

# 微弱正弦信号幅值混沌检测的一种改进方案

路 鹏, 李 月

(吉林大学通信工程学院, 吉林长春 130025)

**摘要:** 本文根据混沌系统在特定状态下对参数的敏感性, 提出了一种检测微弱正弦信号幅值的改进方案. 该方案采用线性最小二乘法找到了待测微弱信号幅值与混沌动力系统特征指数之间的关系, 给出了弱信号幅值的估计式. 理论与数值仿真实验表明该方案的估计精度较高, 计算量小, 易于工程实现.

**关键词:** 微弱正弦信号; 混沌检测; 线性最小二乘法

**中图分类号:** TN911.7      **文献标识码:** A      **文章编号:** 0372-2112(2005)03-0527-03

## A Modified Chaos Based Weak Sinusoidal Signal Amplitude Detection Approach

LU Peng, LI Yue

(College of Communication Engineering, Ji Lin University of China, Changchun, Jilin 130025, China)

**Abstract:** We presented a modified approach of weak sinusoid signal detection by using the sensitive dependence on parameters of chaotic system. Through Linear Least Square (LS) method, we find the relationship between the amplitude of weak signal and the characteristic exponent of chaotic dynamical system; we also give the estimator a weak signal amplitude. Theory and simulation study have shown that this approach has high accuracy estimation and lower computational complexity and is easy to realize in engineering.

**Key words:** weak sinusoidal signal; chaos detection; linear least square method

### 1 引言

近年来, 伴随着混沌理论在现代科学各领域中的深入研究与广泛应用, 人们已开始将混沌理论用于微弱信号的检测, 并根据研究与应用中不同类型的背景噪声形成了多种用混沌进行微弱信号检测的理论与方法<sup>[1~3]</sup>. 其中使用混沌振子检测各种复杂噪声背景下微弱信号的方法, 因其设备成本低、物理意义明显等优点而越来越受到人们的关注<sup>[4]</sup>.

由于混沌动力系统的动力学行为对初始参数的极端敏感性, 使得可以利用混沌振子进行微弱信号检测和提取. 在白噪声或色噪声背景下, 对微弱正弦信号的提取主要有两种方式: 一种是利用待测信号使系统的动力学行为从混沌状态转变到大尺度周期状态的相平面轨迹的变化进行微弱信号检测. 已有的研究<sup>[5]</sup>表明, 即使对信噪比高达-111.46dB的正弦信号, 该方法仍具有良好的检测性能. 应用这种方法的关键之处在于对系统相变的准确判别, 但这在实际操作中并不容易把握, 因而影响了该方法的有效性. 另一种方法<sup>[6]</sup>是通过建立处于临界分岔状态处系统动力学行为的特征指数与待测信号的信号参量之间的关系实现对信号参量的估计. 这种方法的优点在于对系统动力学行为判别准确, 信号参量估计精度高, 原理简单. 缺点在于信号参量估计采用非线性最小二乘法(NLLS), 使得运算量大大幅度提高, 并且由于非线性最小二乘法不一定保证估计值达到全局最优解, 因此该方法不便于工程实现. 如果能够找到一种快速的、具有全局最优的估计方法, 将使估计特性得到较大提高. 本文针对第二种方法存在的

计算复杂度较高的问题, 提出一种信号幅值估计的线性化方法. 考虑 Duffing-Holmes 型混沌振子:

$$x(t) + kx(t) - x(t) + x^3(t) = f \cos(\omega t) \quad (1)$$

其中  $k$  为阻尼比,  $-x(t) + x^3(t)$  为非线性恢复力,  $f \cos(\omega t)$  为周期策动力.

利用该混沌振子对微弱正弦信号十分敏感的特性<sup>[4,7]</sup>, 我们将该非线性系统的系统参数设置在其动力学行为的临界分岔处, 使得系统混沌状态时对参数的敏感性得以保留, 利用这一特性通过对系统动力学行为的定量描述, 对深陷在白噪声背景下的正弦信号幅值进行估计. 理论分析及仿真实验表明, 该方法在一定的噪声等级下能以较高的精度估计出信号幅值, 同时具有较小的计算复杂度.

### 2 系统特征指数

#### 2.1 特征指数选取与计算

常用的衡量非线性动力系统动力学行为的特征指数有 Lyapunov 指数和 Floquet 指数. Lyapunov 指数需要在较大的时间范围内进行观测不便于对弱信号幅值进行估计, Floquet 指数观测周期短计算相对容易. 由一般微分方程理论可知, 对于一个任意二阶线性微分方程:

$$\frac{d^2 y}{dt^2} + f(t) \frac{dy}{dt} + g(t)y = 0 \quad (2)$$

有两个线性独立的解. 根据 Floquet 理论, 如果  $f(t)$  和  $g(t)$  都在时间  $t$  内是以  $T$  为周期的, 则方程的解会有如下形式<sup>[8]</sup>:

$$y(t) = e^{\lambda P(t)} \quad (3)$$

其中  $P(t)$  也是以  $T$  为周期的函数. 因此, 解的稳定性就完全由 Floquet 指数  $\lambda$  决定. 需要指出的是 Floquet 指数用来衡量系统周期性动力学行为, 系统参数必须设置在临界分岔处以保证获得周期性动力学行为, 同时系统仍具有对初始参数的极端敏感性, 故使用 Floquet 指数是合适的. 考虑式(1)的变分形式:

$$\Delta x + k\Delta x - e(t)\Delta x = 0 \quad (4)$$

其中  $e(t) = 1 - 3x^2(t)$ , 式(4)应该具有周期解, 根据线性微分方程理论得到由式(4)的基本解矩阵  $F(t, 0)$  构成微分方程:

$$\frac{dF(t, 0)}{dt} = A(t)F(t, 0), F(0, 0) = I \quad (5)$$

其中  $A(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ e(t) & -k \end{bmatrix}$  是周期为  $2\pi$  的循环矩阵. 令  $F(t, 0) = \begin{bmatrix} a(t) & b(t) \\ c(t) & d(t) \end{bmatrix}$ , 于是得到如下的微分方程组:

$$\begin{cases} \dot{a}(t) = c(t) \\ \dot{b}(t) = d(t) \\ \dot{c}(t) = a(t) \times e(t) - kc(t) \\ \dot{d}(t) = b(t) \times e(t) - kd(t) \end{cases} \quad (6)$$

可见式(6)是一个变系数微分方程组 ( $e(t) = 1 - 3x^2(t)$ ), 因此需求式(4)获得  $x(t)$ .

应用四阶龙格-库塔方法在一个周期  $T$  内求解该微分方程组得到  $F(T, 0)$ , 对该矩阵进行特征分解  $\begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix}$ , 为特征值矩阵, 特征值  $\lambda_i (i = 1, 2)$  就是该系统的 Floquet 指数.

## 2.2 特征指数与待测信号的关系

从  $F(T, 0)$  求得的 Floquet 指数只与系统的周期轨道特性有关, 由于 Duffing Holmes 型混沌振子对噪声有极高的免疫力, 其动力学行为只与外加周期驱动力的大小有关<sup>[7]</sup>. 构造如下推广的 Floquet 指数:  $\mu = |\operatorname{Re}(\lambda_1)| + |\operatorname{Im}(\lambda_1)|$  (7)

按照 2.1 中的方法选取积分步长为 0.01 (本文中所有积分步长均为 0.01), 计算相应的推广 Floquet 指数. 系统驱动力与推广 Floquet 指数关系如图 1 所示 ( $f$  为系统周期策动力幅值,  $\mu$  为推广的 Floquet 指数, 右图是左图阴影处的局部放大图). 图中看出, 在 0.83~0.85 处有一近似线性化区间, 0.840 处于该区间中点.

调整系统周期策动力幅值从 0.83~0.85, (此区间是系统动力学行为临界分岔处, 系统对参数敏感的性质可以得到保留), 利用插值方法求出该处线性方程:

$$\mu = \mu_0 + \delta(f - f_0) \quad (8)$$

其中  $\mu$  为推广 Floquet 指数,  $\mu_0 = 0.1268$ ,  $\delta = 6.82$ ,  $f_0 = 0.840$ .

## 3 幅值估计与算法

将带有观测白噪声的正弦信号直接加到方程(1)的右端:

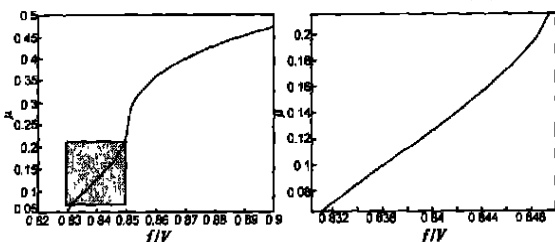


图 1 系统周期策动力幅值与推广 Floquet 指数关系

$\ddot{x}(x) + kx(t) - x(t) + x^3(t) = f_0 \cos(t) + a \cos(t + \text{lag}) + n(t)$  (9)  
式中  $f_0 = 0.84$ ,  $\text{lag}$  是为了进行幅值估计而引入的时间延迟, 参数  $a$  是待测信号的幅值. 通过求解不同延迟参数时系统的推广 Floquet 指数我们可以对系统幅值进行估计. 延迟  $\text{lag}$  可以根据具体实验选取. 系统总的驱动力为:

$$\begin{aligned} \rho(t, \text{lag}) &= f_0 \cos(t) + a \cos(t + \text{lag}) + n(t) \\ &= f(\text{lag}) \cos(t + \theta(\text{lag})) + n(t) \end{aligned} \quad (10)$$

$$\text{其中 } f(\text{lag}) = \sqrt{f_0^2 + a^2 + 2f_0 a \cos(\text{lag})} \quad (11)$$

$$\theta(\text{lag}) = a \sin(\text{lag}) / (f_0 + a \cos(\text{lag})) \quad (12)$$

式(11)直接影响推广 Floquet 指数的计算, 但其中信号幅值  $a$  含于根号内不便于对其进行估计, 为此我们对式(11)进行线性化

$$\begin{aligned} f(\text{lag}) &= \sqrt{f_0^2 + a^2 + 2f_0 a \cos(\text{lag})} \\ &= \sqrt{(f_0 + a \cos(\text{lag}))^2 + a^2 \sin^2(\text{lag})} \\ &= |f_0 + a \cos(\text{lag})| \sqrt{1 + \frac{a^2 \sin^2(\text{lag})}{(f_0 + a \cos(\text{lag}))^2}} \end{aligned} \quad (13)$$

因为  $a \ll f_0$ ,  $\frac{a \sin(\text{lag})}{f_0 + a \cos(\text{lag})} \approx 0$ , 所以

$$f(\text{lag}) \approx f_0 + a \cos(\text{lag}) \quad (14)$$

由式(8)和式(14)可以看出系统观测值  $\mu$  (推广的 Floquet 指数) 与待测信号幅值  $a$  是一线性关系式, 由此, 我们可以应用线性最小二乘法对待测信号幅值  $a$  进行估计, 为此我们构造目标函数  $Q = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N [\mu(\text{lag}_i) - \mu_0 - \delta(f(\text{lag}_i) - f_0)]^2$  (15)

$$\text{为简便, 令: } X(\text{lag}_i) = \mu(\text{lag}_i) - \mu_0 \quad (16)$$

$$\begin{aligned} Q &= \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N [X(\text{lag}_i) - \delta(f(\text{lag}_i) - f_0)]^2 \\ &= \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N [X^2(\text{lag}_i) + \delta^2 a^2 \cos^2(\text{lag}_i) - 2\delta a \cos(\text{lag}_i) X(\text{lag}_i)] \end{aligned} \quad (17)$$

计算  $\partial Q / \partial a$ , 得到:

$$\begin{aligned} \frac{\partial Q}{\partial a} &= \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N [2\delta^2 a \cos^2(\text{lag}_i) - 2\delta \cos(\text{lag}_i) X(\text{lag}_i)] \\ &= \frac{2\delta^2 a}{N} \sum_{i=1}^N [\cos^2(\text{lag}_i)] - \frac{2\delta}{N} \sum_{i=1}^N [\cos(\text{lag}_i) X(\text{lag}_i)] \end{aligned} \quad (18)$$

为使  $Q$  取得最小值, 令  $\frac{\partial Q}{\partial a} = 0$ , 得到:  $\frac{2\delta^2 a}{N} \sum_{i=1}^N \cos^2(\text{lag}_i)$

$(\text{lag}_i) = \frac{2\delta}{N} \sum_{i=1}^N [\cos(\text{lag}_i) X(\text{lag}_i)]$  求得幅值  $a$  的估计值:

$$\hat{a} = \frac{\sum_{i=1}^N \cos(\text{lag}_i) X(\text{lag}_i)}{\sum_{i=1}^N \cos^2(\text{lag}_i)} \quad (19)$$

从该表达式可以看出幅值  $a$  的估计得到了很大的简化, 这种形式十分有利于将来的工程实现. 同时由于本方法采用线性最小二乘法, 可以保证本方法收敛到全局最优解.

设延迟为  $\text{lag}_1, \text{lag}_2, \dots, \text{lag}_N$  并且它们等间隔分布, 分别计算  $N$  个推广 Floquet 指数  $\mu(\text{lag}_i) (i = 1, \dots, N)$ , 计算步骤如下:

(1) 系统稳化: 不经延迟直接将待测信号加入检测方程, 系统经短暂的运行最终稳定在大尺度周期状态上. 系统处于大尺度周期时的时域波形与相应的相平面轨迹见图 2. 在没有噪声的情况下, 周期轨道应该是一理想的环, 由于噪声的影响, 该环的边界显得有些粗糙.

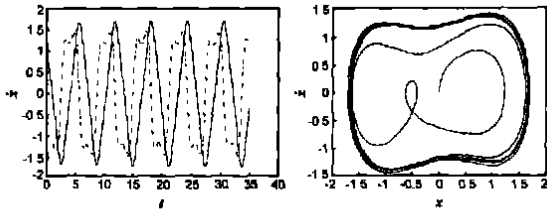


图 2 系统稳化过程时域波形与相轨迹

(2) 计算系统状态信号  $x(t): i = 1, \text{lag} = \text{lag}_i$ . 应用四阶龙格-库塔方法求解微分方程(9), 积分步长为 0.01. 参数  $\text{lag}_i$  的选取应保证参数估计误差尽量小.

(3) 计算 Floquet 指数: 计算 Floquet 指数时, 要求解变系数微分方程组(6), 我们通过插值方法计算出迭代区间中点的函数值, 对系统在一个大尺度周期内积分, 求出系统的一个推广 Floquet 指数  $\mu(\text{lag}_i)$ . (Floquet 指数的求解见 2.1)

(4)  $i = i + 1, \text{lag} = \text{lag}_{i+1}$ , 重复(2). 系统的运动状态已进入大尺度周期状态, 因此不必对系统重新稳化.

### 4 仿真分析

我们选取在加性白噪声中的幅值为 0.001V 的正弦信号作为待检测信号. 信号相位与系统内置信号  $f_0 \cos(t)$  相同, 同时选择不同的噪声等级  $\sigma = 0.02 + 0.005 \times i (i = 1, 2, \dots, 5)$ , 信号的微弱程度以  $20 \lg f_0 / \sigma$  来衡量, 并与文献[6]的实验数据相比对(见表 1):

表 1

信号	信号幅值 $a$	噪声等级	幅值估计 $\hat{a}$	
			LS 方法	NLLS 方法
S1	0.001	0.020	0.001039	0.001026
S2	0.001	0.025	0.001063	0.001130
S3	0.001	0.030	0.000876	0.001209
S4	0.001	0.035	0.000938	0.000925
S5	0.001	0.040	0.001029	0.000803
S6	0.001	0.045	0.001190	0.001240

从表 1 可见, 本方法对信号幅值采用线性最小二乘估计, 并不会使幅度估计值

表 2

精度变差. 我们对该估计过程做 100 次独立实验, 计算幅值估计  $\hat{a}$  的估计方差  $\sigma_a$  并与文献[6]中估计方差作对比(见表 2, 图 5):

信号	噪声等级 $\sigma$	估计方差 $\sigma_a$	
		LS 方法	NLLS 方法
S1	0.020	0.000075	0.000137
S2	0.025	0.000089	0.000173
S3	0.030	0.000126	0.000188
S4	0.035	0.000207	0.000206
S5	0.040	0.000231	0.000225
S6	0.045	0.000254	0.000286

从表 2 及图 5 可见, 本文提出的方法对噪声等级有一定依赖性. 仿真实验表明: 当噪声等级小于 0.1 时本方法仍能检测出正弦信号的幅值.

### 5 结论

本文研究了一种利用混沌振子对微弱正弦信号进行检测的方案, 对于 Duffing-Holmes 型混沌振子, 当系统参

数处于临界分岔时, 其动力学行为既是大尺度周期的同时又能保证对参数的极端敏感性. 通过对所谓“参数的极端敏感性”建立定量的描述, 我们找到系统特征指数 Floquet 指数与系统参数即待测信号幅值之间的函数关系. 利用线性最小二乘的方法直接给出了信号幅值估计式, 该估计式具有全局最优解, 同时计算复杂度也比非线性最小二乘算法大为降低. 数值仿真实验表明, 尽管采用了线性最小二乘算法, 信号的幅值估计仍能达到很高的精度, 表明该方法是可行的.

### 参考文献:

[1] Donald L Bix, Stephen J Pipenberg. Chaotic oscillators and complex mapping feed forward networks (CMMFFNS) for signal detection in noisy environments[A]. IEEE International Joint Conference on Neural Networks Vol 2[C]. USA: IEEE, 1992. 881- 888.

[2] Wang Fuping, Guo Jingbo, Wang Zanji. Parameter estimation in chaotic interference[A]. IEEE Proceedings of ICSP2000[C]. USA: IEEE, 2000. 258- 264.

[3] Simon Haykin, Xiao Bo Li. Detection of signals in chaos[J]. Proceeding of the IEEE, 1999, 85(1): 95- 122.

[4] Guanyu Wang, Dajun Chen, Jianya Lin, Xing Chen. The application of chaotic oscillators to weak signal detection[J]. IEEE Transactions on Industrial Electronics, April, 1999, 46(2): 440- 444.

[5] 李月, 李宝俊, 石要武. 色噪声背景下微弱正弦信号的混沌检测[J]. 物理学报, March, 2003, 52(3): 526- 530.

[6] Guanyu Wang, Wei Zheng, Sailing He. Estimation of amplitude and phase of a weak signal by using the property of sensitive dependence of initial conditions of a nonlinear oscillator[J]. Signal Processing, 2002, 82(1): 103- 105.

[7] Hiroshi Kawakami. Bifurcation of periodic responses in forced dynamic nonlinear circuits: Computation of bifurcation values of the system parameters[J]. IEEE Trans Circuit System CAS 31, March, 1984, (3): 248- 260.

[8] G 桑森, R 康蒂. 非线性微分方程[M]. 北京: 科学出版社, 1983. 477- 478.

### 作者简介:



路 鹏 男, 1980 年 1 月出生于辽宁省沈阳市, 现为吉林大学通信工程学院研究生. 主要研究方向为基于混沌的弱信号检测技术研究. E-mail: globalview@126.com



李 月 女, 1958 年生于吉林长春, 博士. 现为吉林大学通信工程学院, 教授. 主要研究方向为微弱信号检测, 混沌性能及应用研究, 数字信号处理.

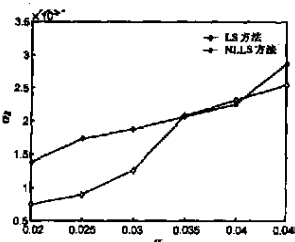


图 3 不同噪声等级下两种方法的估计方差比