

# 分形图像编码的矩阵表示和收敛性分析

俞 璐, 吴乐南

(东南大学无线电工程系, 江苏南京 210096)

**摘 要:** 分形解码迭代过程的收敛是保证解码正确实现的条件, 要研究迭代过程的收敛性首先要将分形编码中的映射用矩阵来表示出来. 本文针对 Jacqain 的分块算法给出了数字灰度图像分形编码的矩阵表示, 并提出了一种利用有向图强连通分量来求矩阵谱半径的方法.

**关键词:** 分形图像编码; 收敛性; 有向图; 强连通分量

**中图分类号:** TP391.4      **文献标识码:** A      **文章编号:** 0372-2112 (2004) 07-1103-05

## Matrix Representation and Convergence Analysis of Fractal Image Encoding

YU Lu, WU Le-nan

(Dept of Radio Engineering, Southeast University, Nanjing, Jiangsu 210096, China)

**Abstract:** The convergence of the iterative process ensures the validity of fractal decoding. To study the convergence of decoding process, the transform in fractal encoding must first be presented with matrix. In this paper, matrix representation of fractal encoding of digital grey level image is put forward and a method to compute spectral radius of the matrix based on the theory of directed graph is also presented.

**Key words:** fractal image encoding; convergence; directed graph; strong connectivity

### 1 分形图像编码概述

分形图像编码是利用图像局部之间的自相似性构造一个迭代函数系统 (IFS), 使其不动点尽量“接近”要编码的图像. 解码是用通过迭代获得 IFS 的不动点. 完备度量空间的压缩映射定理和分形几何中的拼贴定理为分形压缩编码提供理论基础.

A E Jacqain 的分块分形编码算法是分形图像编码中的经典算法. 对于数字图像, 就是把图像分成可重叠的父块  $D_i$  ( $i = 1, 2, \dots, m$ ) 和不可重叠的子块  $R_j$  ( $j = 1, 2, \dots, n$ ), 对每一个子块  $R_j$ , 通过对所有父块进行平均-抽样、灰度变换 (各灰度值乘以因子  $s_j$ )、反射-旋转、灰度平移 (各灰度值加上  $g_j$ ), 选择一个最佳匹配父块  $D_i$ . 最佳的含义是经过上述匹配之后的父块  $D_i$  与子块  $R_j$  之间的某种误差度量  $d$  (通常选取均方根度量) 最小. 对子块  $R_j$  的编码结果包括父块  $D_i$  的位置、 $s_j$ 、 $g_j$  和  $L_p$  (表征选取的旋转反射变换,  $p = 1, 2 \dots 8$ ).

分形解码通过迭代来实现, 因此必须保证迭代过程的收敛性. 相关文献对此做过有益的探讨, Bernd Hurten 给出了一维数字信号分形编码的矩阵表示<sup>[1, 2]</sup>, 同时讨论了迭代收敛的充要条件 (变换矩阵的谱半径  $< 1$ ), 并就 Jacqain 分块算法中一种特殊的父块划分方式 (父块不重叠) 说明了如何确定谱半径<sup>[3]</sup>, 但没有给出通用的划块方式下谱半径的确定方法.

Kominek J. 提出了复合收敛 (compound contractivity) 和部分收敛 (partial contractivity) 等概念<sup>[4]</sup>, 从一个像素的收敛性角度讨论了迭代过程的收敛性, 但没有考虑取样和平均的因素, 而是假定一个像素每次迭代只与另外一个 (而不是 4 个或更多) 像素有关, 使模型过于简化. 本文在前人工作的基础上给出了数字图像分形编码的矩阵的精确表示, 并把矩阵理论和有向图理论有机结合, 针对 Jacqain 的分块算法讨论了如何确定矩阵的谱半径.

### 2 一维信号分形解码的收敛性分析

对一维信号进行分形编码, 就是对信号  $x$  做变换

$$W: R^N \rightarrow R^N, W(x) = Ax + x, A \in R^{N \times N}, x, b \in R^N \quad (1)$$

编码过程就是确定  $A$  和  $b$  的过程, 每一种编码结果都可用  $A$  和  $b$  完全表征.

压缩映射定理告诉我们如果  $W$  在度量  $d_p$  上压缩, 那么迭代过程依度量  $d_p$  收敛, 这只是迭代过程收敛的充分条件. 文献 [1, 2] 论证了迭代过程收敛的充要条件是  $(A) < 1$ ,  $(A)$  为  $A$  的谱半径. 而本文提出并证明的命题 1 (附录) 说明了在  $(A) < 1$  时, 只要  $L$  (要编码的原图) 与  $W(L)$  “比较接近”, 那么  $L$  就与  $W$  的不动点“比较接近”.

显然分析迭代过程的收敛性要把编码过程中的变换矩阵

A 表示出来并计算 (A). 对于一维信号的分形编码过程文献 [1,2] 给出了 A 的表示, 但没有讨论如何求谱半径, 文献 [3] 针对一种特殊情形 (D 块不重叠) 给出了求谱半径的一种方法, 不具有通用性.

### 3 数字图像分形编码的矩阵表示

如上所述, 一维数字信号的分形编码过程可以用矩阵表示出来, 这就提示我们把数字图像转换为一维信号来处理.

对  $N \times N$  数字灰度图像, 每一点的灰度值用  $f(i, j), 0 \leq i, j \leq N-1$  来表示. 灰度矩阵记为 X, 则 X 可以通过对 X 进行拉直运算得到一个  $N^2$  维列向量

$$Y = \text{vec}(X) = [f(0,0), f(0,1), \dots, f(N^2-1,0), \dots, f(N^2-1, N^2-1)]^T \quad (2)$$

$\text{vec}(X)$  表示对矩阵 X 按行拉直. 图像中的父块记为 D 块 ( $d \times d$ ), 子块记为  $R(r \times r)$ . 对 X 编码后每一个像素对应的灰度平移值构成一个  $N \times N$  的平移矩阵记为 G, 显然, G 按照与图像子块划分相同的方式成为分块矩阵, 每一块中  $r \times r$  个元素的值都相同. 图像 X 中的一个父块在 Y 中分散为  $d$  段, 每一个段内有  $d$  个元素, 各段对应元素之间距离为  $N$ , 子块也有类似的结果.

下面引入几个记号 ( $k, l, i, j, p, q$  均为整数):

$D^{(k,l)}$ : X 中左上角元素坐标为  $(k, l)$  的 D 块,  $0 \leq k \leq N-d, 0 \leq l \leq N-d$ ;

$R_{i,j}$ : X 中左上角元素坐标为  $(i, j)$  的 R 块,  $i = pr, j = qr, 0 \leq p, q \leq (\frac{N}{r} - 1)$ ;

$G_{i,j}$ : G 中左上角元素坐标为  $(i, j)$  的 G 块,  $i = pr, j = qr,$

$0 \leq p, q \leq (\frac{N}{r} - 1)$ ;

用  $[R_{i,j}]$  和  $[G_{i,j}]$  分别表示除块  $R_{i,j}$  和  $G_{i,j}$  以外全为 0 的  $N \times N$  矩阵, 则有

$$X = [R_{i,j}]_{i,j} \quad G = [G_{i,j}]_{i,j} \quad (3)$$

令

$$Y_{(i,j)} = \text{vec}([R_{i,j}]), \quad B_{i,j} = \text{vec}([G_{i,j}]) \quad (4)$$

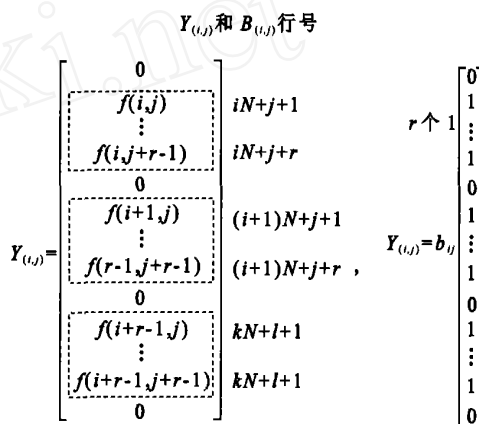
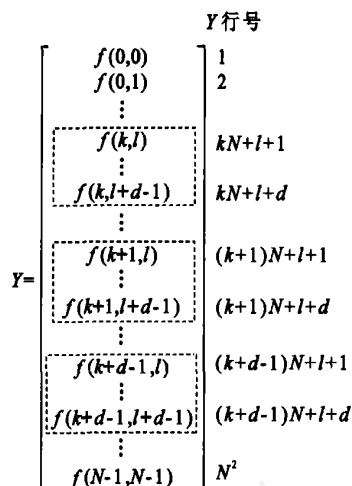
则有

$$Y = [Y_{(i,j)}]_{i,j}, \quad B = [B_{(i,j)}]_{i,j} \quad (5)$$

假设对  $R_{i,j}$  的编码结果是  $D^{(k,l)}$  的位置 (用  $k$  和  $l$  表示),  $S_{i,j}, L$  和  $G_{i,j}$ , 下面讨论如何用  $W: R^{N^2} \rightarrow R^{N^2}$  把这个编码过程表示出来. 首先假设 L 表示旋转  $0^\circ$ . Y 到  $Y_{(i,j)}$  的这个变换过程就是

$$A_{i,j,k,l} \times Y + B_{(i,j)} = Y_{(i,j)} \quad (6)$$

其中



Y 和  $Y_{i,j}$  中画虚线方框的部分分别对应  $D^{(k,l)}$  和  $R_{i,j}$  中的元素.

$$A_{i,j,k,l} = \frac{S_{i,j}}{m^2} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & M & 0 & M & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & M & 0 & M & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & M & 0 & M & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}$$

$$M = \begin{bmatrix} 1_m & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1_m & 0 & 0 \\ & & \ddots & \\ 0 & 0 & 0 & 1_m \end{bmatrix}$$

$1_m = [1 \ 1 \ \dots \ 1]$  其  $m$  个 1, 0 为零矩阵.

为方便起见, 这里把  $A_{i,j,k,l}$  和 M 写成分块矩阵的形式, M 是  $r$  行  $m$  列的矩阵 (有  $m$  个元素不为 0), 共有  $m$  个 M 矩阵有规律等间距地分散在  $A_{i,j,k,l}$  中. ( $A_{i,j,k,l}$  是  $N^2 \times N^2$  矩阵, 共有  $d^2$  个元素不为 0, 只有第  $xN+j+y(i-x-i+r-1, 1-y-r)$  行 (共  $r^2$  行) 中有非 0 元素, 分别位于第  $pN+l+q$  列 (共  $m^2$  列), 其中  $k+(x-i)m-p-k+(x-i+1)m-1, 1-q-m$ ). 例如第  $iN+j+1$  行非元素分别位于  $kN+l+1 \dots kN+l+m, (k+1)N+l+1 \dots (k+1)N+l+m, \dots, (k+m-1)N+l+1 \dots (k+m-1)N+l+m$ , 共有  $m$  组, 每组  $m$  个非 0 元

素.这是因为变换后  $X$  中的  $f(i, j)$  元素(在  $Y$  中位于第  $iN + j + 1$  行)是由变换前  $X$  中的  $f(k, l), f(k, l + 1) \dots f(k, l + m - 1), f(k + 1, l), \dots f(k + 1, l + m - 1), \dots f(k + m - 1, l), \dots f(k + m - 1, l + m - 1)$  共  $m^2$  个元素取均值、乘以灰度因子和灰度平移得到的.

对此举一个简单的例子说明.

**例 1**  $r = 2, d = 4, N = 8$ , 灰度矩阵  $X$  如图 1, 子块  $R_{6,6}$  由块  $D^{(1,1)}$  取样-平均, 灰度变换(变换因子为 0.5)和平移(平移 2)得到, 这一编码结果用矩阵形式表示出来所得到的矩阵如图可示.

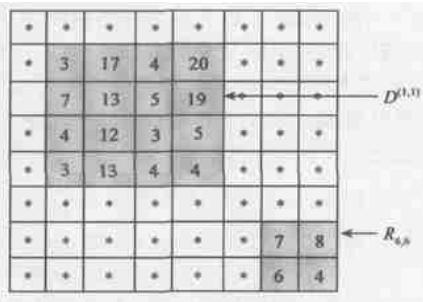


图 1 灰度矩阵  $X$

从图 2 中不难看出, 虽然变换矩阵是左乘整个图像向量, 但只对其中  $D$  块对应的分量起作用, 作用的结果正是取样、平均、灰度变换和平移. 可见这样的矩阵确实表征了对某子块编码的全过程.

例子之后, 我们继续分析  $A_{i,j,k,l}$  的特征, 显然它是一个稀疏矩阵. 非 0 元素的行号由  $i, j$  决定, 实际上块  $R_{i,j}$  中的每个元素对应了  $A_{i,j,k,l}$  的一个非 0 行, 共  $r^2$  个非 0 行. 与不同的块  $R_{i,j}$  对应的  $A_{i,j,k,l}$  有不同的非 0 行. 非 0 元素的列号由  $k, l$  决定, 实际上块  $D^{(k,l)}$  中的每个元素对应了  $A_{i,j,k,l}$  的一个非 0 列, 每个非 0 列只有一个非 0 元素. 与不相交的  $D^{(k,l)}$  对应的  $A_{i,j,k,l}$  有不同的非 0 列; 如果两个  $D^{(k,l)}$  有相交的元素, 那么它们对应的  $A_{i,j,k,l}$  有一些相同的非 0 列, 分别与相交的元素对应.

以上  $A_{i,j,k,l}$  的表示没有考虑  $L$  (反射-旋转) 的影响, 其实  $L$  对  $A_{i,j,k,l}$  的形式没有本质的影响, 只是使各非 0 行之间做某些交换. 例如, 如果在例 1 中,  $R_{6,6}$  是  $\begin{matrix} 8 & 7 \\ 4 & 6 \end{matrix}$ , 那么  $D^{(1,1)}$  取样、平均、灰度变换后还要经过左右反射才得到它, 此时的  $A_{i,j,k,l}$  就要例 1 的基础上进行一个初等行变换  $\text{row}(55) \leftrightarrow \text{row}(56), \text{row}(63) \leftrightarrow \text{row}(64)$ .

$A_{i,j,k,l}$  刻画了对子块  $R_{i,j}$  的编码过程, 把对所有子块的编码过程完整地表示出来就是:

$$\begin{aligned} W(Y) &= \sum_{i,j} A_{i,j,k,l} \times Y + \sum_{i,j} B(i,j) \\ &= \left( \sum_{i,j} A_{i,j,k,l} \right) \times Y + B \\ &= AY + B, \quad A = \sum_{i,j} A_{i,j,k,l} \end{aligned} \quad (7)$$

考虑到各子块没有重叠,  $i$  和  $j$  的取值是  $r$  的整数倍, 因此对于不同的  $i, j, A_{i,j,k,l}$  有不同的非 0 行, 他们的相加不影响各自非 0 行的结构. 此时  $A$  中每一行都有  $m^2$  个非 0 元素, 且这  $m^2$  个元素数值相同, 一个列中有多少非 0 元素取决于这一列号对应的元素所属的各个  $D$  块(一个元素可以属于多

个  $D$  块, 因为允许  $D$  块交叠) 共被多少个  $R$  块“选中”. 式(7)就是数字灰度图像分形编码的矩阵表示.

#### 4 矩阵的对角块化与有向图的强连通分量划分

以上给出了分形图像编码矩阵的精确表示, 但对于大小为  $N^2 \times N^2$  的矩阵  $A$ , 计算甚至存储都有困难, 因此必须寻求其他途径使矩阵计算成为可能. 为此本文提出了一种利用求有向图强连通分量来求矩阵谱半径的方法. 首先引入有向图和强连通分量的定义<sup>[6]</sup>:

**定义 1** 图  $G = (V, E)$  由一个非空顶点集  $V$  和一个边集  $E$  组成. 如果边是顶点的有序对  $(v, w)$  那么  $G$  称为有向图.

**定义 2** 设图  $G = (V, E)$  是有向图, 可以把  $V$  分成等价类  $V_i, 1 \leq i \leq r$ , 顶点  $v$  和  $w$  等价当且仅当从  $v$  到  $w$ , 从  $w$  到  $v$  都有路径.  $E_i, 1 \leq i \leq r$  是连接  $V_i$  中顶点的边集. 则图  $G_i = (V_i, E_i)$  称为  $G$  的强连通分量.

实际上每一个  $N \times N$  矩阵  $A$  都与一个有  $N$  个顶点的带有边加权值的有向图(本文称之为状态转换图)对应, 把  $N$  个顶点分别赋予编号  $x_1, x_2, \dots, x_N$ , 矩阵  $A$  中每个非 0 元素  $a_{i,j}$

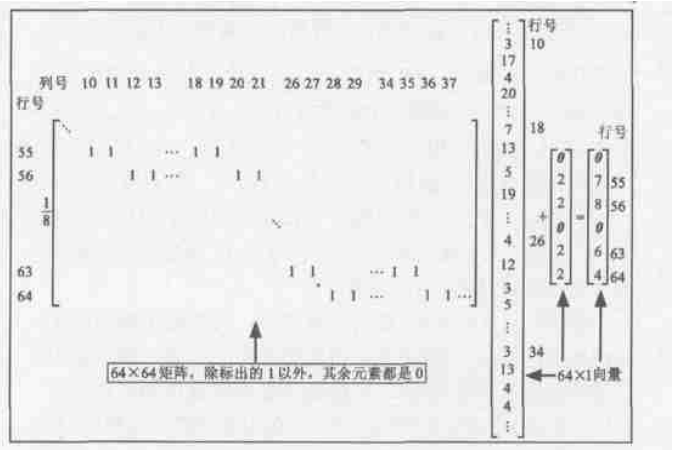


图 2

对应一条有向边  $(x_j, x_i)$ , 边加权值为  $a_{i,j}$ . 为说明这个问题, 举一个简单的例子.

**例 2**  $N = 4$ ,

$$\text{矩阵 } A = \begin{bmatrix} 0.1 & 0 & 0.3 & 0 \\ 2 & 5 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0.4 \end{bmatrix}$$

就与图 3 的有向图对应. 这个有向图有 2 个强连通分量, 其顶点等价类分别是  $\{x_1, x_2, x_3\}$  和  $\{x_4\}$ . 如果  $A$  就是分形编码  $W(x) = Ax + b$  的变换矩阵, 假设进行迭代解码的初始值  $x^{(0)} = [x_{1,0}, x_{2,0}, x_{3,0}, x_{4,0}]^T$ , 则任何有

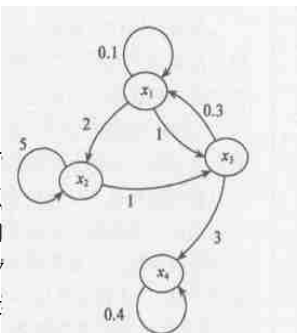


图 3 与  $A$  对应的状态转换图

限次的迭代结果  $x^{(k)} = [x_{1,k}, x_{2,k}, x_{3,k}, x_{4,k}]^T$  中, 前三个分量都只与  $x_{1,0}, x_{2,0}, x_{3,0}$  有关, 而与  $x_{4,0}$  无关. 那么  $\{x_1, x_2, x_3\}$  的变换过程可以独立出来, 即

$$W \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = A_1 \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}, A_1 = \begin{bmatrix} 0.1 & 0 & 0.3 \\ 2 & 5 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad (9)$$

那么序列  $\{x_{1,n}, x_{2,n}, x_{3,n}\}_{n=1}$  的收敛与否就取决于  $A_1$  的谱半径是否小于 1.

用  $x_{i,n}, 1 \leq i \leq 4, n=0, 1, 2, \dots$  表示状态  $x_i$  第  $n$  个时刻的值, 则对于  $x_4$  有

$$x_{4,1} = 0.4x_{4,0} + 3x_{3,0} + b_4$$

$$x_{4,2} = 0.4x_{4,1} + 3x_{3,1} + b_4 = 0.4^2x_{4,0} + 0.4 \times 3x_{3,0} + 3x_{3,1} + (1 + 0.4)b_4$$

...

$$x_{4,n} = 0.4^n x_{4,0} + 0.4^{n-1} \times 3x_{3,0} + 0.4^{n-2} \times 3x_{3,1} + \dots + 3x_{3,n-1} + (1 + 0.4 + 0.4^2 + \dots + 0.4^{n-1})b_4 \quad (10)$$

如果序列  $\{x_{1,n}, x_{2,n}, x_{3,n}\}_{n=1}$  是收敛的, 即  $x_3$  与  $x_{10}, x_{20}, x_{30}$  无关, 考察  $x_{4,n}$  中的通项  $0.4^{n-i} \times 3x_{3,i-1} (1 \leq i \leq n)$ , 当  $n$  时, 条件  $i-1$  和  $n-i$  至少有一个成立, 若前者成立, 则由于  $x_{3,i-1}$  与  $x_{1,0}, x_{2,0}, x_{3,0}$  无关, 使得  $0.4^{n-i} \times 3x_{3,i-1}$  与  $x_{1,0}, x_{2,0}, x_{3,0}$  无关; 若后者成立则因为  $\lim_{n \rightarrow \infty} 0.4^n = 0$ , 使得  $0.4^{n-i} \times 3x_{3,i-1} \rightarrow 0$ . 所以  $x_4$  与  $x^{(0)}$  的各个分量无关, 即序列  $\{x_{4,n}\}_{n=1}$  也收敛. 当然, 如果序列  $\{x_{1,n}, x_{2,n}, x_{3,n}\}_{n=1}$  不收敛或者系数 0.4 换为其他一个大于 1 的数, 那么  $\{x_{4,n}\}_{n=1}$  都不收敛. 值得注意的是,  $\{x_{4,n}\}_{n=1}$  是否收敛除了与  $\{x_{1,n}, x_{2,n}, x_{3,n}\}_{n=1}$  收敛性有关以外, 只与  $x_4$  的自环系数 0.4 有关, 而与  $x_3$  到  $x_4$  的系数  $x_{3,4} = 3$  无关, 但如果收敛那么收敛后的结果与系数  $x_{3,4}$  有关.

通过对例 2 的分析, 我们不难看出: (1) 变换矩阵对应的迭代过程是否收敛, 取决于状态转换图中各个强连通分量对应的矩阵谱半径是否  $< 1$ . (2) 连通分量内部的边加权值对收敛性有影响, 连通分量之间的边加权值对收敛性没有影响. 把这些结果严格地描述, 本文提出了

**命题 2** 若矩阵  $A$  对应的有向图是  $G$ ,  $G$  的各强连通分量  $G_1, G_2, \dots, G_n$  对应的矩阵是  $A_1, A_2, \dots, A_n$ , 那么  $\rho(A) = \max_{1 \leq i \leq n} \rho(A_i)$ . (证明见附录)

从证明过程不难看出, 求有向图  $G$  的各强连通分量和矩阵  $A$  的对角块化具有同样的结果, 都是把大矩阵“划分”为一些收敛性相互独立的小矩阵, 使矩阵谱半径的精确计算成为可能, 即使不能精确计算, 也会因为剔除了与谱半径无关的系数而使谱半径各种上界的估计更加准确. 对于大的矩阵, 存储并计算与它相似的对角块化矩阵在计算上几乎不可行, 而求有向图各强连通分量却可以做到, 这是因为第一, 求有向图的强连通分量是计算机算法设计中的经典算法, 不需要存储整个矩阵, 只要存储其中不为 0 的系数, 即有向图的边和节点, 回忆 3 中得到的变换矩阵  $A$  是一个稀疏矩阵, 每一行只有  $m^2$  个非 0 元素. 第二求有向图的强连通分量的时间耗费是  $O(\max(n, e))$ ,  $n$  为节点数,  $e$  为边数, 那么对于分形图像编码的变换矩阵, 求它对应的状态转换图的强连通分量, 时间复杂度  $O(N^2 * m^2)$  是可以接受的. 关于求强连通分量的算法

及其正确性和复杂度分析可参见文献 [6].

实际上, Bernd Hurgten 提出的父块不重叠情形下确定谱半径的方法 [3] 和 Kominek J 的结论 (假定一个像素每次迭代只与另外一个像素有关) [4] 都是本文结论的一个特例.

## 5 讨论

本文提出了数字图像分形编码的精确矩阵表示, 并利用求有向图强连通分量的算法给出了一种矩阵对角块化的方法, 使大的稀疏矩阵的谱半径计算成为可能. 文中的分析虽然是针对 Jacqain 的基本分块算法进行的, 但结果同样适用于自适应四叉树分形编码. 这是因为子块  $R$  与父块  $D$  同时进行四叉树分割,  $r, d$  同时减半而  $m = \frac{d}{r}$  保持不变, 所以  $A_{i,j,k,l}$  中每行的非 0 元素个数不变, 从而  $A$  的结构也不变.

讨论分形编码收敛性的相关文献 [1~4] 都没有指出文献中的结论如何用于编码实践, 本文的结论用来指导编码参数的选取同样具有困难, 这是因为本文目前还无法确定在对每一子块进行编码时其参数的选择最终将如何影响  $(A)$ , 这个问题有待于进行更深入地探讨.

## 附录:

**命题 1**  $W: R^N \rightarrow R^N, W(x) = Ax + b, A \in R^{N \times N}, x, b \in R^N$ . 已知  $\rho(A) < 1, f, L \in R^N, f$  是  $W$  的不动点.  $\|\cdot\|_v$  是  $R^N$  上的某一向量范数, 度量  $d_p(x, y) \triangleq \|x - y\|_v, x, y \in R^N$ , 矩阵范数  $\|A\|_m \triangleq \sup_{x \in R^N, \|x\|_v=1} \|Ax\|_v, A \in R^{N \times N}$ . 若  $d_p(L, W(L)) < (1 - \rho(A))^{-1} \|m\|_m$ , 则  $d_p(L, f) < (1 - \rho(A))^{-1} \|m\|_m$ .

**证明**  $\rho(A) < 1$  时, 1 不是  $A$  的特征值, 则  $\det(I - A) \neq 0$ , 故  $I - A$  可逆. 令  $x^{(k)} = W(x^{(k-1)}), k=1, 2, 3, \dots$  则

$$x^{(k)} = A^k x^{(k-1)} + \sum_{i=0}^{k-1} A^i b, (\rho(A) < 1) \Rightarrow f = \lim_{k \rightarrow \infty} x^{(k)} = (I - A)^{-1} b$$

$$\begin{aligned} d_p(L, f) &= \|f - L\|_v = \|(I - A)^{-1} b - L\|_v \\ &= \|(I - A)^{-1} [b - (I - A)L]\|_v \\ &\leq \|(I - A)^{-1}\|_m \|b - (I - A)L\|_v \\ &= \|(I - A)^{-1}\|_m d_p(L, W(L)) < (1 - \rho(A))^{-1} \|m\|_m \end{aligned}$$

证毕

**命题 2** 若矩阵  $A$  对应的有向图是  $G$ ,  $G$  的各强连通分量  $G_1, G_2, \dots, G_n$  对应的矩阵是  $A_1, A_2, \dots, A_n$ , 那么  $\rho(A) = \max_{1 \leq i \leq n} \rho(A_i)$ .

**证明** 由于  $A_1, A_2, \dots, A_n$  是强连通分量  $G_1, G_2, \dots, G_n$  对应的矩阵, 那么  $A$  一定可以通过做有限次同时交换行和列的变换 (即  $B = P_K \dots P_2 P_1 A P_1^{-1} P_2^{-1} \dots P_K^{-1}, P_i (i=1, 2, \dots, K)$  是与初等行变换  $r_i \leftrightarrow r_j$  对应的初等方阵) 得到

$$B = \begin{bmatrix} A_1 & & & \\ & A_2 & & \\ & & \dots & \\ & & & A_n \end{bmatrix}$$

其中  $B_{i,j}$  表示第  $i$  个强连通分量到第  $j$  个强连通分量的转换

系数阵,由于  $B_{i,j}$  和  $B_{j,i}$  不能同时不为零阵(否则第  $i$  个强连通分量到第  $j$  个强连通分量将是同一个连通分量),所以一定能得到下三角形(或上三角形)的  $B$ .  $A$  和  $B$  相似,所以

$$(A) = (B).$$

而  $|B - I| = \prod_{i=1}^n |A_i - I|$ , 即  $B$  的特征值就是  $A_i (1 \leq i \leq n)$  特征值的全体,当然有

$$(A) = (B) = \max_{1 \leq i \leq n} (A_i).$$

证毕

#### 参考文献:

- [ 1 ] Bernd Hiirtgen, Thomas Hain. On the convergence of fractal transforms [A]. Proc of 1994 IEEE Inter Conf on Acoustics, Speech, and Signal Processing [C]. Adelaide, Australia: IEEE 1994. 561 - 564.
- [ 2 ] Bernd Hirtgen. Contractivity of fractal transforms for image coding[J]. Electronics Letters 30th September 1993, 29(20): 1794 - 1750.
- [ 3 ] Bernd Hiirtgen, Stephan F Simon. On the problem of convergence in fractal coding schemes[A]. Proc of 1994 First IEEE Inter Conf on Image Processing [C]. Austin, Texas, USA: IEEE 1994. 13 - 16.
- [ 4 ] Kominek J. Convergence of fractal encoded images[A]. Proc of 1995 IEEE Data Compression Conference [C]. U. tah, USA: IEEE, 1995. 242 - 251.
- [ 5 ] Z Baharav, D Malah. Hierarchical interpretation of fractal image coding and its applications[A]. Proc of 1993 IEEE Inter. Conf. on Digital Signal Processing [C]. Cyprus: IEEE, 1993. 190 - 195.
- [ 6 ] Alfred V Aho, John E Hopcroft, Jeffrey D Ullman. The Design and Analysis of Computer Algorithms [M]. USA: Addison-Wesley Publishing Company, 1976. 189 - 195.

#### 作者简介:



俞璐女, 1973 年出生于长春, 解放军理工大学通信工程学院讲师, 现在东南大学无线电工程系攻读博士学位, 研究方向为信号与信息处理。



吴乐南男, 1952 年出生于福建, 东南大学无线电工程系教授, 博士生导师, 从事多媒体信息处理和数据压缩的研究与开发工作。