿真结果还说明上述两种时延估计算法都能较好地适应不同特性的噪声。

参考文献:

[1] W A Gardner. Exploitation of spectral redundancy in Cyclostationary signals[J]. IEEE ASSP Magazine, 1991, 8(4): 14- 36.
[2] W A Gardner, QK Chen. Signal-selective time-difference-of-arrival estimation for passive location of man-made signal sources in highly co2ruptive environments, Part 2: Theory and method[J]. IEEE Trans Signal Processing, 1992, 40(5): 1168- 1184.

- [3] W A Gardner, C K, Chen. Signal selective time difference of arrival estimation for passive location of manmade signal sources in highly corruptive environments, Part 0: Algorithms and performance [J]. IEEE Trans Signal Processing 1992, 40(5): 1185- 1197.
- [4] Zhitao HUANG, Yiyu ZHOU, Wenli JIANG, Qizhong LU. Joint estimation of Doppler and time difference of arrival exploiting cyclostationary property [J]. IEE Pro Radar Sonar Navig 2002, 149(4): 161- 165.
- [5] 黄知涛, 周一宇, 姜文利. 循环相关匹配滤波器设计 [J]. 电子学报, 2002, 30(12): 122- 126.
- [6] Zhitao HUANG, Weihua WANG, Yiyu ZHOU, Wenli JIANG. Asymptotic analysis of estimated cyclic cross correlation function between stationary and cyclostationary processes [J]. Journal of Systems Engineering and Electronics, 2003, 14(3): 87- 91.
- [7] 黄知涛, 周一宇, 姜文利. 基于循环平稳特性的源信号到达角估计方法 [J]. 电子学报, 2002, 30(3): 372- 375.
- [8] 黄知涛, 姜文利, 卢启中, 周一宇. 基于调频广播信号的动目标时差提取方法 [J]. 电子学报, 2001, 29(12): 1597- 1600.
- [9] W A Gardner, C M Spooner. Signal interception: Performance advantages of cyclofeature detectors [J]. IEEE Transactions on Communications, 1992, 40(1): 149- 159.
- [10] 丁鹭飞, 张平. 雷达系统 [M]. 西北电讯工程学院出版社, 1984.

作者简介:



黄知涛 男, 1976 年 9 月生于湖北荆州, 博士研究生, 已发表论文 20 余篇, 研究方向为: 循环平稳信号处理理论、雷达信号处理、雷达数据处理及无源探测、定位理论与技术等。

周一宇 男, 1948 年 10 月生于上海, 博士, 教授, 博士生导师, 电子学会电子对抗分会委员, 航空学会电子分会雷达与制导专业委员会委员, 出版专著两部, 发表论文 60 余篇, 重点研究方向: 综合电子战系统理论、无源定位理论与技术、雷达数据处理、电子信息系统仿真等。



姜文利 男, 1967 年 10 月生于山东烟台, 博士, 副教授, 已发表论文 30 余篇, 研究方向为: 信号处理、综合电子战等。