

修正 MUSIC 算法对非线性阵列适用性的讨论

石新智¹, 王高峰¹, 文必洋²

(1. 武汉大学计算机学院, 黄彰任信息技术研究所, 湖北武汉 430072; 2. 武汉大学电子信息学院, 湖北武汉 430072)

摘要: 以三个单极子组成的均匀线性阵和三个单极子\交叉环组成的非线性阵为例, 通过使用 MMUSIC 算法分别对他们接收到的包含两个目标的模拟海杂波数据进行处理后提取的目标到达角参数是否正确, 检验 MMUSIC 算法对非线性天线阵的适用性, 得出 MMUSIC 算法对均匀线性阵适用, 对非线性阵列不适用的结论, 并分析了原因.

关键词: MMUSIC 算法; 非均匀线性阵; 单极子、交叉环阵列

中图分类号: TN957. 52 **文献标识码:** A **文章编号:** 0372-2112 (2004) 01-0147-03

Discussion of the Application for the Monopole , Cross-Loops Array Based on MMUSIC Algorithm

SHI Xin-zhi¹, WANG Gao-feng¹, WEN Bi-yang²

(1. CJ Huang Info. Tech Research Institute, School of Computer Science, Wuhan University, Wuhan, Hubei 430072, China;

2. School of Electronics & Information, Wuhan University, Wuhan, Hubei 430072, China)

Abstract: Using three monopoles array as the example of linear equispaced arrays and three monopole/ cross-loops array as the example of nonlinear arrays, MMUSIC algorithm is adopted to process the simulated data received from two kind of arrays on the condition of two sources on the sea. After processing, the DOA (Direction of Arrival) of linear equispaced array we get is correct, and of nonlinear array is incorrect. So the conclusion that MMUSIC algorithm is applicable for linear equispaced arrays, but inapplicable for nonlinear arrays is drawn and the reason is also analyzed.

Key words: MMUSIC algorithm; nonlinear equispaced monopole array; array of cross-loop/ monopole antennas

1 引言

修正 MUSIC (Modified MUSIC, MMUSIC) 算法是由 Debasis Kundu 提出的^[1], 是近年来受到人们广泛重视的一种高分辨率算法, 可用于空间测向和谱估计等方面, 能改善非相关信号源在低信噪比情况下的角分辨率性能, 还能对相关信号源进行处理^[2,3], 性能优异. 但它多是对均匀线性阵进行分析. 均匀线性阵虽然简单易行, 在实际中得到广泛应用, 但是它要达到较高的角分辨率, 必须采用较多阵元, 从而导致阵列尺寸较大. 因此, 现在世界各国都在研究非线性天线阵, 以期达到以较小的尺寸得到较高分辨率的目的. 其中美国 CODAR 公司研制的 SeaSonde 雷达^[4]采用单极子/交叉环天线, 具有外部尺寸小的突出优点, 值得借鉴. 但 MMUSIC 算法是针对均匀线性阵提出来的, 如果要将其运用于单极子、交叉环阵列, 必须先讨论它对非线性阵列的适用性, 下面我们就来讨论其适用性.

2 修正 MUSIC (MMUSIC) 算法简介

考虑 M 元均匀线性阵, 设 D ($D < M$) 有个窄带信号源平面波辐射到线阵上, 信源方向分别为 $\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_D$. 经第 n 次

快拍, 得到的数据向量为

$$X(n) = AS(n) + n(n), \quad n = 1, 2, \dots, N \quad (1)$$

式中, $X(n) = [x_1(n), \dots, x_M(n)]^T$

为 M 个阵元输出;

$$A = [a(\theta_1), a(\theta_2), \dots, a(\theta_D)]$$

$$a(\theta_k) = [1, e^{-j\theta_k}, \dots, e^{-j(M-1)\theta_k}]^T$$

$$k = \frac{2-d}{\lambda} \sin(\theta_k)$$

T 表示转置, λ 是载波波长, d 为阵元间距, $K = 1, 2, \dots, D$. $S(n) = [s_1(n), s_2(n), \dots, s_D(n)]^T$, $s_k(n)$ 为第 k 个平面波的复振幅.

$$n(n) = [n_1(n), n_2(n), \dots, n_M(n)]^T$$

$n_1(n)$ 为零均值、方差为 σ^2 的白噪声, 且与信号源不相关. N 为快拍次数. 则 $X(n)$ 的相关矩阵 R_x 为

$$R_x = E[X(n)X^H(n)] = APA^H + \sigma^2 I_M \quad (2)$$

式中 $P = E[S(n)S^H(n)]$, 为信号相关矩阵, I_M 为 M 阶单位矩阵.

令 J_M 是 M 阶交换矩阵, 它除了 $(i, M-i+1)$ ($i = 1, 2, \dots, M$) 位置的元素为 1, 其它元素均为 0, 即

$$J_M = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \\ & & \dots & & \\ 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

令 $Y(n) = J_M X^*(n)$ (3)

$X^*(n)$ 为 $X(n)$ 的复共轭。则 $Y(n)$ 的相关矩阵为

$$R_y = E[Y(n)Y^H(n)] = J_M E[X^*(n)(X^*)^H] J_M^H = J_M R_x^* J_M^H = J_M A^* P^* (A^*)^H J_M + 2 I_M \quad (4)$$

由 $J_M J_M = I_M$, 我们可以定义

$$R = R_x + R_y = A P A^H + J_M A^* P^* (A^*)^H J_M + 2 I_M \quad (5)$$

设 $a(\theta) = [1 \cos \theta \dots \sin^M \theta]^T$ (6)

当 $\theta = 1, 2, \dots, D$, $a(\theta) = 0$ 。这意味着 $a(\theta)$ 在 $\theta = 1, 2, \dots, D$ 有 D 个最小值。MMUSIC 算法就是利用这个性质来估计信号到达角。我们按照以下的步骤来估计信号到达角：

- (1) 计算 R 的取样估计和它的特征值/特征向量分解；
- (2) 计算噪声谱估计 $\hat{\lambda}(\theta)$ ；
- (3) 计算当 $\hat{\lambda}(\theta)$ 达到最小值时, $\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_D$ 的值, 并将它们做为信号到达角的估计。

在低信噪比, 快拍数较少时, 由于 R_x, R_y 是用有限次快拍的数据进行估值的, 存在估计误差, 此时, 用 R 进行信号到达角估计, 将采集到的数据共轭重排后再用一次, 具有平均的意义, 等效于提高了信噪比, 因此可提高信号到达角估计的性能。

3 MMUSIC 算法对非线性天线阵的适用性讨论

下面我们使用 MUSIC 算法和 MMUSIC 算法分别对均匀线性阵和非线性阵接受数据进行处理, 检验 MMUSIC 算法对非线性天线阵的适用性。

均匀线性阵以三个单极子组阵 (a) 为例, 如图 1 所示; 非线性阵以三个单极子交叉环组阵 (b) 为例, 如图 2 所示。在假定雷达的工作频率为 7.5MHz, 天线间间隔为二分之一波长 ($\lambda/2$) 的情况下, 模拟检验在海杂波中出现二个目标的情况。假设噪声为加性高斯白噪声, 不同阵元噪声均为平稳随机过程, 且相互独立; 空间信号为零均值平稳随机过程, 它与阵元噪声相互独立。

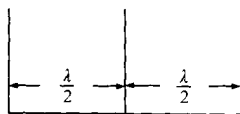


图 1 a 阵元布置图

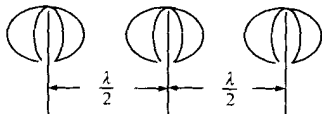


图 2 b 阵元布置图

对于 M 元均匀线性阵, 阵流形为:

$$a(\theta) = [1 \ e^{-j\frac{2\pi f d}{c} \sin \theta} \ \dots \ e^{-j\frac{2(M-1)fd}{c} \sin \theta}]^T \quad (7)$$

对于三个单极子组成的均匀线性阵阵元布置如图 1

阵流形为

$$a(\theta) = [1 \ e^{-j\frac{2\pi f d}{c} \sin \theta} \ e^{-j2\frac{2\pi f d}{c} \sin \theta}]^T \quad (8)$$

它是均匀线性天线阵。

对于单极子/交叉环天线, 它最早是由两个相互正交的环和一个与两环交叉线重合的单极子天线组成^[5], 现在则用两个相互正交的铁氧体棒代替交叉环, 棒中间留有空隙, 单极子天线从中穿过, 从而使三天线对垂直极化有相同的相位中心^[6]。其中环天线的辐射方向性类似于磁偶极子, 为余弦辐射模型^[7]。单极子/交叉环的阵流形为:

$$a(\theta) = [1 \ \cos \theta \ \sin \theta]^T \quad (9)$$

利用单极子、交叉环组阵, 它的阵流形同时具有均匀线性阵和单极子/交叉环的阵流形的特点。

三个单极子交叉环组阵的阵元布置如图 2

阵流形为

$$a(\theta) = \begin{bmatrix} 1 \\ \cos \theta \\ \sin \theta \\ e^{-j\frac{2\pi f d}{c} \sin \theta} \\ \cos \theta \ e^{-j\frac{2\pi f d}{c} \sin \theta} \\ \sin \theta \ e^{-j\frac{2\pi f d}{c} \sin \theta} \\ e^{-j2\frac{2\pi f d}{c} \sin \theta} \\ \cos \theta \ e^{-j2\frac{2\pi f d}{c} \sin \theta} \\ \sin \theta \ e^{-j2\frac{2\pi f d}{c} \sin \theta} \end{bmatrix} \quad (10)$$

当 $\arg 1 = 40$ 度, $\arg 2 = 60$ 度, $\text{SNR} = 5\text{dB}$, $n_s = 9$ 时, 使用 MMUSIC 算法对 a 阵和 b 阵接收数据分别进行处理, 进行到达角分辨, 结果如图 3、4 所示。

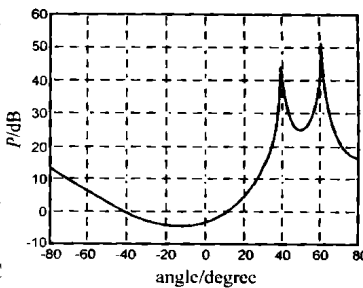


图 3 a 阵 MMUSIC 角度谱

图 3 是用 MMUSIC 算法对三个单极子组成的均匀线性阵进行处理的结果, 正确分辨出 40 度和 60 度两个到达角; 图 4 是用 MMUSIC 算法对三个单极子/交叉环组成的非线性阵进行处理的结果, 无法正确分辨出 40 度和 60 度两个到达角。

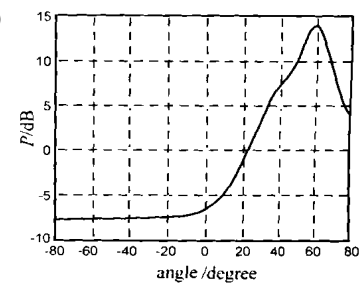


图 4 b 阵 MMUSIC 角度谱

可见, MMUSIC 算法可以改善均匀线性阵的角分辨力, 但对非均匀线性阵失效, 反而破坏了它们的角分辨能力。

4 对非均匀线性阵失效的原因分析

我们可以看出,MMUSIC 算法的基本前提是 $AR_x A^H + 2I_M, J_M A^* R_x^* (A^*)^H J_M + 2I_M, AR_x A^H + J_M A^* R_x^* (A^*)^H J_M + 2I_M$ 具有相同的噪声子空间. 下面我们来看看这个结论的推导过程.

对于任意的 $1, 2, \dots, D$, 存在 g_1, g_2, \dots, g_D 使得 $z_1 = e^{j1}, \dots, z_M = e^{jD}$ 是多项式方程:

$$P(z) = g_0 + g_1 z + \dots + g_D z^D = 0 \quad (11)$$

的根.

因为多项式 $P(z)$ 的根在单位圆上, 所以有

$$z_k^* = z_k^{-1}, \quad k=1, 2, \dots, D \quad (12)$$

定义多项式

$$Q(z) = z^D P^*(z) = g_D^* + g_{D-1}^* z + \dots + g_0^* z^D \quad (13)$$

利用式(12), 可以看出, $P(z)$ 和 $Q(z)$ 有相同的根. 比较这两个多项式的系数, 有

$$\frac{g_k}{g_D} = \frac{g_{D-k}^*}{g_0^*}, \quad k=0, 1, \dots, D \quad (14)$$

由式(14)和式(11), 我们可以得出, 对于任意的 $1, 2, \dots, D$, 存在 $b_k = g_k (g_0^*/g_D)^{1/2}, k=0, 1, \dots, D$, 使得

$$b_0 + b_1 e^{jk} + \dots + b_D e^{jDk} = 0, \quad k=1, 2, \dots, D \quad (15)$$

其中

$$b_i = b_{D-i}, \quad i=0, 1, \dots, D \quad (16)$$

观察到 b_i 具有变换对称的性质, 因此式(16)也可以简洁的写成:

$$\mathbf{b} = J_M \mathbf{b}^*, \quad \mathbf{b} = (b_0, b_1, \dots, b_D) \quad (17)$$

这里 J_M 是 $M \times M$ 的交换矩阵.

$$J_M = \begin{bmatrix} 0 & & & 1 \\ & \ddots & & \\ & & \ddots & \\ 1 & 0 & & \end{bmatrix} \quad (18)$$

设 \mathbf{u} 是对应于 R_x 的一个为 2 的特征值的特征向量, 即噪声子空间中的一个向量, 因为 $\text{rank}(R_x) = D$, 所以

$$AR_x A^H \mathbf{u} = 0 \Rightarrow A^H \mathbf{u} = 0 \quad (19)$$

由式(11)、(15)、(17)可知, 对于任意的 \mathbf{u} , 存在一个非零复常数 c , 使得

$$\mathbf{b} = c \mathbf{u} \quad (20)$$

这里 $\mathbf{b} = J_M \mathbf{b}^*$.

因此, 由式(19)、(20)以及 $J_M^2 = I_M$, 可以得出

$$\begin{aligned} A^H \mathbf{u} = 0 &\Rightarrow A^H \mathbf{b} = 0 \Rightarrow J_M A^* R_x^* (A^*)^H J_M J_M \mathbf{b}^* = 0 \\ &\Rightarrow J_M A^* R_x^* (A^*)^H J_M \mathbf{u} = 0 \end{aligned} \quad (21)$$

也就是说 \mathbf{u} 同时也是对应于 $J_M A^* R_x^* (A^*)^H J_M + 2I_M$ 的一个为 2 的特征值的特征向量, 由此我们可以得到结论 $AR_x A^H + 2I_M, J_M A^* R_x^* (A^*)^H J_M + 2I_M, AR_x A^H + J_M A^* R_x^* (A^*)^H J_M + 2I_M$ 具有相同的噪声子空间.

可见, 以上结论是在天线阵的阵流形可以写成多项式的情况下推导出来的. 均匀线性阵的阵流形可以写成多项式, 而单极子、交叉环阵列的阵流形无法写成多项式形式, 所以 MMUSIC 算法对均匀线性阵适用, 对非线性阵列不适用.

5 结论

MMUSIC 算法实质上是前后向空间平滑方法中子阵长度与阵元数相同的特殊情况, 它只对均匀线性阵适用. MUSIC^[8] 算法也是针对均匀线性阵提出的, 但它实际上可以采用几乎是任意形状的阵元布置, 只要满足在 D 个独立信号源的前提下, 矩阵 A 具有 D 个线性无关的列就行了. 因此, 在非均匀阵情况下, 采用 MUSIC 算法进行角度分辨是较好的方法.

参考文献:

- [1] Debasis Kundu. Modified MUSIC algorithm for estimating DOA of signals[J]. Signal Processing, 1996(48): 85 - 89.
- [2] 何子述, 黄振兴, 向敬成. 基于数据阵共轭重构的 MUSIC 角估计算法[J]. 电子科技大学学报, 1999, 28(2): 111 - 114.
- [3] 何子述, 黄振兴, 向敬成. 修正 MUSIC 算法对相关信号源的 DOA 估计性能[J]. 通信学报, 2000, 21(10): 14 - 17.
- [4] Barrick D E. SeaSonde User's Guide[M]. USA: CODAR Ocean Sensors Ltd, 1998.
- [5] Alan R C. Three-Element Antenna Formed of Orthogonal Loops Mounted on a Monopole[P]. 美国专利: 4433336, 1984.
- [6] Barrick D E, Lipa B J, Lilleboe P M. Gated FmCW DF Radar and Signal Processing For range/Doppler/Angle Determination[P]. 美国专利: 5,361,072, 1994.
- [7] 刘伟. 从交叉环/单极子天线数据中提取海洋表面流[M]. 武汉: 武汉大学电子信息学院, 2001.
- [8] R O Schmidt. Multiple emitter location and signal parameter estimation[J]. IEEE Trans, 1986, AP-34(3): 276 - 280.

作者简介:



石新智 女, 1977 年 10 月生于湖北省武汉市, 博士, 主要研究方向为信号处理.

王高峰 男, 1965 年 12 月生于湖北省英山县, 现为武汉大学黄陂信息技术研究所所长、教授、博士生导师.

文必洋 男, 1963 年 10 月生于湖北省仙桃市, 现为武汉大学电信学院教授、博士生导师, 从事雷达阵列信号处理方面的研究.