

等式约束 FIR 滤波器设计的投影最小二乘算法

赖晓平

(山东大学威海分校信息工程学院, 山东威海 264209)

摘要: 本文考虑具有频域和时域等式约束的 FIR 滤波器设计问题, 提出一个非常有效的新算法——投影最小二乘算法. 该算法由两部分组成, 前一部分产生一个解析的最小二乘解, 后一部分将此解逐次投影到每个等式约束上. 该算法有两个显著特点: 一是目标函数的 Hessian 矩阵不要求正定; 二是由于采用平方根因子分解来计算增广 Hessian 矩阵及投影算子矩阵, 算法具有很好的数字稳定性. 以此算法为核心构成了一个迭代算法, 用于实现 FIR Nyquist 滤波器的 minimax 设计. 设计例子表明了所提算法的有效性和数字稳定性.

关键词: 约束 FIR 滤波器; 约束最小二乘问题; 投影最小二乘; Nyquist 滤波器

中图分类号: TN713 **文献标识码:** A **文章编号:** 0372-2112 (2005) 03-0541-04

Projected Least Squares Algorithms for Constrained FIR Filter Design with Linear Equality Constraints

LAI Xiao-ping

(School of Information Engineering, Shandong University at Weihai, Weihai, Shandong 264209, China)

Abstract: The constrained FIR filter design with equality constraints in time and frequency domain is considered in this paper. A projected least squares algorithm is presented. The algorithm consists of a least squares part providing an analytical initial solution, and a projection part that projects the initial least squares solution successively onto each equality constraint. An iterative procedure with the algorithm as the iteration core has been applied to minimax design of Nyquist filter. Design examples demonstrate the effectiveness and robustness of the proposed algorithms.

Key words: constrained FIR filter; constrained least squares problem; projected least squares; Nyquist filter

1 引言

在一些特定的应用场合, FIR 滤波器除满足一般的频率特性要求外, 还要求满足一些时域的和(或)频域的约束条件. 如在图象处理等应用中, 低通滤波器要求有单位直流增益; 在消除正弦干扰时, 要求滤波器在干扰信号频率处幅值为零; 数据传输系统中的脉冲成形滤波器以及多速率系统中的插值滤波器(Nyquist 滤波器), 要求其冲击响应除一点外间隔地取零值; 等等. 约束滤波器的优化设计问题就是选择滤波器系数使得滤波器在满足要求的约束条件下按某一准则逼近期望的频率特性. 过去几十年, 约束 FIR 滤波器的设计问题受到很多研究者的关注, 提出了许多好的算法. 广义 Remez 算法^[1]及其他改进的 Remez 算法^[2-6]可用于约束 FIR 滤波器的 minimax 设计, 这些算法一般用于处理频域约束. 线性规划算法^[7-9]可以方便地处理时域和频域约束, 但这类算法相当耗时. 逐次投影算法^[10-12]也可以方便有效地处理各种时域和频域约束, 但不能得到最优滤波器.

线性等式约束 FIR 滤波器的最小二乘设计可归结为线性

等式约束下二次函数的极小化问题. 本文提出一种投影最小二乘算法, 将增广目标函数的无约束极小点(最小二乘解)逐次投影到约束条件确定的可行域. 该算法不要求 Hessian 矩阵正定, 且采用平方根因子分解来计算增广 Hessian 矩阵和投影算子矩阵, 算法具有很好的数字稳定性. 以此算法为核心的一个迭代算法可用于线性等式约束 FIR 滤波器的 minimax 设计. Nyquist 滤波器的设计例子表明了本文所提算法的有效性和数字稳定性.

2 投影最小二乘算法

由于线性等式约束下 FIR 滤波器的最小二乘设计问题可化为线性等式约束下二次函数的极小化问题(参考本文第 3 节), 首先考虑如下线性等式约束下的二次函数极小化问题:

$$\min_{\alpha} 0.5 \alpha^T H \alpha - f^T \alpha \quad (1)$$

$$\text{subject to } A_i \alpha = b_i, i = 1, 2, \dots, m \quad (2)$$

其中 $\alpha \in R^n$ 为决策向量, $H \in R^{n \times n}$ 为对称非负的 Hessian 矩阵, $f \in R^n$, $A_i \in R^{1 \times n}$ 为约束系数行向量, $b_i \in R$ 为约束右端常数. 式(1)中的目标函数是一个二次函数, 式(2)中的约束是线

性约束. 对以上问题, 本文提出一个投影最小二乘算法, 如下示.

$$(1) \mathbf{H} = \mathbf{H} + \sum_{i=1}^m \mathbf{A}_i^T \mathbf{A}_i, \bar{\mathbf{f}} \equiv \mathbf{f} + \sum_{i=1}^m \mathbf{A}_i^T b_i.$$

$$(2) \mathbf{Q}(0) = \mathbf{H}^{-1}, \alpha(0) = \mathbf{Q}(0)\bar{\mathbf{f}}.$$

(3) 对 $i = 1, 2, \dots, m$,

$$\alpha(i) = \alpha(i-1) + \frac{\mathbf{Q}(i-1)\mathbf{A}_i^T}{\mathbf{A}_i\mathbf{Q}(i-1)\mathbf{A}_i^T} [b_i - \mathbf{A}_i\alpha(i-1)], \quad (4)$$

$$\mathbf{Q}(i) = \mathbf{Q}(i-1) - \frac{\mathbf{Q}(i-1)\mathbf{A}_i^T \mathbf{A}_i \mathbf{Q}(i-1)}{\mathbf{A}_i\mathbf{Q}(i-1)\mathbf{A}_i^T} \quad (5)$$

算法的第 1 步给 Hessian 矩阵 \mathbf{H} 加上一个附加项以增加其正定性. 称 \mathbf{H} 及 $0.5\alpha^T \mathbf{H}\alpha - \bar{\mathbf{f}}^T \alpha$ 为问题(1)(2)的一个增广 Hessian 矩阵和增广目标函数. 算法的第 2 步就是计算该增广目标函数的无约束极小点(最小二乘解).

容易验证, 对 $j = 1, 2, \dots, i, \mathbf{A}_j \mathbf{Q}(i) \mathbf{x} = 0$ 对任给的向量 \mathbf{x} 成立, 即 $\mathbf{Q}(i)$ 是把任一向量投影到子空间 $\{x | \mathbf{A}_j \mathbf{x} = 0, j = 1, 2, \dots, i\}$ 的投影算子矩阵. 还可验证, 对 $j = 1, 2, \dots, i, \mathbf{A}_j \alpha(i) = b_j$ 成立. 因此, 算法的第 3 步实际上就是将最小二乘解 $\alpha(0)$ 逐次投影到每个约束上, 使每个约束得到满足.

定理 1 若问题(1)(2)可行, 增广 Hessian 矩阵 \mathbf{H} 正定. 则问题有唯一解, 上面的投影最小二乘算法收敛到此唯一解.

证明 在目标函数(1)中加上 $0.5 \sum_{i=1}^m (\mathbf{A}_i \alpha - b_i)^2$, 容易证明问题(1)(2)等价于

$$\text{minimize}_{\alpha} 0.5 \alpha^T \mathbf{H}\alpha - \bar{\mathbf{f}}^T \alpha + 0.5 \sum_{i=1}^m b_i^2,$$

$$\text{subject to } \mathbf{A}_i \alpha = b_i, i = 1, 2, \dots, m$$

由于问题可行且 \mathbf{H} 正定, 上面的问题有唯一解, 从而问题(1)(2)有唯一解.

引进辅助目标函数

$$L(\alpha, \lambda) \equiv 0.5 \alpha^T \mathbf{H}\alpha - \bar{\mathbf{f}}^T \alpha + 0.5 \sum_{i=1}^m [b_i^2 + \lambda (\mathbf{A}_i \alpha - b_i)^2],$$

其中 $\lambda > 0$ 是一个非常大的实数. 由于 \mathbf{H} 正定, 辅助目标函数 $L(\alpha, \lambda)$ 有唯一的极小点.

利用式(3), 忽略常数项, 可等价地把 $L(\alpha, \lambda)$ 写成:

$$L(\alpha, \lambda) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^m \lambda (\mathbf{A}_i \alpha - b_i)^2 + \frac{1}{2} [\alpha - \alpha(0)]^T \mathbf{Q}^{-1}(0) [\alpha - \alpha(0)].$$

关于 α 进行极小化可得到下面的递推算法^[13]:

$$\alpha(i) = \alpha(i-1) + \frac{\mathbf{Q}(i-1)\mathbf{A}_i^T}{1 + \lambda \mathbf{A}_i\mathbf{Q}(i-1)\mathbf{A}_i^T} [b_i - \mathbf{A}_i\alpha(i-1)],$$

$$\mathbf{Q}(i) = \mathbf{Q}(i-1) - \frac{\lambda \mathbf{Q}(i-1)\mathbf{A}_i^T \mathbf{A}_i \mathbf{Q}(i-1)}{1 + \lambda \mathbf{A}_i\mathbf{Q}(i-1)\mathbf{A}_i^T},$$

其中 $i = 1, 2, \dots, m$, $\alpha(m)$ 就是 $L(\alpha, \lambda)$ 的极小点. 取 λ 趋于无穷的极限就得到式(4)和式(5).

根据外点罚函数理论, λ 趋于无穷时 $L(\alpha, \lambda)$ 极小点的极限就是问题(1)(2)的解. 由解的唯一性, 定理得证. \square

可以看到, 投影最小二乘算法不必要求 Hessian 矩阵正定, 只要求增广 Hessian 矩阵正定就可以了. 为了提高数字精度及减少计算量, 我们用 Cholesky 平方根因子分解将增广

Hessian 矩阵化为 $\mathbf{X}^T \mathbf{X}$, 其中 \mathbf{X} 是一个上三角方阵, 然后用高斯消元法计算矩阵 \mathbf{X} 的逆.

也可用平方根因子将投影算子矩阵 $\mathbf{Q}(i)$ 分解为 $\mathbf{G}(i) \mathbf{G}^T(i)$, 其中 $\mathbf{G}(i)$ 是一个方阵. 这时, 式(4)和式(5)可以化为

$$\alpha(i) = \alpha(i-1) + \frac{\mathbf{G}(i-1)\mathbf{G}^T(i-1)\mathbf{A}_i^T}{\mathbf{A}_i\mathbf{G}(i-1)\mathbf{G}^T(i-1)\mathbf{A}_i^T} [b_i - \mathbf{A}_i\alpha(i-1)]$$

$$\mathbf{G}(i) = \mathbf{G}(i-1) - \mathbf{G}(i-1) \frac{\mathbf{G}^T(i-1)\mathbf{A}_i^T \mathbf{A}_i \mathbf{G}(i-1)}{\mathbf{A}_i\mathbf{G}(i-1)\mathbf{G}^T(i-1)\mathbf{A}_i^T}$$

这样, 我们就得到以下形式的投影最小二乘(PLS)算法:

$$(1) \bar{\mathbf{H}} \equiv \mathbf{H} + \sum_{i=1}^m \mathbf{A}_i^T \mathbf{A}_i, \bar{\mathbf{f}} \equiv \mathbf{f} + \sum_{i=1}^m \mathbf{A}_i^T b_i.$$

(2) 计算 $\bar{\mathbf{H}}$ 的 Cholesky 因子 \mathbf{X} 使得 $\bar{\mathbf{H}} = \mathbf{X}^T \mathbf{X}$;

用高斯消元法求 $\mathbf{G}(0) = \mathbf{X}^{-1}$;

计算 $\alpha(0) = \mathbf{G}(0) \bar{\mathbf{G}}^T(0) \bar{\mathbf{f}}$.

$$(3) \Psi(i) = \mathbf{G}^T(i-1) \mathbf{A}_i^T; \mu(i) = \Psi(i)^T \Psi(i); \zeta(i) = \mathbf{G}(i-1) \Psi(i)$$

$$\alpha(i) = \alpha(i-1) + \zeta(i) [b_i - \mathbf{A}_i\alpha(i-1)] / \mu(i);$$

$$\mathbf{G}(i) = \mathbf{G}(i-1) - \zeta(i) \Psi(i)^T / \mu(i)$$

3 约束 FIR 滤波器设计算法

冲击响应为 $h(n)$ ($n = 0, 1, \dots, N-1$) 的 FIR 滤波器的频

率响应为 $\mathbf{H}(e^{j\omega}) = \sum_{n=0}^{N-1} h(n) e^{-j\omega n}$, 当冲击响应系数对称或反对称时, 相频响应是频率 ω 的线性函数, 这样的 FIR 滤波器称为线性相位滤波器. 线性相位 FIR 滤波器的幅频响应是三角函数的线性组合. 如 $h(n)$ 对称, N 为奇数时, 幅频响应 $P(\omega)$ 是如下余弦函数的线性组合:

$$P(\omega) = \sum_{n=0}^r a(n) \cos n\omega = \phi(\omega)^T \alpha,$$

其中 $r = (N-1)/2$, $\phi(\omega) = [1 \ \cos \omega \ \dots \ \cos r\omega]^T$, $\alpha = [a_0, a_1, \dots, a_r]^T$, a_0, a_1, \dots, a_r 是与滤波器冲击响应相联系的系数.

$$a_0 = h(r), a_n = 2h(r-n), n = 1, 2, \dots, r.$$

引言中列举的各种时域和频域约束均可表示为线性等式约束 $\mathbf{A}_i \alpha = b_i$. 设 $D(\omega)$ 为定义在通带阻带之并集的一个稠密栅格 $\Omega = \{\omega_i, i = 1, 2, \dots, M\}$ 上的期望幅频特性, 则线性等式约束 FIR 滤波器最小二乘设计问题可表示为:

$$\text{minimize}_{\alpha} 0.5 \sum_{i=1}^M W(\omega_i) [\phi(\omega_i)^T \alpha - D(\omega_i)]^2, \quad (6)$$

$$\text{subject to } \mathbf{A}_i \alpha = b_i, i = 1, 2, \dots, m, \quad (7)$$

其中 $W(\omega) \geq 0$ 为加权函数. 引入

$$\mathbf{H} \equiv \sum_{i=1}^M W(\omega_i) \phi(\omega_i) \phi^T(\omega_i), \mathbf{f} \equiv \sum_{i=1}^M W(\omega_i) D(\omega_i) \phi(\omega_i), \quad (8)$$

则容易把问题化为(1)(2)描述的二次函数的约束优化问题, 从而可应用第二节提出的投影最小二乘算法进行求解.

如果要使最大逼近误差达到最小, 则需考虑 minimax 设计. 对于无约束 FIR 滤波器的 minimax 设计, 文献[14]证明了它等价于在某个加权函数下的最小二乘设计. 类似可以证明,

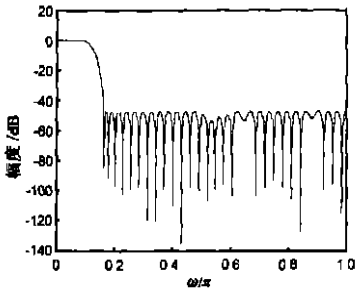


图 1 $L=8, \rho=0.3, N=69$ 的 Nyquist 滤波器的幅频响应

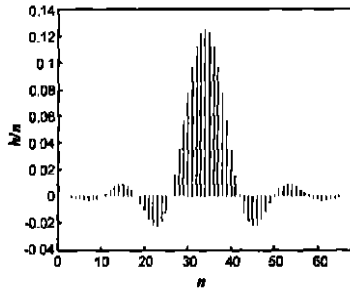


图 2 $L=8, \rho=0.3, N=69$ 的 Nyquist 滤波器的冲击响应

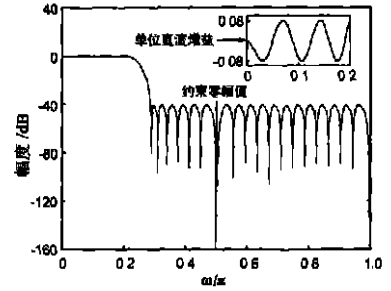


图 3 $L=4, \rho=0.15, N=55$ 的具有单位直流增益和约束零值的 Nyquist 滤波器的幅频响应

线性等式约束下的 FIR 滤波器 minimax 设计等价于某加权函数下的线性等式约束最小二乘设计问题。迭代重加权最小二乘算法^[14-16]就是通过迭代计算一系列最小二乘问题, 每次迭代都根据逼近误差的信息来更新最小二乘问题的加权函数, 渐近得到产生 minimax 设计的加权函数, 最终得到 minimax 设计。根据迭代重加权最小二乘算法的思想, 本文构造一个迭代投影最小二乘 (IPLS) 算法, 用于等式约束 FIR 滤波器的 minimax 设计。该算法以 $W^{(0)}(\omega_i) = 1 (i = 1, 2, \dots, M)$ 为初始权函数。在第 $k (k = 0, 1, \dots)$ 次迭代以 $W^{(k)}(\omega_i)$ 代替 $W(\omega_i)$, 用式 (8) 计算 H 及 f , 并调用 PLS 算法求约束优化问题 (1) (2) 的解 $\alpha^{(k)}$ 。利用 $\phi(\omega_i)^T \alpha^{(k)} - D(\omega_i)$ 的信息, 根据下式更新权函数后进行下一次迭代。

$$W^{(k+1)}(\omega_i) = \frac{\int W^{(k)}(\omega_i) + \eta | \phi(\omega_i)^T \alpha^{(k)} - D(\omega_i) |^\beta}{\sum_{j=1}^M \int W^{(k)}(\omega_j) + \eta | \phi(\omega_j)^T \alpha^{(k)} - D(\omega_j) |^\beta}$$

其中 $i = 1, 2, \dots, M$ 。 $0 < \beta < 2$ 和 $0 < \eta \ll 1$ 为可调参数, β 的典型取值范围是 1.0 到 1.5。本文取 $\beta = 1.4, \eta = 0.000005$ 。迭代的终止条件是:

$$\sum_{i=1}^M W^{(k)}(\omega_i) \left\{ 1 - \frac{\int \phi(\omega_i)^T \alpha^{(k)} - D(\omega_i) |^2}{\max_j \int \phi(\omega_j)^T \alpha^{(k)} - D(\omega_j) |^2} \right\} \leq \varepsilon$$

其中 $\varepsilon > 0$ 是预设的容许误差, 本文取 $\varepsilon = 0.05$ 。

Matlab 中的 quadprog() 程序是一个标准的二次规划程序。用于求解等式约束问题时, 应用的算法是广义消去法^[17], 这是目前最流行的等式约束二次规划算法之一, 该算法具有很强的数字稳定性和较小的计算量。为了比较 PLS 算法和广义消去法的性能, 我们构造了另一个迭代算法——IQP 算法。它与 IPLS 算法的区别是每次迭代都用 Matlab 函数 quadprog() 求解等式约束二次规划问题 (1) (2)。

4 在 FIR Nyquist 滤波器设计中的应用

线性相位 FIR Nyquist 滤波器的冲击响应满足

$$h(r) = 1/L, h(r + kL) = 0, k = \pm 1, \pm 2, \dots,$$

L 为 Nyquist 间隔。FIR Nyquist 滤波器一般要求为低通滤波器, 其通带和阻带频率分别为 $\omega_p = (1 - \rho)\pi/L$ 和 $\omega_s = (1 + \rho)\pi/L$, 其中 $0 < \rho < 1$ 。在过去的几十年里, Nyquist 滤波器的设计问题得到了比较广泛的研究^[7, 18, 19]。Matlab 6.1 的滤波器设计工具箱中就有一个专门用于设计 FIR Nyquist 滤波器的函数 firmyquist(), 该函数内嵌的等波纹设计方法设计的 Nyquist 滤

波器具有等波纹的良好特性。在下面的设计例子中, 将与此算法进行比较。

由于 minimax 设计可以使最大逼近误差达到最小, 或者等价地, 在给定最大逼近误差的前提下达到滤波器的长度最小的目的。本节考虑 FIR Nyquist 滤波器的 minimax 设计。

例 1 $L=8, \rho=0.3$ 。设计了各种长度的滤波器。设计表明, 当滤波器长度 $N \leq 265$ 时, IPLS 算法与 IQP 算法所需的迭代次数相同; 受数字精度的影响, 当 $N > 265$ 时, 两个算法的迭代次数略有不同, 当 $N > 301$ 时, IQP 算法计算失败, 当 $N > 303$ 时, IPLS 算法也计算失败。对于相同性能要求的滤波器设计, 完成相同次数的迭代, IPLS 算法所用的计算时间略少于 IQP 算法。由于这两个迭代算法的唯一区别就在于它们的迭代核心不同, 一个是 PLS 算法, 另一个是广义消去法。因此可以说, PLS 算法的数字稳定性不亚于广义消去法, PLS 算法的计算量也与广义消去法相当。

增大滤波器长度可以减小逼近误差, 但计算误差越发显著。长度增加到一定程度时, 计算误差过大, 得不出合理的滤波器。对于本例, IPLS 算法设计的滤波器长可以高达 303, 而 firmyquist() 函数 (等波纹设计方法) 只有 81。表明 IPLS 算法的数字稳定性远优于 firmyquist() 函数中的等波纹设计方法。比较所得滤波器的频率特性, 结果表明: IPLS 算法设计的滤波器虽然可能不是等波纹的, 但几乎是最优的; 而 firmyquist() 函数虽然可以得到等波纹滤波器, 但最大波纹却明显比 IPLS 算法大。

表 1 是 $N=69$ 时算法及所得滤波器的性能比较。图 1 和图 2 分别是 IPLS 算法得到滤波器的幅频响应和单位冲击响应。

表 1 算法的性能比较比较

算法	通带波纹 ¹	阻带波纹 ²	迭代次数	CPU 时间/s
IPLS	0.004374	0.004418	28	0.23
IQP	0.004374	0.004418	28	0.35
firmyquist()	0.006775	0.004546	—	0.59

1, 2-最优值分别为 0.004365 和 0.004415 (线性规划算法得到)

表 2 约束和无约束 Nyquist 滤波器的性能比较

滤波器	通带波纹	阻带波纹	$P(0)$	$P(0.5\pi)$
有约束	0.009459	0.009500	1	5.38×10^{-17}
无约束	0.009233	0.009266	1.009129	0.008922

例 2 $L=4, \rho=0.15, N=55$ 。并要求具有单位直流增益,

即 $P(0) = 1$, 以及在 $\omega = 0.5\pi$ 处具有零幅值, 即 $P(0.5\pi) = 0$. 表 2 列出了 IPLS 算法得到的约束 Nyquist 滤波器的性能. 图 3 是该滤波器的幅频响应. 为了比较, 表 2 还列出了无 $P(0) = 1$ 及 $P(0.5\pi) = 0$ 约束的 Nyquist 滤波器的性能.

5 结论

本文提出的等式约束二次目标函数极小化的投影最小二乘算法, 通过在 Hessian 矩阵中增加一个附加项来保证其正定性, 并采用平方根分解来计算增广 Hessian 矩阵及投影算子矩阵以获得良好的数字稳定性. 以此算法为核心, 采用迭代重加权技术构造的迭代投影最小二乘算法成功地应用于 Nyquist 滤波器的设计. 设计例子表明, 投影最小二乘算法在计算量和数字稳定性方面均不亚于广义消去法, 迭代投影最小二乘算法在数字稳定性方面远优于 firnyquist() 函数中的等波纹设计方法.

参考文献:

- [1] D J Shpak, A Antoniou. A generalized remez method for the design of FIR digital filters[J]. IEEE Trans Circuits and Systems, 1990, 37(2): 161- 174.
- [2] F Grenet. Design of linear or minimum phase FIR filters by constrained Chebyshev approximation[J]. Signal Processing, 1983, 5(4): 325- 332.
- [3] X P Lai. Chebyshev design of a class of FIR filters with frequency equation constraints[J]. Circuits Systems and Signal Processing, 2002, 21(2): 181- 193.
- [4] X P Lai. Chebyshev design of FIR filters with frequency inequality constraints[J]. Circuits Systems and Signal Processing, 2003, 22(3): 325- 334.
- [5] X P Lai. Constrained chebyshev design of FIR filters[J]. IEEE Trans Circuits and Systems- II, 2004, 51(3): 183- 186.
- [6] I W Selesnick, C S Burrus. Exchange algorithms that complement the Parks-McClellan algorithm for linear phase FIR filter design[J]. IEEE Trans on Circuits and Systems II, 1997, 44(2): 137- 143.
- [7] J K Liang, R J P de Figueirido, F C Lu. Design of optimal Nyquist, partial response, Nth band and nonuniform tap spacing FIR digital filters using linear programming techniques[J]. IEEE Trans Circuits and Systems, 1985, 32(4): 386- 392.
- [8] L R Rabiner, B Gold. Theory and Application of Digital Signal Processing[M]. Englewood Cliffs, NJ: Prentice Hall, 1975.

- [9] K Steiglitz, T W Parks, J F Kaiser. METEOR: A constraint based FIR filter design program[J]. IEEE Trans Signal Processing, 1992, 40(8): 1901- 1909.
- [10] A AborTaleb, M M Fahmy. Design of FIR two- dimensional digital filters by successive projections[J]. IEEE Trans Circuits and Systems, 1984, 31(9): 801- 805.
- [11] K C Haddad, H Stark, N P Galatsanos. Constrained FIR filter design by the method of vector space projections[J]. IEEE Trans Circuits and Systems II, 2000, 47(8): 714- 725.
- [12] S C Pei, I I Yang. Design of a class of time constrained FIR digital filters by successive projections[J]. IEEE Trans Circuits and Systems, 1989, 36(1): 164- 167.
- [13] G C Goodwin, K S Sin. Adaptive filtering prediction and control[M]. Englewood Cliffs, NJ: Prentice Hall, 1984.
- [14] M Lang. Algorithms for the constrained design of digital filters with arbitrary magnitude and phase responses[D]. Wien, Austria: Technische Universität Wien, 1999.
- [15] V R Algazi, M Suk, C S Rim. Design of almost minimax FIR filters in one and two dimensions by WLS techniques[J]. IEEE Trans Circuits and Systems, 1986, 33(6): 590- 596.
- [16] C S Burrus, J A Barreto, I W Selesnick. Iterative reweighted least squares design of FIR filters[J]. IEEE Trans. Signal Processing, 1994, 42(11): 2926- 2936.
- [17] 席少霖. 非线性最优化方法[M]. 北京: 高等教育出版社, 1992 年.
- [18] T Saramaki, Y Neuvo. A class of FIR Nyquist (Nth- band) filters with zero intersymbol interference[J]. IEEE Trans Circuits and Systems, 1987, 34(10): 1182- 1190.
- [19] P P Vaidyanathan. Eigenfilters: A new approach to least squares FIR filter design and applications including Nyquist filters[J]. IEEE Trans Circuits and Systems, 1987, 34(1): 11- 23.

作者简介:



赖晓平 男, 1965 年生, 江西省安远县人, 教授, 1988 年于山东大学物理系取得硕士学位, 2000 年于山东大学数学与系统科学学院取得博士学位, 主要研究方向有控制理论和数字信号处理. E-mail: laixp@sdu.edu.cn.