混合进制复制生成序列的相关函数

张凤元[1] ,吴今培[1,2] ,张其善[1]
(1. 北京航空航天大学电子信息工程学院 ,北京 100083 ;2. 五邑大学电子信息工程学院 ,广东江门 529020)

摘　要: 介绍了以混合进制码为复制信息 ,用平移复制生成多复数值序列的方法 ,讨论了复制生成序列的性质和复制生成序列的相关函数 ,给出了两个生成序列的互相关函数值恒为零的条件 ,最后给出了一个复制信息的选取准则 ,根据这个准则可以得到一个两两之间互相关函数值恒为零的序列族.

关键词: 序列; 互相关函数; 复制生成; 混合进制码
中图分类号: TN911.7　　**文献标识码**: A　　**文章编号**: 0372-2112 (2004) 09-1472-03

The Correlation Functions of Sequences Generated by Hybrid Code Copying

ZHANG Feng-yuan[1] ,WU Jin-pei[2] ,ZHANG Qi-shan[1]
(1. *Bejing University of Aeronautics and Astronautics , Beijing* 100083 , *China ;*
2. *School of electronics and information engineering , Wuyi University , Jiangmen , Guangdong* 529020 , *China)*

Abstract : The method of shift-copy generating sequence by hybrid code copy information is presented. The cross correlation function and property of sequence are also discussed. The condition that cross correlation function of two generating sequence is always zero is given. At last ,the selection criteria of copy information are given ,according to which a sequence family can be found where cross correlation function is always zero.

Key words : sequence ;correlation function ;copy generation ;hybrid code

1　引言

相关技术在通讯中有着广泛的用途 ,这时由于相关函数的许多特性所致. 在多路传输等现代通信技术中 ,为了能够实现多信号的传输及相关接收 ,需要一定数量的具备良好相关函数特性的离散序列. 在最佳离散信号的设计选择中 ,如何使信号的自相关函数尽可能地逼近一个脉冲函数、而互相关函数值恒为零 ,是一个十分重要的问题. 从物理意义上讲 ,使自相关函数逼近一个脉冲函数的主要目的是使我们能够很容易地将信号与它的移位信号区分开来、使互相关函数值恒为零的目的是使我们能够很容易地将一个信号与另一信号或它的移位信号区分开来. 离散信号的设计方法多种多样 ,我们这里将介绍以混合进制码为复制信息 ,用平移复制方法生成多复数值信号序列 ,并讨论复制生成序列的性质和复制生成序列的相关函数 ,给出两个生成序列的互相关函数值恒为零的条件 ,最后给出一个复制信息的选取准则 ,根据这个准则可以得到一个两两之间互相关函数值恒为零的序列族. 这样的离散时间信号或序列族可望在雷达、声纳、CDMA 通信系统及其它科技和工程领域得到广泛的应用.

2　以 q 位混合进制码为复制信息复制生成序列的方法和生成序列的性质

给定 q 个正整数 $p_i \ge 2$, $i = 0,1,2,\cdots,q-1$,对于任给非负整数 $m < P_q$,其中 $P_q = \prod_{i=0}^{q-1} p_i$,如果 $m = \sum_{i=1}^{q-1} m_i P_i$,其中 $m_i \in \{0,1,\cdots,p_i-1\}$, $i = 0,1,2,\cdots,q-1$, $P_0 = 1$, $P_i = \prod_{s=0}^{i-1} p_s$, $i = 1,2,\cdots,q-1$,则 m 的 q 位混合 $(p_{q-1},p_{q-2},\cdots,p_1,p_0)$ 进制自然码表示为 $m = (m_{q-1},m_{q-2},\cdots,m_1,m_0)$.

一般地 ,任意给定 q 位混合 $(p_{q-1},p_{q-2},\cdots,p_1,p_0)$ 进制码 $(m_{q-1},m_{q-2},\cdots,m_1,m_0)$,其中 $m_i \in \{0,1,\cdots,p_i-1\}$, $i = 0,1,2,\cdots,q-1$,则以 q 位混合 $(p_{q-1},p_{q-2},\cdots,p_1,p_0)$ 进制码 $(m_{q-1},m_{q-2},\cdots,m_1,m_0)$ 为复制信息 ,用平移复制方法生成 P_q 长复数值信号序列的步骤如下[1] :

(1) 取初始被复制序列为 +1 ,并令 $\omega_s = e^{(2\pi/p_s)i}$, $s = 0,1,2,\cdots,q-1$.

(2) 依据 q 位复制信息码 ,共进行 q 个周期的平移复制.

第一个周期的复制信息是 m_{q-1} ,平移复制完成后生成长度为 p_{q-1} 的序列 :

$\{1,\omega_{q-1}^{m_{q-1}},\omega_{q-1}^{2m_{q-1}},\cdots,\omega_{q-1}^{(p_{q-1}-1)m_{q-1}}\}$,记为 M_1.

第二个周期的复制信息是 m_{q-2} ,以 M_1 为被复制序列 ,复制完成后得长度为 $p_{q-1} \cdot p_{q-2}$ 的序列 :

$\{M_1,\omega_{q-2}^{m_{q-2}}M_1,\omega_{q-2}^{2m_{q-2}}M_1,\cdots,\omega_{q-2}^{(p_{q-2}-1)m_{q-2}}M_1\}$,记为 M_2 ,其中记号 $\omega_{q-2}^{im_{q-2}}M_1$, $i = 1,2,\cdots,p_{q-2}-1$,表示子序列 M_1 的每个元素分别乘以 $\omega_{q-2}^{im_{q-2}}$ 后所得的子序列 ,以下记号意义相同. 依次类推.

收稿日期:2003-07-17 ;修回日期:2004-04-08
基金项目:国家自然科学基金(No. 60372018)

第 q 个周期的复制信息是 m_0,以 M_{q-1} 为被复制序列,复制完成后得长度为 P_q 的序列:

$\{M_{q-1}, \omega_0^{m_0} M_{q-1}, \omega_0^{2m_0} M_{q-1}, \cdots, \omega_0^{(p_0-1)m_0} M_{q-1}\}$,记为 M_q.

以 q 位混合进制码为复制信息复制生成的序列 M_q 中,序列中的每个元素都是模为 1 的复数. 它有以下性质.

性质 1　设以 q 位混合 $(p_{q-1}, p_{q-2}, \cdots, p_1, p_0)$ 进制码 $(m_{q-1}, m_{q-2}, \cdots, m_1, m_0)$ 为复制信息,平移复制生成的序列是 M_q,如果 $m_{k-1} = m_{k-2} = \cdots = m_0 = 0$,则数 $\prod_{s=k}^{q-1} p_s$ 是 P_q 长序列 M_q 的一个周期.

证明　由复制方法知,前 $q-k$ 个周期的平移复制完成后得长度为 $\prod_{s=k}^{q-1} p_s$ 的子序列 M_{q-k},由于 $m_{k-1} = m_{k-2} = \cdots = m_0 = 0$,因此第 $q-k+1$ 个周期的平移复制完成后得子序列 $M_{q-k+1} = \{M_{q-k}, M_{q-k}, \cdots, M_{q-k}\}$. 同理完成剩余复制过程,最后得长度为 $P_q = \prod_{i=0}^{q-1} p_i$ 的序列 M_q. 显然,序列 M_q 是子序列 M_{q-k} 的重复排列,$\prod_{s=k}^{q-1} p_s$ 是序列 M_q 的一个周期,证毕.

性质 2　设以 q 位混合 $(p_{q-1}, p_{q-2}, \cdots, p_1, p_0)$ 进制码 $(m_{q-1}, m_{q-2}, \cdots, m_1, m_0)$ 为复制信息,平移复制生成的 P_q 长序列是 M_q,则序列 M_q 可表示成如下形式:

$M_q = \{M_{q-1}, \omega_0^{m_0} M_{q-1}, \omega_0^{2m_0} M_{q-1}, \cdots, \omega_0^{(p_0-1)m_0} M_{q-1}\}$

对任意的整数 τ,将序列 M_q 循环移 τ 位后所得序列记为 N_q,则必有:

$N_q = \{N_{q-1}, \omega_0^{m_0} N_{q-1}, \omega_0^{2m_0} N_{q-1}, \cdots, \omega_0^{(p_0-1)m_0} N_{q-1}\}$,其中 N_{q-1} 是 N_q 的前 $\prod_{s=1}^{q-1} p_s$ 个元素组成的子序列.

证明　前 $q-1$ 个周期的平移复制完成后得子序列 M_{q-1},最后一个周期的平移复制完成后得序列 M_q,若记 $M_{q-1} = \{x_1, x_2, \cdots, x_D\}$,其中 $D = \prod_{s=1}^{q-1} p_s$,则序列 M_q 可写成:

$\{x_1, \cdots, x_D, \omega_0^{m_0} x_1, \cdots, \omega_0^{m_0} x_D, \omega_0^{2m_0} x_1, \cdots, \omega_0^{2m_0} x_D, \cdots, \omega_0^{(p_0-1)m_0} x_1, \cdots, \omega_0^{(p_0-1)m_0} x_D\}$

对任意的整数 τ,将序列 M_q 循环移 τ 位后所得序列记为 N_q. 首先考虑序列 M_q 的左循环移 τ 位的结果.

当 $\tau = 0$ 时,结论显然成立.

当 $\tau = s \cdot D + d$,其中 $0 \le s \le p_0 - 1, 0 \le d \le D$, s, d 为整数时. 如果 $d = 0$,则有

$$N_q = \{\omega_0^{sm_0} M_{q-1}, \cdots, \omega_0^{(p_0-1)m_0} M_{q-1}, M_{q-1}, \omega_0^{m_0} M_{q-1}, \cdots, \omega_0^{(s-1)m_0} M_{q-1}\}$$

令 $N_{q-1} = \omega_0^{sm_0} M_{q-1}$,因 $\omega_0 = e^{(2\pi/p_0)i}$, $\omega_0^{p_0} = 1$,利用等式 $\omega_0^{-t} = \omega_0^{p_0-t}$,则有

$$N_q = \{N_{q-1}, \omega_0^{m_0} N_{q-1}, \omega_0^{2m_0} N_{q-1}, \cdots, \omega_0^{(p_0-1)m_0} N_{q-1}\}$$

如果 $d \neq 0$,则移位后的序列 N_q 为

$\{\omega_0^{sm_0} x_{d+1}, \cdots, \omega_0^{sm_0} x_D, \omega_0^{(s+1)m_0} x_1, \cdots, \omega_0^{(s+1)m_0} x_d, \omega_0^{(s+1)m_0} x_{d+1}, \cdots, \omega_0^{(s+1)m_0} x_D, \omega_0^{(s+2)m_0} x_1, \cdots, \omega_0^{(s+2)m_0} x_d, \cdots, \omega_0^{(p_0-1)m_0} x_D, x_1, \cdots, \omega_0^{(s-1)m_0} x_{d+1}, \cdots, \omega_0^{(s-1)m_0} x_D, \omega_0^{sm_0} x_1, \cdots, \omega_0^{sm_0} x_d\}$

令 $N_{q-1} = \{\omega_0^{sm_0} x_{d+1}, \cdots, \omega_0^{sm_0} x_D, \omega_0^{(s+1)m_0} x_1, \cdots, \omega_0^{(s+1)m_0} x_d\}$,则有

$$N_q = \{N_{q-1}, \omega_0^{m_0} N_{q-1}, \omega_0^{2m_0} N_{q-1}, \cdots, \omega_0^{(p_0-1)m_0} N_{q-1}\}$$

所以当 $0 \le \tau \le P_q$,将序列 M_q 循环移 τ 位时,所证结论成立.

同理可证 $\tau > P_q$,将序列 M_q 循环移 τ 位时,所证结论成立. 循环右移 τ 位时证明类似. 证毕.

3　复制生成序列的相关函数

我们知道,对于两个长为 n 的复数值序列 $a = \{a_0, a_1, \cdots, a_{n-1}\}$ 和 $b = \{b_0, b_1, \cdots, b_{n-1}\}$, a 的 n 周期自相关函数定义为 $R_a(\tau) = \sum_{i=0}^{n-1} a_i \bar{a}_{(i+\tau) \bmod n}$, a 和 b 的 n 周期互相关函数定义为 $R_{a,b}(\tau) = \sum_{i=0}^{n-1} a_i \bar{b}_{(i+\tau) \bmod n}$,其中 $\bar{a}_j$ 是 a_j 的共轭复数[2]. 由此定义,容易推得如下性质.

性质 3　如果两个长度为 n 的复数值序列 $a = \{a_0, a_1, \cdots, a_{n-1}\}$ 和 $b = \{b_0, b_1, \cdots, b_{n-1}\}$ 有共同的周期 d,则 a 和 b 的 n 周期互相关函数为 $R_{a,b}(\tau) = \frac{n}{d} \cdot \sum_{i=0}^{d-1} a_i \bar{b}_{(i+\tau) \bmod d}$

为了讨论方便,对于复数值序列 $a = \{a_0, a_1, \cdots, a_{n-1}\}$ 和 $b = \{b_0, b_1, \cdots, b_{n-1}\}$,约定用记号 $a.b$ 表示 $\sum_{i=0}^{n-1} a_i \bar{b}_i$,即 $a \cdot b = \sum_{i=0}^{n-1} a_i \bar{b}_i$. 显然有 $R_{a,b}(\tau) = a \cdot c$,其中序列 c 是序列 b 循环移 τ 位后所得序列(τ 为整数, $\tau > 0$,对应循环左移 τ 位; $\tau < 0$,对应循环右移 $-\tau$ 位).

性质 4　设分别以 q 位混合 $(p_{q-1}, p_{q-2}, \cdots, p_1, p_0)$ 进制码 $(m_{q-1}, m_{q-2}, \cdots, m_1, m_0)$ 和 $(n_{q-1}, n_{q-2}, \cdots, n_1, n_0)$ 为复制信息,平移复制生成的 $P_q = \prod_{i=0}^{q-1} p_i$ 长序列是 M_q 和 N_q. 如果 $m_0 = 0$, $n_0 \neq 0$,则 M_q 和 N_q 的 P_q 周期互相关函数恒为零,即对任意整数 τ, $R_{M_q,N_q}(\tau) = 0$.

证明　由于复制信息 $m_0 = 0$,平移复制生成的序列 M_q 可表示为:

$$M_q = \{M_{q-1}, M_{q-1}, \cdots, M_{q-1}\}$$

而复制信息 $n_0 \neq 0$,平移复制生成的序列 N_q 可表示为:

$$N_q = \{N_{q-1}, \omega_0^{n_0} N_{q-1}, \omega_0^{2n_0} N_{q-1}, \cdots, \omega_0^{(p_0-1)n_0} N_{q-1}\}$$

由性质 2 知,对任意的整数 τ,若将序列 N_q 循环移 τ 位所得序列记为 Y_q,则 Y_q 可表示为:

$$Y_q = \{Y_{q-1}, \omega_0^{n_0} Y_{q-1}, \omega_0^{2n_0} Y_{q-1}, \cdots, \omega_0^{(p_0-1)n_0} Y_{q-1}\}$$

利用前面约定的记号,对任意的整数 τ,序列 M_q 和 N_q 的 P_q 周期互相关函数为:

$$\begin{aligned} R_{M_q,N_q}(\tau) &= M_q \cdot Y_q \\ &= \{M_{q-1}, M_{q-1}, M_{q-1}, \cdots, M_{q-1}\} \cdot \\ &\quad \{Y_{q-1}, \omega_0^{n_0} Y_{q-1}, \omega_0^{2n_0} Y_{q-1}, \cdots, \omega_0^{(p_0-1)n_0} Y_{q-1}\} \\ &= (1 + \bar{\omega}_0^{n_0} + \bar{\omega}_0^{2n_0} + \cdots + \bar{\omega}_0^{(p_0-1)n_0}) M_{q-1} \cdot Y_{q-1} \end{aligned}$$

由于 $n_0 \neq 0$, $\omega_0 = e^{(2\pi/p_0)i}$, $\bar{\omega}_0 = \omega_0^{p_0-1}$, 所以有 $1+\bar{\omega}_0^{n_0}+\bar{\omega}_0^{2n_0}+\cdots+\bar{\omega}_0^{(p_0-1)n_0}=0$, 从而得

$$R_{M_q,N_q}(\tau)=0 \qquad 证毕.$$

利用性质 4, 性质 1 及性质 3 容易得到如下性质.

性质 5 设分别以 q 位混合 $(p_{q-1}, p_{q-2}, \cdots, p_1, p_0)$ 进制码 $(m_{q-1}, \cdots, m_k, 0, 0, \cdots, 0)$ 和 $(n_{q-1}, \cdots, n_k, 0, 0, \cdots, 0)$ 为复制信息, 平移复制生成的序列是 M_q 和 N_q. 如果 $m_k=0$, $n_k \neq 0$, 则对任意的整数 τ, 序列 M_q 和 N_q 的 P_q 周期互相关函数恒为零, 即 $R_{M_q,N_q}(\tau)=0$.

给定 q 个正整数 $p_i \geq 2$, $i=0,1,2,\cdots,q-1$, 对于任给非负整数 $m<P_q$, $P_q=\prod_{i=0}^{q-1}p_i$, 由参考文献[1]知, 以非负整数 m 的 q 位混合 $(p_{q-1}, p_{q-2}, \cdots, p_1, p_0)$ 进制自然码 $(m_{q-1}, m_{q-2}, \cdots, m_1, m_0)$ 为复制信息平移复制生成的序列是 P_q 长离散广义沃尔什函数, 记为 $GW(m,t)$. 关于前 P_q 个 P_q 长离散广义沃尔什函数 $GW(m,t)$ 的相关函数特性, 我们有如下定理.

定理 1 对于任意两个 P_q 长离散广义沃尔什函数 $GW(m,t)$ 和 $GW(n,t)$, 如果序号 $m=s\cdot\prod_{i=0}^{l}p_i$, 而 p_{l+1} 不能整除 s; $n=t\cdot\prod_{i=0}^{k}p_i$, 而 p_{k+1} 不能整除 t, 其中, $k\neq l$, l,k,s,t 均为非负整数, 则 $GW(m,t)$ 和 $GW(n,t)$ 的 P_q 周期互相关函数恒为零, 即对任意的整数 τ, $R_{GW(m,t),GW(n,t)}(\tau)=0$.

证明 显然 m 和 n 均小于 P_q. 因为 $m=s\cdot\prod_{i=0}^{l}p_i$, 而 p_{l+1} 不能整除 s, 所以有:

m 的 q 位混合进制自然码 $(m_{q-1}, m_{q-2}, \cdots, m_1, m_0)$ 中, $m_{l+1}\neq 0$, $m_l=m_{l-1}=\cdots=m_0=0$. 同样, n 的 q 位混合进制自然码 $(n_{q-1}, n_{q-2}, \cdots, n_1, n_0)$ 中, $n_{k+1}\neq 0$, $n_k=n_{k-1}=\cdots=n_0=0$. 因为 $k\neq l$, 不妨设 $k<l$, 则有 $m_{k+1}=m_k\cdots=m_0=0$, 而 $n_{k+1}\neq 0$, 由性质 5 知, $GW(m,t)$ 和 $GW(n,t)$ 的 P_q 周期互相关函数恒为零, 即对任意的整数 τ, $R_{GW(m,t),GW(n,t)}(\tau)=0$. 证毕.

给定 q 个正整数 $p_i\geq 2$, $i=0,1,2,\cdots,q-1$, 将所有小于 P_q ($P_q=\prod_{i=0}^{q-1}p_i$) 的自然数集分为子集 $A_0, A_1, \cdots, A_{q-1}$ 之并, 其中

A_0: $A_0=\{m \mid m=s$, p_0 不能整除 s, s 是非负整数$\}$

A_k: $A_k=\{m \mid m=s\cdot\prod_{i=0}^{k-1}p_i$, p_k 不能整除 s, s 是非负整数$\}$, $k=1,2,\cdots,q-1$.

则由定理 1 我们可有如下定理.

定理 2 任取 q 个正整数 $a_i\in A_i$, $i=0,1,2,\cdots,q-1$, 则由 q 个 P_q 长离散广义沃尔什函数组成的序列族 $\{GW(a_i,t)$, $i=0,1,2,\cdots,q-1\}$ 中, 任意两个序列的 P_q 周期互相关函数恒为零.

对于给定的 q 位混合 $(p_{q-1}, p_{q-2}, \cdots, p_1, p_0)$ 进制码 $(m_{q-1}, m_{q-2}, \cdots, m_1, m_0)$, 如果 $p_{q-1}=p_{q-2}=\cdots=p_1=p_0=p$, 则对应 p 进制码, 特别 $p=2$ 时, 对应二进制码, 显然, 本文结论对于 p 进制和二进制的复制生成序列, 结论亦是成立的.

4 结束语

目前在信号序列的设计中, 对智能码(smart code)的研究是一个重要的研究方向, 通信工程中基于智能码的 CDD 系统性能优良, 理论上 CDD 系统容量接近香农理论的极限[3]. 对复制序列的研究正是智能码研究的一个方面, 是一项创新性的研究工作, 用复制方法复制生成的离散时间信号或序列族可望在雷达、声纳、CDMA 通信系统及其它科技和工程领域得到广泛的应用.

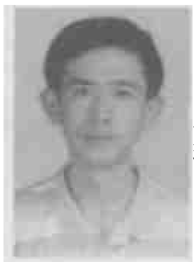
参考文献:

[1] 张其善, 张凤元, 吴今培. 混合进制广义沃尔什函数的复制生成理论[J]. 电子学报, 2001, 29(12A): 1944 - 1946.

[2] Fan PZ, Darnell M. Sequence Design for Communications Applications [M]. London: Research Studies Press Ltd, John Wiley & Sons Inc, 1996.

[3] Lee WCY. The most spectrum-efficient duplexing system: CDD [J]. IEEE Communication Magazine, March 2002, 40(3): 163 - 166.

作者简介:



张凤元 男, 汉族, 1965 年 12 月生于河北省尚义县, 副教授, 现为北京航空航天大学电子信息工程学院在读博士生, 主要从事信息传输与处理, 信息安全方面的研究工作.

吴今培 男, 汉族, 1937 年生于江西省吉安市人, 五邑大学教授、博士生导师, 曾任五邑大学副校长, 湖南省电子学会副理事长等职, 现任中国振动工程学会理事暨动态信号分析专业委员会委员、中国自动化学会智能自动化专业委员会委员、中国系统工程学会交通运输系统工程分学会理事, 现受聘为北京航空航天大学通信与信息系统专业的博士生导师已联合培养博士研究生多名. 主要从事智能信息处理, 智能控制方面的研究.

张其善 男, 汉族, 1936 年生于浙江浦江, 北京航空航天大学教授、博士生导师, 国家级有突出贡献的科技专家, 中国电子学会会士, 美国 IEEE 高级会员, 主要从事信息传输与处理, GPS 等方面的研究工作.