

关于 CBP 算法的一种新型滤波函数和它的性质

范惠荣¹,徐茂林¹,邱 钧¹,张兆田²,李兴东³

(1. 北京信息工程学院应用数学研究室,北京 100101;2. 国家自然科学基金委员会信息科学部,北京 100085;
3. 中国计量科学研究院,北京 100013)

摘 要: 用卷积反投影(CBP)算法作 CT 重建,滤波函数是关键.本文建议一种新型滤波函数,给出了用它作 CT 重建的误差估计,分析了该滤波函数的时频特性,并用来作局部重建.模拟和实测数据的数字实验表明其在保证空间分辨率的同时能较好地克服 Gibbs 效应.

关键词: 卷积反投影(CBP)算法;新滤波函数;误差分析;时频特性;局部重建

中图分类号: TP391.41 **文献标识码:** A **文章编号:** 0372-2112(2004)02-0232-04

A New Filter Function in CBP and Its Properties

FAN Hui-rong¹,XU Mao-lin¹,QIU Jun¹,ZHANG Zhao-tian²,LI Xing-dong³

(1. Beijing Information Technology Institute, Beijing 100101, China;
2. Department of Information Science, NSFC, Beijing 100085, China;
3. National Institute of Metrology, Beijing 100013, China)

Abstract: Filter function is the key point of CT convolution backprojection. This paper suggests a new filter function and gives the estimates of CBP, and the analysis of the time-frequency character. By the filter, Local tomography is implemented. The reconstruction results of simulation and experimental projection data show that this filter can improve Gibbs effects without decreasing the resolution of the images.

Key words: convolution backprojection algorithm (CBP); new filter; error estimation; time-frequency character; local tomography

1 引言

二维 CT 重建中的卷积反投影(CBP)算法应用十分广泛.用 CBP 算法重建目标函数,滤波函数是关键.常用的滤波函数如 R. L(矩形)滤波函数、S. L(Shepp-Logan)滤波函数以及 Hamming 滤波函数等,各有其优缺点.例如,R. L 滤波函数空间分辨率较高但 Gibbs 现象较严重,因而降低了密度分辨率.本文所建议的滤波函数能够在保证空间分辨率的同时,减小 Gibbs 效应,在提高空间分辨率和密度分辨率之间取到了一个较好的折衷,其性质特别有利于局部重建.

2 卷积反投影算法及新滤波函数

设重建目标函数 $f(x, y)$ 在 R^2 上具有有限支集,记 $D = \text{supp } f$, f 的 Radon 变换记为 f :

$$f(p, \phi) = \int_L f(x, y) dl \quad (1)$$

式中 L 表示经过 D 的任意一条直线,参数方程为

$$x \cos \phi + y \sin \phi = p \quad (2)$$

式(2)中各参数代表的含义如图1所示, dl 是线元.

公式(1)的左边,即目标函数的投影,CT重建就由这些投影值重构目标函数,重建公式^[1,2]为:

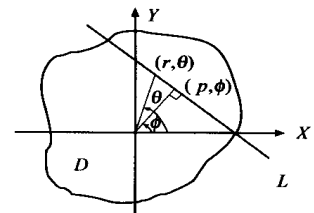


图1 Radon 变换参数示意图

$$f(r, \theta) = \int_0^+ f(p, \phi) q(p - r) dp d\phi \quad (3)$$

$$p = r \cos(\theta - \phi) \quad (4)$$

(r, θ) 为 (x, y) 的极坐标,为简化起见,对于不同坐标系目标函数用同一个符号 f 表示, R 为 Fourier 频率.式(3)是理想的,

但其中式(4)对 R 的积分是发散的,实际数值计算通常用适当的滤波函数:

$$H(R) = |R| W(R)$$

代替 $|R|$, 其中 $W(R)$ 是窗函数.

本文建议一种窗函数:

$$W(R) = \begin{cases} \frac{0A^2}{A^2 - R^2} e^{-A^2/(A^2 - R^2)}, & |R| \leq A \\ 0, & |R| > A \end{cases} \quad (5)$$

式中 0 是归一化常数. 新滤波函数定义为:

$$H(R) = \begin{cases} \frac{0A^2|R|}{A^2 - R^2} e^{-A^2/(A^2 - R^2)}, & |R| \leq A \\ 0, & |R| > A \end{cases} \quad (6)$$

$W(R)$ 非负, 关于 R 对称. 不难证明, $W(R)$ 属于 C_0 , 即是支集有限且无穷次可微的函数. $H(R)$ 是支集有限、除零点外无穷次可微的函数.

3 误差估计

当式(4)中的 $|R|$ 被滤波函数 $H(R)$ 代替时, 式(3)表示的是 $f(r, \cdot)$ 的近似值, 记作 $\tilde{f}(r, \cdot)$. 在这一段中, 我们将对二者之间的差值作出估计.

记式(5)表示的窗函数 $W(R)$ 的二维 Fourier 逆变换为

$$K(x, y) = \int \int W(R) e^{i2(x \cdot X + y \cdot Y)} dXdY$$

式中

$$R = \sqrt{X^2 + Y^2}$$

取 $0 = e$, 并选择适当的 A 使 $K(x, y)$ 满足归一化条件:

$$\int \int K(x, y) dx dy = 1$$

于是, 对相当广泛的目标函数, 卷积反投影有如下误差估计^[5-7]:

$$E(r, \cdot) = \tilde{f}(r, \cdot) - f(r, \cdot) = -\frac{1}{4} \frac{1}{A_1^2} \nabla^2 f \cdot W(0) + O\left(\frac{1}{A_1^3}\right) \quad (7)$$

其中 $A_1 > 1$ 是一个与窗宽及采样频率有关的常数. 从误差公式(7)看出, 对于确定的目标函数和固定的数据采集方式, 即 $\nabla^2 f$ 和窗宽确定, 那么卷积反投影算法的误差就主要取决于窗函数在零点的二阶导数值. 本文建议的新窗函数(5)对频率 R 的二阶导数是:

$$W''(R) = \frac{4A^6 e^{-A^2/(A^2 - R^2)} R^2}{(A^2 - R^2)^5} - \frac{16A^4 e^{-A^2/(A^2 - R^2)} R^2}{(A^2 - R^2)^4} - \frac{2A^4 e^{-A^2/(A^2 - R^2)}}{(A^2 - R^2)^3} + \frac{8A^6 e^{-A^2/(A^2 - R^2)} R^2}{(A^2 - R^2)^3} + \frac{2A^4 e^{-A^2/(A^2 - R^2)}}{(A^2 - R^2)^2}$$

因此, $W(0) = 0$. 于是由式(7): 采用新滤波函数做卷积反投影重建时, 对于任何目标函数, 算法本身产生的误差是高阶小量 $O\left(\frac{1}{A_1^3}\right)$.

4 特性分析

以下我们把新滤波函数与几个常用的滤波函数如: $R-L$ 滤波函数、 $S-L$ 滤波函数以及 Hamming 滤波函数作时频特性比较和分析, 并利用新滤波函数远处旁瓣的衰减特性给出局部重建的原理.

4.1 频域特性

在同一坐标系内将

四个滤波函数的频域特性曲线作图如图 2, 其中标记 1 至 4 分别为 $R-L$ 滤波函数、 $S-L$ 滤波函数、Hamming 滤波函数以及新滤波函数的频域特性曲线.

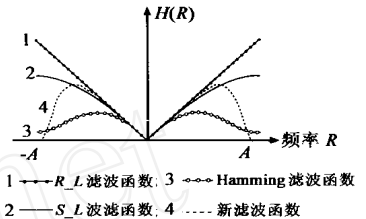


图 2 滤波函数频域特性比较

理论上已知式(5)表示的 $H(R)$ 在边界上是光滑的, 在上图也看到, 新滤波函数在边界上光滑地趋近于零, 因此会消除由于突然截断而导致的 Gibbs 扰动.

4.2 时域特性

以下为滤波函数经 Fourier 逆变换后的时域特性曲线图, 图中横坐标表示式(4)中的 p , 纵坐标表示滤波函数经 Fourier 逆变换后 $q(p)$ 的数值:

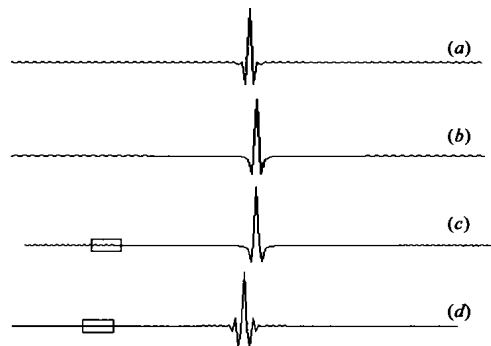


图 3 (a) $R-L$ 滤波函数; (b) $S-L$ 滤波函数; (c) Hamming 滤波函数; (d) 新滤波函数

下表给出了上述滤波函数经 Fourier 逆变换后时域曲线图所示的主瓣、旁瓣的宽度及幅值.

表 1 主瓣和旁瓣的幅值和宽度

滤波函数	主瓣幅值	主瓣宽	第一旁瓣幅值	第一旁瓣宽
新滤波函数	0.149	1.997	-0.015	0.301
$R-L$ 滤波函数	0.25	1.559	-0.082	0.329
Hamming 滤波函数	0.088	2.058	-0.027	0.758
$S-L$ 滤波函数	0.202	1.656	-0.059	0.273

滤波函数对重建误差的影响主要有以下三个因素: 主瓣, 临近旁瓣及远处旁瓣^[3,4]. 主瓣越高越窄, 空间分辨率越好; 旁瓣越小, 数值精度越高, 通常密度分辨率就越好. 从时域特

性图中可以看出,新滤波函数的主瓣高而窄,尤其是远处旁瓣几乎为零,能够在保证空间分辨率的同时,相对地提高密度分辨率.图 3(c)及图 3(d)中矩形框标出的部分表明,新滤波函数远处旁瓣的抖动较 Hamming 滤波函数更小.由此可见,新滤波函数远处旁瓣具有良好的衰减性.根据公式(3)采用常用的滤波函数实现卷积反投影算法时,若离散采样点选取不当,则由于远处旁瓣的存在,将会影响空间分辨率和密度分辨率,给重建结果带来误差.新滤波函数减小了这种误差,这一性质很有利于作局部重建.

4.3 局部重建

卷积反投影公式(3)表明,若要重建区域 D 内任意一点 (r, θ) 的目标函数值,理论上,需用到每一角度 ϕ 和每一方位 p 下的所有 Radon 投影值 $f(p, \phi)$. 实际上,如果我们仅仅是对被重建物体内部某一区域的情况较感兴趣,就不必要(有时也不可能)用全部数据.局部重建是近来国内外较为关注的课题,用拟微分算子、小波分析等方法也得到一些结果^[8],本文在下面建议的方法则完全不同,且十分简便,直接利用卷积反投影成像公式,用新滤波函数的特性,确定所需部分数据的范围,完成局部重建,所需时间相应减少.

具体地说,对任一感兴趣的局部区域 $D \subset D'$,为表述简单,我们不妨取 D' 为圆形区域,其半径为 R ,圆心为 $O(x, y)$. 设 $B(O, R + \tau)$ 是一与 D 同心的圆盘,半径为 $R + \tau$,为新滤波函数主瓣和不为零旁瓣宽度总和的一半,则只用穿过区域 $B(O, R + \tau)$ 的直线的 Radon 数据(图 4),就可以重建出 D 内任意一点 (r, θ) 的值.

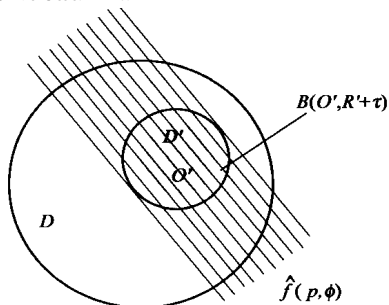


图 4 局部重建数据范围示意图

5 数字实验

用新滤波函数及常用滤波函数对模拟数据作 CBP 全局重建,并用新滤波函数对模拟和实测数据作局部重建,结果如下所述.

5.1 全局重建实验结果

图 5 是仿真图和用新滤波函数重建的图像,数值评价用新滤波函数和常用滤波函数重建的图像.取三种评价函数^[11]:归一化均方根距离测量值 d 、归一化平均绝对距离测量值 r 及最坏情况距离测量值 e ,表达式分别为:

$$d = \left[\frac{\sum_{j=1}^M \sum_{i=1}^N (f_{ij} - \tilde{f}_{ij})^2}{\sum_{j=1}^M \sum_{i=1}^N (f_{ij} - \bar{f})^2} \right]^{1/2}$$

$$r = \frac{\sum_{j=1}^M \sum_{i=1}^N |f_{ij} - \tilde{f}_{ij}|}{\sum_{j=1}^M \sum_{i=1}^N |f_{ij}|}$$

$$e = \max_{0 \leq i, j \leq N/2} |T_{ij} - R_{ij}|$$

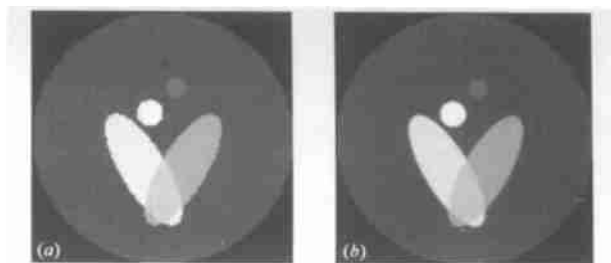


图 5 (a) 仿真图像; (b) 采用新滤波函数重建图像

式中

$$T_{ij} = \frac{1}{4} (f_{2i,2j} + f_{2i+1,2j} + f_{2i,2j+1} + f_{2i+1,2j+1})$$

$$R_{ij} = \frac{1}{4} (\tilde{f}_{2i,2j} + \tilde{f}_{2i+1,2j} + \tilde{f}_{2i,2j+1} + \tilde{f}_{2i+1,2j+1})$$

上述表达式中 f_{ij} 和 \tilde{f}_{ij} 分别表示仿真图像和重建图像的第 i 行第 j 列像素的密度,即代表目标函数的精确值和重建值, \bar{f} 表示仿真图像的平均密度,即目标函数的平均值.对采用不同滤波函数得到的重建图像,分别计算以上三种距离测量值,结果列表,如表 2 所示.

表 2 图 5 所示重建结果的图像距离测量值

评价函数	d	r	e
滤波函数			
新滤波函数	0.081	0.0137	0.120
R-L 滤波函数	0.079	0.0156	0.130
S-L 滤波函数	0.079	0.0138	0.131
Hamming 滤波函数	0.090	0.0137	0.150

这三种距离测量值各反映了图像质量的不同方面:少数点大的偏差使得 d 值较大,它强调少量大误差, r 则强调大量小误差, e 为仿真图像和重建结果之间的最大密度偏差^[1,2]. 上表给出的结果表明,新滤波函数的综合评价较好,尤其最坏距离测量值 e 比几个常用滤波函数都小.

5.2 局部重建实验结果

下面我们给出模拟和实测数据的局部重建结果,图 6(a)和图 7(a)中圆圈标出的部分是要局部重建的区域.

重建的仿真图 6(a)是 $256 * 256$ 大小的图像,采用扫描数为 301 角度数为 200,即 $301 * 200$ 的数据量,通常的 CBP 算法重建此整幅图像用时接近 3 秒,采用新窗作局部重建,局部重建区域半径为全局区域半径的 0.35 倍,用时不到 1 秒.重建医用模体模型图 7(a)成 $1024 * 1024$ 大小的图像,采用的数据量为 $720 * 576$,重建区域为全局区域的十分之一,进行 CBP 全局重建耗时约 70 秒,而局部重建仅需 2~3 秒.(程序运行环境 P4 1.5G,128M,vc6.0)

上述数据和图像表明,重建出关心的局部区域图像,所需数据较少,耗时较短,而且重建图像的质量不变.

模拟数据:

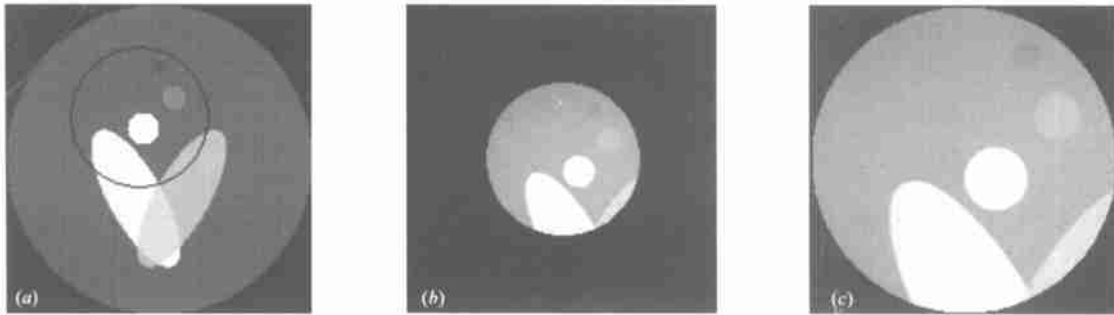


图 6 (a) 仿真图像; (b) 保持原图图像分辨率; (c) 放大为 512 * 512 图像分辨率

实测数据:

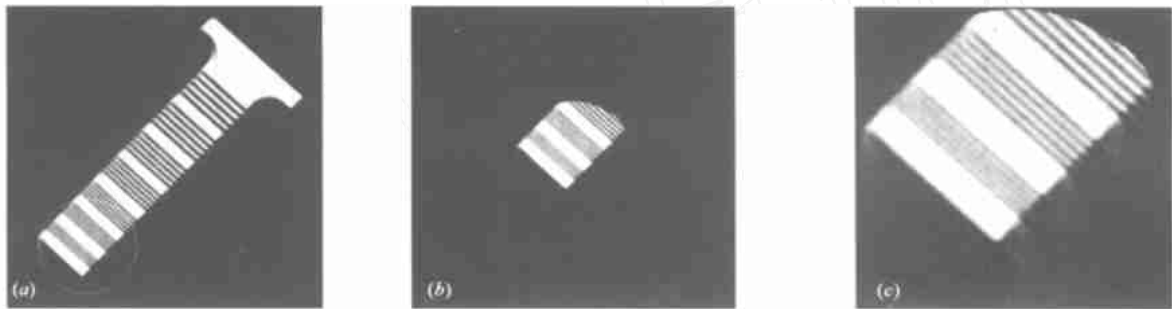


图 7 (a) 全局重建图像; (b) 保持原图图像分辨率; (c) 放大为 1024 * 1024 图像分辨率

6 结论

以上我们从理论和数字实验两个方面分析了所提新滤波函数的特性,结果表明,新滤波函数在保证空间分辨率的同时,减小了 Gibbs 效应。新滤波函数在时域中远处旁瓣的特性还便于作局部重建,本文建议的局部重建方法简便、需要的数据少、重建时间短。进一步精确的研究,需要另文阐述。

致谢:作者感谢邱佩璋教授有益的讨论,感谢内蒙古大学数学系阿拉坦仓教授对本文完成的关心和支持。

参考文献:

- [1] G T Herman. Image Reconstruction From Projections[M]. Academic press ,INC ,1980.
- [2] F Natterer. The Mathematics of Computerized Tomography[M]. Wiley , 1996.
- [3] 杨位钦,顾岚. 时间序列分析与动态数据建模[M]. 北京:北京工业学院出版社,1986.
- [4] 郑君里,等. 信号与系统[M]. 北京:高等教育出版社,2000.
- [5] P Munshi. Error analysis of tomographic filters I: theory[J]. NDT&E International ,1992 ,25:191 - 194.
- [6] Munshi ,R K S Rathoke ,K S Ram ,M S Kalra. Error analysis of tomographic filters II[J]. results ,NDT&E International ,1993 ,26:235 - 240.
- [7] C Babu Rao ,V S Ravichandran ,P Munshi ,Baldev Raj. Effect of object function on tomographic reconstruction a numerical study[A]. 14th

World Conference on Non - Destructive Testing[C]. New Delhi ,India , 1996 ,December 8 - 13.

- [8] A G Ramm ,A I Katsevich. The Radon Transform and Local Tomography[M]. CRC Press ,1996.

作者简介:



范惠荣 女,1977年10月生于呼和浩特市,硕士研究生,在北京信息工程学院应用数学研究室参加图像重建方面的研究工作。



徐茂林 男,1961年10月生于内蒙古察右前旗,浙江大学生物医学工程系博士研究生,在北京信息工程学院应用数学研究室从事图像重建方面的研究工作。