

一种基于地球重力场和磁场的姿态估计新算法

傅建国, 王孝通, 金良安, 马 野

(海军大连舰艇学院航海系, 辽宁大连 116018)

摘 要: 本文分析了基于地球重力场和磁场矢量观测进行姿态测量的算法存在的不足, 提出了一种新的基于四元数的递推优化估计算法, 算法本身内蕴保证了四元数估计值具有单位长度, 在结合载体动态实现递推估计的同时, 消除了现有递推算法中要求准确已知当地地磁矢量的限制, 并可同步提供载体姿态的角速率信息. 仿真结果表明了所提算法可以明显地提高测量精度.

关键词: 姿态测量; 非线性估计; 重力加速度; 地磁场; 四元数

中图分类号: U666. 1; V447 **文献标识码:** A **文章编号:** 0372-2112 (2005) 03-0567-04

A New Quaternion Based Attitude Estimation Algorithm Using the Gravitational Field and Geomagnetic Field Observation

FU Jianguo, WANG Xiaotong, JIN Liangan, MA Ye

(Department of Navigation, Dalian Naval Academy, Dalian 116018, China)

Abstract: To cover the shortage of the existing attitude determination algorithms based on the gravitational field and geomagnetic field vectors observation, a new quaternion-based recursive optimal estimation algorithm is proposed. The unit length of the estimated quaternion is guaranteed inherently in the new algorithm. The algorithm eliminates the limitation of knowing the exact geomagnetic field vector which is required in the former recursive estimation algorithms. And the attitude-rate information can be synchronously provided. The simulation results show that the presented method can markedly improve the measuring accuracy.

Key words: attitude determination; nonlinear estimation; gravity acceleration; geomagnetic field; quaternion

1 引言

姿态测量是现代导航、制导、控制等许多领域的一个重要问题. 高精度的实时姿态测量通常采用由陀螺仪和加速度计组成的惯性系统. 高精度高稳定性的陀螺成本很高, 难以在成本敏感场合推广应用. 因此, 在许多工程应用中是通过地球重力场和磁场矢量的观测来确定姿态. 随着技术的不断发展, 当前已经具备了低成本、固态化的地球重力场和磁场的测量手段, 使得以三轴重力加速度计和三轴磁强计为传感器的姿态测量系统得以广泛应用^[1-4].

基于地球重力场和磁场的姿态测量算法可归为两类: 一类是基于几何关系直接计算; 另一类是递推滤波方法. 第一类方法中, 最简单的是首先根据重力矢量观测值计算出倾斜角, 然后结合地磁矢量观测值计算出航向角, 这种方法中, 没有进行优化处理, 且很小的倾斜角误差就可能引起较大的航向误差^[1,3]; 当参考坐标系中的矢量准确已知时, 可采用矢量匹配的方法, 即求解经典的 Wahba 问题, 目前最常用的是四元数估计算法 (QUEST)^[5], 它可以获得单次观测的最优解, 但却无法利用系统动态信息和历史观测信息, 不能通过动态滤波改善测量精度, 也不能同时估计姿态速率等其他参量. 第二类算法中主要有扩展卡尔曼滤波器 (EKF)^[6]、递推四元数估计 (REQ

UEST)^[7]、和扩展四元数估计 (EQE)^[8]等. EKF 方法是基于对非线性方程的线性化, 当系统具有强非线性时, 线性化可能引起大的误差甚至造成滤波器的不稳定; REQUEST 是一种类 EKF 方法, 它在每一步中应用 QUEST 算法, 可以得到比传统的 EKF 更高的精度, 但却难于扩展估计其它参量; EQE 结合了 REQUEST 和 EKF 的优点, 但它同样不能避免线性化带来的问题. 最近, Gebre Egziabher 等^[4]通过选择误差四元数作为状态变量, 采用时变卡尔曼滤波进行求解.

在现有递推算法中, 均要求参考坐标系中的重力矢量和地磁矢量必须准确已知. 而对多数工程实际中的姿态测量而言, 重力矢量可以认为是已知的, 而当地地磁矢量则不能认为准确已知, 因而限制了这些算法的应用.

针对现有算法存在的不足, 本文提出了一种新的姿态测量优化递推估计算法, 能够结合载体动态实现递推估计, 并消除了要求准确已知当地地磁矢量的限制, 在明显提高测量精度的同时, 还可同步估计姿态速率信息.

2 系统动态

四元数姿态表达式是描述姿态的最小非奇异参数集, 是一种四参数的表达式, 表示从一个坐标系向另一个坐标系的变换, 可以用绕某一单位矢量的单次旋转实现. 单位四元数

$$q = \begin{bmatrix} q_0 \\ \mathbf{q} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\alpha/2) \\ \mathbf{n} \sin(\alpha/2) \end{bmatrix} \in H_1$$

表示绕单位矢量 $\mathbf{n} \in R^3$ 旋转 $\alpha \in R$ 角的转动。

设表示载体姿态的单位四元数为 $q = (q_0 \quad \mathbf{q})^T = (q_0 \quad q_1 \quad q_2 \quad q_3)^T$, 载体坐标系中的角速度矢量为 $\omega^b = (\omega_x^b \quad \omega_y^b \quad \omega_z^b)^T$, 则有:

$$\dot{q} = \mathbf{q} \otimes \begin{bmatrix} 0 \\ \omega^b \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \Omega^b \mathbf{q} \quad (1)$$

$$\text{其中 } \Omega^b = \begin{bmatrix} 0 & -\omega_x^b & -\omega_y^b & -\omega_z^b \\ \omega_x^b & 0 & \omega_z^b & -\omega_y^b \\ \omega_y^b & -\omega_z^b & 0 & \omega_x^b \\ \omega_z^b & \omega_y^b & -\omega_x^b & 0 \end{bmatrix}, \otimes \text{表示四元数乘运算。}$$

方程(1)的离散解可以写作:

$$\mathbf{q}(k+1) = e^{-\frac{1}{2}\Delta\theta} \mathbf{q}(k) \quad (2)$$

其中, $\Delta\theta = \int_k^{k+1} \Omega^b dt$. 记 $\Delta\theta_0 = \|\int_k^{k+1} \omega^b dt\|$, 则:

$$\mathbf{q}(k+1) = \left(\cos \frac{\Delta\theta_0}{2} \mathbf{I} + \frac{\Delta\theta}{\Delta\theta_0} \sin \frac{\Delta\theta_0}{2} \right) \mathbf{q}(k) \quad (3)$$

假定很小采样间隔 T 内角速度为常值, 可以得到 $\Delta\theta = \Omega_k^b T$, $\Delta\theta_0 = \|\omega_k^b T\|$.

为了避免使用不确定性的载体动态模型, 引入载体系的角加速度矢量 $\dot{\omega}^b$ 并合理地假设其动态模型为一阶高斯-马尔科夫过程^[9], 即:

$$\dot{\omega}^b = -\Psi \omega^b + \mathbf{w} \quad (4)$$

其中, $\Psi = \text{diag}\{1/\tau_x \quad 1/\tau_y \quad 1/\tau_z\}$, $\{\tau_i\}_{i=x}^z$ 为对应轴指数相关时间常数, 其选取与载体姿态运动动态有关, 增大其值, 跟踪响应速度降低, 但却能更好地平滑输出噪声, 减小其值, 可以改善跟踪性能, 但同时也使得对噪声更加敏感. \mathbf{w} 为零均值的白噪声, 其方差矩阵为 $\mathbf{Q}_w = 2\Psi\Sigma^2$, $\Sigma = \text{diag}\{\sigma_x \quad \sigma_y \quad \sigma_z\}$, $\{\sigma_i\}_{i=x}^z$ 可按角加速度的概率模型确定. 若 $\{\omega_i^b\}_{i=x}^z$ 等于 ω_{iM}^b 和 $-\omega_{iM}^b$ 的概率均为 p_{Mi} , 等于零的概率均为 p_{0i} , 除此之外在 $[-\omega_{iM}^b, \omega_{iM}^b]$ 均匀分布, 则有:

$$\sigma_i^2 = \frac{\omega_{iM}^b}{3} (1 + 4p_{Mi} - p_{0i}) \quad (5)$$

将参考坐标系选为磁导航坐标系(磁北-磁东-下), 则地球重力场和磁场矢量在参考系中分别表示为: $A^n = [0 \quad 0 \quad g]^T$ 和 $M^n = [H \cos\rho \quad 0 \quad H \sin\rho]$, 其中, g 为重力加速度, 为已知量; H 和 ρ 分别为当地地磁场强度和磁倾角, 在一定的地理区域内可以认为是常量, 但并不确知其数值, 可将它们看作平稳过程纳入状态向量进行处理, 即:

$$H_{k+1} = H_k + w_H \quad (6)$$

$$\rho_{k+1} = \rho_k + w_\rho \quad (7)$$

过程噪声 w_H 和 w_ρ 是均值为零, 方差为 σ_H^2 和 σ_ρ^2 的白噪声.

选取 $\mathbf{x} = [q^T \quad \omega^T \quad \dot{\omega}^T \quad H \quad \rho]^T$ 为状态向量, 可写出系统的过程方程:

$$\mathbf{x}_{k+1} = \begin{bmatrix} \mathbf{f}(x_{1k}, x_{2k}, \dots, x_{7k}) \\ \mathbf{0}_{8 \times 4} \quad \Phi \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{4 \times 5} \\ \Gamma \end{bmatrix} \mathbf{w}_k \quad (8)$$

其中, Φ 和 Γ 分别为连续系统矩阵

$$A = \begin{bmatrix} \mathbf{Q}_{3 \times 3} & \mathbf{I}_{3 \times 3} & \mathbf{Q}_{3 \times 2} \\ \mathbf{Q}_{3 \times 3} & \Psi & \mathbf{Q}_{3 \times 2} \\ \mathbf{Q}_{2 \times 3} & \mathbf{Q}_{2 \times 3} & \mathbf{Q}_{2 \times 2} \end{bmatrix}, G = \begin{bmatrix} \mathbf{Q}_{3 \times 3} & \mathbf{Q}_{3 \times 2} \\ \mathbf{I}_{3 \times 3} & \mathbf{Q}_{3 \times 2} \\ \mathbf{Q}_{2 \times 3} & \mathbf{I}_{2 \times 2} \end{bmatrix} \text{ 对应的离散}$$

化矩阵, $\mathbf{f}(\cdot)$ 为式(3)表示的非线性方程, 过程噪声向量 \mathbf{w}_k 为零均值白噪声, 其协方差矩阵 \mathbf{Q}_k 由 σ_H^2 , σ_ρ^2 和 \mathbf{Q}_w 决定.

选取载体坐标系的重力矢量和地磁矢量 $\mathbf{y} = [(\mathbf{M}^b)^T (\mathbf{A}^b)^T]^T$ 为观测向量, 可写出系统的观测方程:

$$\mathbf{y}_k = \begin{bmatrix} C_{ik}^b \begin{bmatrix} x_{11k} \cos x_{12k} \\ x_{11k} \sin x_{12k} \end{bmatrix} \\ C_{ik}^b A^n \end{bmatrix} + \mathbf{v}_k \quad (9)$$

其中, 观测噪声向量 \mathbf{v}_k 为协方差矩阵为 \mathbf{R}_k 的零均值白噪声;

C_{ik}^b 为将 $x_{1k} - x_{4k}$ 对应代入姿态矩阵:

$$C_{ik}^b = \begin{bmatrix} 2q_0^2 + 2q_1^2 - 1 & 2(q_1q_2 + q_0q_3) & 2(q_1q_3 - q_0q_2) \\ 2(q_1q_2 + q_1q_3) & 2q_0^2 + 2q_2^2 - 1 & 2(q_2q_3 - q_0q_1) \\ 2(q_1q_3 + q_0q_2) & 2(q_2q_3 - q_0q_1) & 2q_0^2 + 2q_3^2 - 1 \end{bmatrix}$$

3 姿态估计算法

由式(8)、(9)描述的系统为一强非线性系统. 对于非线性系统, 扩展卡尔曼滤波(EKF)是近二十年来的经典算法, 但它具有两个明显的缺点: 一是 Jacobian 矩阵推导的复杂性使得许多应用非常困难; 二是当时间步长不足够小而使得局部线性的假设不成立时, 线性化可能造成滤波器的不稳定. 近几年来, Julier 等^[10] 基于近似一个分布比近似一个任意的非线性函数容易的观点, 提出了一种卡尔曼滤波向非线性系统扩展的新方法, 称作 Unscented 卡尔曼滤波(UKF). 与 EKF 中采用 Jacobian 矩阵进行线性化不同, UKF 通过一组仔细选择的确定性采样点(西格马点)来捕获系统的相关统计参量, 将非线性映射直接作用于各西格马点, 根据映射后的点集重建统计参量, 然后根据新的统计参量重新选择西格马点集并重复上述过程. 这种方法可以在不必对非线性映射近似的情况下, 使一个随机变量的分布按非线性映射递推传播. UKF 一直引起人们的关注和研究, 它在捕捉到系统状态的二阶矩情况下, 与 EKF 具有同等的计算复杂度, 且具有比 EKF 更优的性能^[11]. 本文采用 UKF 对姿态进行优化估计.

3.1 姿态四元数均值与协方差计算

UKF 算法中需要采用西格马点方法递推计算状态估计值的均值与协方差, 由于姿态四元数构成的是齐性黎曼空间而不是欧氏空间, 因此其均值不能采用标准 UKF 中的加权重心算法直接进行计算, 本文采用下面说明的梯度算法^[12]进行计算.

为叙述方便, 对于 $s, \mathbf{q} \in H_1, \mathbf{v} \in R^3$, 定义: $\log \mathbf{q} = \mathbf{a} \mathbf{n} = \mathbf{v}$,

$\exp \mathbf{v} = \exp(\mathbf{a} \mathbf{n}) = \begin{bmatrix} \cos(\alpha/2) \\ \mathbf{n} \sin(\alpha/2) \end{bmatrix} = \mathbf{q}$. 记 $\log_q(s) = \log(s \otimes q^{-1})$, $\exp_q(\mathbf{v}) = \exp(\mathbf{v}) \otimes \mathbf{q}$, 利用下列算法计算 $\{q_i\}$ 的均值 \bar{q} 和协方差矩阵 \mathbf{P}_q ^[12]:

①初始化: $\mathbf{q} = \mathbf{q}_0$;

②主循环: 对于 $i = 0, 1, \dots, 2n$ (n 为状态向量的维数), 计

算 $\mathbf{x}_i = \log_q(\mathbf{q}_i)$; 令 $\mathbf{v} = \sum_{i=0}^{2n} w_i \mathbf{x}_i$; $\bar{q} = \exp_q(\mathbf{v})$; 其中 w_i 为 UKF

中的加权系数,对本例, $w_0 = 0$, 其它 $w_i = 1/22$.

③如果 $\|v\|$ 足够小或超过最大迭代次数, 终止循环, 输出 q ; 否则, 继续循环.

④利用最后一次循环的 x_i 值计算协方差矩阵: $P_q =$

$$\sum_{i=0}^{2n} w_i x_i x_i^T.$$

3.2 四元数 UKF 算法

根据前面的结论, 基于四元数的 UKF 姿态估计算法为:

①初始化

$k = 1$, 利用初次测量值得到 \hat{x}_0 , 给定 $P_0 = I_{11}$. 虽然状态向量中有 12 个元素, 但由于四元数的单位长度限制, 其自由度仅为 3, 因此状态估计值的协方差矩阵为 11 阶正定阵.

②时间更新

对 \hat{x}_{k-1} 中的四元数部分利用 3.1 中定义的 \log 函数变换为 R^3 中的向量后与其它状态组成 \hat{x}'_{k-1} , 根据 \hat{x}'_{k-1} 和 P_{k-1} 按式(10)计算确定西格马点集 \hat{x}'_{k-1} .

$$\hat{x}'_{k-1} = [\hat{x}'_{k-1} \quad \hat{x}'_{k-1} + \gamma \sqrt{P_{k-1}} \quad \hat{x}'_{k-1} - \gamma \sqrt{P_{k-1}}] \quad (10)$$

其中的 γ 值根据状态向量的维数、随机变量分布的先验知识及西格马点围绕均值的散布等情况确定^[10], 在本例中为 $\sqrt{11}$.

将 x_{k-1} 中对应于四元数的部分利用 3.1 中定义的 \log 函数变换为四元数后构成 x_{k-1} , 通过式(8)、(9)传播西格马点集 x_{k-1} 得到点集 x_k^- 和 Y_k^- . 对于 x_k^- 中的四元数部分, 利用 3.1 中的方法计算其加权均值, 将均值变换为 R^3 中的向量后, 与利用加权重心算法计算得到的 x_k^- 中除四元数以外部分的均值组合得到 \hat{x}_k^- , 由:

$$P_k^- = \sum_{i=0}^{2n} w_i \{[(\hat{x}'_{k-1})_i - \hat{x}'_{k-1}][(\hat{x}'_{k-1})_i - \hat{x}'_{k-1}]^T\} \quad (11)$$

$$\hat{y}_k^- = \sum_{i=0}^{2n} w_i (Y_k^-)_i \quad (12)$$

完成时间更新. 其中, 四元数部分各点与均值间的差值在计算均值的最后一次迭代中, 实际上已经得到.

③测量更新

$$P_{\hat{y}_k} = \sum_{i=0}^{2n} w_i \{[(Y_k^-)_i - \hat{y}_k^-][[(Y_k^-)_i - \hat{y}_k^-]^T\} + R_k \quad (13)$$

$$P_{x_k} = \sum_{i=0}^{2n} w_i \{[(\hat{x}'_{k-1})_i - \hat{x}'_{k-1}][[(Y_k^-)_i - \hat{y}_k^-]^T\} \quad (14)$$

$$K_k = P_{x_k} P_{\hat{y}_k}^{-1} \quad (15)$$

$$\hat{x}'_k = \hat{x}'_{k-1} + K_k [y_k - \hat{y}_k^-] \quad (16)$$

$$P_k = P_k^- - K_k P_{\hat{y}_k} K_k^T \quad (17)$$

将 \hat{x}'_k 中对应于四元数的部分变换为四元数后即可得到

\hat{x}_k .

④ $k = k + 1$, 转至②.

4 仿真结果

鉴于四元数不直观, 采用欧拉角设定载体的角动态分别

为: 偏航角 $\Psi = \pi \sin\left(\frac{\pi}{30}t\right)$ 、俯仰角 $\theta = \frac{\pi}{8} \sin\left(\frac{\pi}{10}t + \frac{\pi}{4}\right)$ 和横

滚角 $\phi = \frac{\pi}{4} \sin\left(\frac{\pi}{15}t + \frac{\pi}{2}\right)$; 文献[4] 同样是研究基于重力场和地磁场矢量观测的姿态估计算法问题, 为了便于比较, 参照文献[4], 设定传感器的测量精度 (1σ) 为:

磁强计 5mG, 加速度计 10mg; 采样频率为 20Hz; 仿真时间 60 秒. 分别采用本文 3.2 中的算法和文献[4] 中的算法同步处理完全相同的仿真数据, 结果如图 1 和图 2 所示.

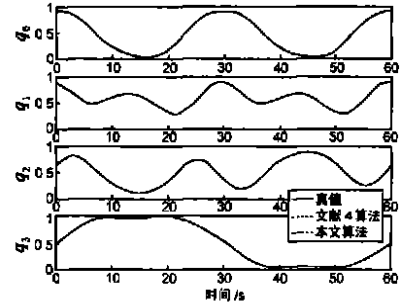


图 1 四元数估计值

其中, 图 1 为四元数估计值曲线, 图 2 为四元数估计误差曲线, 曲线中的真值根据假设的载体角动态, 利用欧拉角与四元数之间的换算公式计算得到.

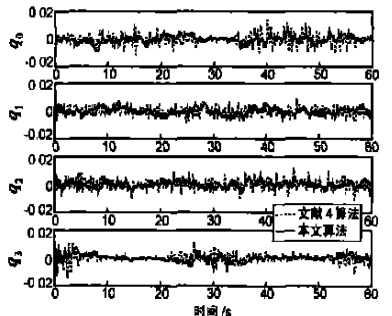


图 2 四元数估计误差

图 3 示出了每一步估计值对应的欧拉角误差曲线, 以便进行直观评判.

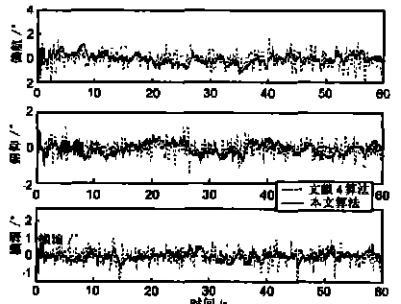


图 3 对应的欧拉角误差

为便于进一步比较, 将估计误差的标准差进行了统计运算, 表 1 和表 2 列出了不同方法估计误差的标准差, 表 2 中还同时列出了利用几何关系直接计算方法所对应的标准差.

从误差曲线和

表 1 四元数估计误差标准差

误差项	δq_0	δq_1	δq_2	δq_3
本文算法	0.0025	0.0027	0.0022	0.0022
文献 4 算法	0.0039	0.0030	0.0035	0.0032

值的精度要高出一

表 2 对应欧拉角估计误差标准差

误差项	$\delta \phi(^{\circ})$	$\delta \theta(^{\circ})$	$\delta \psi(^{\circ})$
本文算法	0.3975	0.3073	0.2407
文献 4 算法	0.5967	0.3753	0.3725
直接计算方法	0.8290	0.6169	0.5690

本文的算法不需要确切知道当地地磁场矢量, 因而可以实现自主姿态测量. 本方法的另一个优点是可以同步提供载体的姿态角速率信息.

由于算法中采用了 3.1 中定义的四元数对数与指数函数进行计算, 因此其内在严格保证了四元数估计值具有单位长度, 因而不再需要进行归一化处理, 这也是本文算法的一个优点.

5 结论

本文对基于地球重力场和磁场矢量观测进行姿态测量的算法问题进行了研究, 针对现有算法的不足, 根据载体姿态估计的过程方程和观测方程具有强非线性特性的特性, 提出了一种新的四元数-*UKF* 算法. 该算法不需要确知地磁场矢量, 可以实现完全自主的姿态测量, 且可以同步提供载体姿态角速率信息. 算法本身内蕴了对四元数单位长度的限制, 不再需要对四元数估计值进行归一化处理. 仿真结果表明了新算法可以明显提高测量精度.

参考文献:

- [1] M J Caruso. Applications of Magnetic Sensors for Low Cost Compass Systems [EB/OL]. <http://www.ssec.honeywell.com/magnetic/datasheets/lowcost.pdf>.
- [2] 王寿荣. 硅微型惯性器件理论及应用[M]. 南京: 东南大学出版社, 2000.
- [3] 郭爱煌, 傅君眉. 基于地球重力场和磁场测量的测斜技术[J]. 仪器仪表学报, 2001, 22(4): 400-403.
- [4] D Gebr Egiabher, G H Elkaim, J D Powell, B W Parkinson. A gyro free quaternion based attitude determination system suitable for implementation using low cost sensors[A]. Proceedings of the IEEE PLANS [C]. San Diego, California: IEEE, 2000. 185-192.
- [5] S D Oh, M D Shuster. Three axis attitude determination from vector observation[J]. Journal of Guidance, Control, and Dynamics, 1981, 4(1): 70-77.
- [6] F L Markley. Attitude representation for Kalman filtering[A]. Proceedings of the 2001 AAS/AIAA Astrodynamics Specialists Conference [C]. Quebec City, Quebec, Canada: AAS/AIAA, 2001.
- [7] I Y Bar Itzhack. Request: A recursive quest algorithm for sequential attitude determination[J]. Journal of Guidance, Control, and Dynamics, 1996, 19(5): 1034-1038.
- [8] M L Psiaki. Attitude determination filtering via extended quaternion estimation[J]. Journal of Guidance, Control, and Dynamics, 2000, 23

(2): 209-214.

- [9] Y Oshman, F L Markley. Sequential gyroless attitude and attitude rate estimation from vector observations[J]. Acta Astronautical, 2000, 46(7): 449-463.
- [10] S J Julier, J K Uhlmann, H F Durrant Whyte. A new method for the nonlinear transformation of means and covariances in filters and estimators[J]. IEEE Transactions on Automatic Control, 2000, 45(3): 477-482.
- [11] Simon Haykin. Kalman Filtering and Neural Networks[M]. New York: John, Wiley & sons, 2001.
- [12] 傅建国. 基于固态传感器的自主姿态测量研究[D]. 大连: 海军大连舰艇学院, 2004.

作者简介:



傅建国 男, 1964 年 12 月出生于山东省平度市, 1984 年毕业于海军大连舰艇学院雷达专业, 2001 年获沈阳工业大学电气工程学院电力电子与电力传动专业硕士学位, 2004 年获海军大连舰艇学院交通信息工程及控制专业博士学位. 现任海军大连舰艇学院航海系副教授, 海军专业技术上校, 主要从事自主导航、鲁棒控制等研究. 获军队科技进步二等奖一项、三等奖多项, 发表论文 30 余篇. E-mail: fujianguo80@sohu.com



王孝通 男, 1962 年 10 月出生于浙江省义乌市, 1992 年获大连理工大学计算机系硕士学位, 1996 年获大连理工大学系统工程研究所博士学位, 1999 年上海交通大学自动控制博士后流动站出站, 现任海军大连舰艇学院航海系主任、教授、博士生导师, 海军上校, 中国航海学会理事, 主要研究方向为信息工程、图像处理等, 主持了多项科研项目, 其成果获军队科技进步一、二等奖各一项, 在国内外发表学术论文 40 余篇.