

四端硅压力传感器输出电压的解析模型

陆生礼¹, 柯导明², 陈军宁², 孟 坚², 朱德智²

(1. 东南大学国家 ASIC 工程中心, 浙江南京, 210096; 2. 安徽大学电子系, 安徽合肥 230039)

摘 要: 本文用摄动法求解了横向压阻效应四端硅压力传感器输出电压的两维偏微分方程, 导出了器件的输出电压与器件尺寸的关系; 证明了随应力而变的输出电压最大值在器件横向 $L/2$ 处, 并给出了最大输出电压的解析表达式. 这些解析公式得到的计算结果, 都和数值解、实验数据相符合, 说明了得到的公式具有高的精度. 用所给的解析表达式可以很方便地进行器件设计和模拟.

关键词: 四端硅压力传感器; 正则摄动; 解析表达式

中图分类号: TN379 **文献标识码:** A **文章编号:** 0372-2112 (2005) 05-0912-03

An Analysis Model for the Output Voltage of Four Terminal Silicon Pressure Transducers

LU Sheng Li¹, KE Dao ming², CHEN Jun ning², MENG Jian², Zhu De zhi²

(1. National ASIC Engineering Research Center, Southeast University, Nanjing, Jiangsu 210096, China;

2. Department of Electronics Engineering, Anhui University, Hefei, Anhui 230039, China)

Abstract: The paper resolved a two dimensional partial differential equation of transverse piezoresistive effect transducers with a method of perturbation. A relationship between the output voltage and device size has been gotten. We also verify that the maximum output voltage is located at middle point of output terminal. An expression of the maximum output voltage has been given. The calculation results based on the expressions are fit to numerical and experimental values of devices. It shows that the analysis model we have gotten is right. These expressions based on the paper can be used in design and simulation of four terminal piezoresistive pressure transducers.

Key words: four terminal silicon pressure transducer; normal perturbation; analysis expressions

1 引言

随着 MEMS 技术的发展, 四端硅压力传感器已成为现代硅压力传感器的基本单元, 得到了越来越广泛的应用^[1,2]. 这种四端硅压力传感器的基本原理是利用了硅的横向压阻效应, 形成四端压阻传感器. 由于它的性能与尺寸强烈相关, 所以它的设计和性能参数都依靠一维解的结果再根据数值解或实验加以修正后才能得到^[1-3]. 这对于设计者来说十分不便.

这篇文章用正则摄动法求解了四端硅压阻传感器的二阶偏微分方程, 得到了输出电压与几何尺寸, 电导率之间的关系. 根据结果可以定量地给出输出电压, 分析几何尺寸与灵敏度等参数之间的影响. 所有结果均与数值解和实测结果符合. 全文共有四个部分: 首先是四端硅压力传感器定解问题的导出; 接着用摄动法求解了输出电压; 得到了最大输出电压; 最后讨论了四端硅压力传感器的物理现象, 并与数值解以及实验情况的对比.

2 四端硅压阻式压力传感器的定解问题

四端压阻传感器也有称为 X 型压阻传感器^[3], 图 1 是基本器件的示意图. 在图 1 的 A, B 端加上电压 V_s 后, 器件上形成稳定电场. 当应力作用时, 半导体的电导率发生改变, 由于四端压阻是一个长为 L 宽为 W 的四端器件, 所以关于电压的

方程是一个偏微分方程. 实际器件的厚度很薄, 故可以看成是一个平面, 只要考虑器件的二维效应, 既只要计算 xy 平面情况即可. 同时, 实际器件要在输出端加引出电极, 但是由于引出电极很小, 所以器件的基本特性仍可由图 (a) 求解^[1,2].

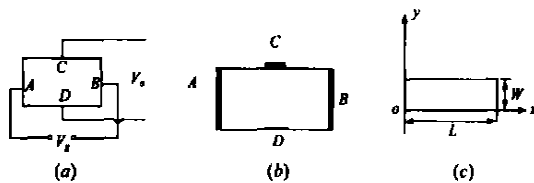


图 1 (a) 四端硅压力传感器的基本形状; (b) 加了引出电极后的实际器件; (c) 相对应的器件坐标系

求输出开路电压时, 根据麦克斯韦方程组和电流连续方程可以得到器件的电势 φ 的定解问题是^[1,2]

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + 2\sigma \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} = 0 \quad (1)$$

$$\begin{cases} \varphi(0, y) = 0, \varphi(L, y) = V_s, \\ \left[\sigma \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{\partial \varphi}{\partial y} \right] \Big|_{y=0} = 0, \left[\sigma \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{\partial \varphi}{\partial y} \right] \Big|_{y=W} = 0 \end{cases} \quad (2)$$

式中 $\sigma = \frac{\sigma_{xy}}{\sigma_{os}}$, σ_{os} 是未受应力作用的薄层电导率; σ_{xy} 是应力作用后的薄层电导率的变化, 而且 $\sigma_{os} \gg \sigma_{xy}$. 上述定解问题由于方程和边界条件复杂, 不能直接求解.

3 正则摄动法求定解问题

若 $\varphi(x, y)$ 能够用正则摄动法求解, 则 $\varphi(x, y)$ 可以用一个关于小量 ε 的幂级数^[4,5] 表示为

$$\varphi(x, y) = \varphi_0(x, y) + \sum_n \varepsilon^n \varphi_n(x, y) \quad (3)$$

令 $\sigma = \varepsilon = \frac{\sigma_{ys}}{\sigma_{ox}}$, 将式(3)代入式(1)后得到

$$\frac{\partial^2 \varphi_0}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi_0}{\partial y^2} + \varepsilon \left[\frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 \varphi_0}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial y^2} \right] + o(\varepsilon^2) = 0 \quad (4)$$

对于本文的定解问题, ε 典型值为 0.01 以下, 故为一小量, 所以可忽略二阶小量以上的值. 为了让式(4)对于一切 ε 均成立, 将式(4)中的系数为零, 可得到两个定解问题, 他们是

$$\frac{\partial^2 \varphi_0}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi_0}{\partial y^2} = 0 \quad (5a)$$

$$\varphi(0, y) = 0, \varphi(L, y) = V_s, \frac{\partial \varphi_0}{\partial y} \Big|_{y=0} = 0, \frac{\partial \varphi_0}{\partial y} \Big|_{y=W} = 0 \quad (5b)$$

$$\frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial y^2} = -2 \frac{\partial^2 \varphi_0}{\partial x \partial y} \quad (6a)$$

$$\varphi_1(0, y) = 0, \varphi_1(L, y) = 0,$$

$$\frac{\partial \varphi_1}{\partial y} \Big|_{y=0} = -\frac{\partial \varphi_0}{\partial y} \Big|_{y=0}, \frac{\partial \varphi_1}{\partial y} \Big|_{y=W} = -\frac{\partial \varphi_0}{\partial y} \Big|_{y=W} \quad (6b)$$

求解式(5)和式(6)可得到 $\varphi(x, y)$.

求解定解问题(5), 可得到

$$\varphi_0(x, y) = \frac{V_s}{L} x \quad (7)$$

定解问题(6)的解是

$$\varphi_1(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2V_s [1 - (-1)^n]}{n^2 \pi^2 \operatorname{sh} \frac{n\pi W}{L}} \left[\operatorname{ch} \frac{n\pi}{L} (W-y) - \operatorname{ch} \frac{n\pi}{L} y \right] \sin \frac{n\pi}{L} x \quad (8)$$

将 ε 用 σ 代入, 并将式(7)和(8)代入式(2)可得到电势为

$$\varphi(x, y) = \frac{V_s}{L} x + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2\sigma V_s [1 - (-1)^n]}{n^2 \pi^2 \operatorname{sh} \frac{n\pi W}{L}} \left[\operatorname{ch} \frac{n\pi}{L} (W-y) - \operatorname{ch} \frac{n\pi}{L} y \right] \sin \frac{n\pi}{L} x \quad (9)$$

4 四端压力传感器的输出电压

在 $y=0$ 和 $y=W$ 上取两点 x_0 和 x_W 作为输出端, 两点间的电势为输出电压, 因此得到

$$\begin{aligned} V_o &= \varphi(x_0, 0) - \varphi(x_W, W) \\ &= \frac{V_s}{L} (x_0 - x_W) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4\sigma V_s [1 - (-1)^n]}{n^2 \pi^2} \\ &\quad \operatorname{th} \frac{n\pi W}{2L} \sin \frac{n\pi}{2L} (x_0 + x_W) \cos \frac{n\pi}{2L} (x_0 - x_W) \end{aligned}$$

为了得到随应力而变的最大输出电压, 显然上式的第一项应当为零, 第二项应最大. 所以应当有 $x_0 = x_W = x$, 这样上式可写成

$$\begin{aligned} V_{o \max} &= \frac{8\sigma V_s}{\pi^2} \operatorname{th} \frac{\pi W}{2L} \sin \frac{\pi}{L} x + \frac{8\sigma V_s}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} \\ &\quad \operatorname{th} \frac{(2n+1)\pi W}{2L} \sin \frac{(2n+1)\pi}{L} x \quad (10) \end{aligned}$$

下面我们根据 W/L 的不同取值范围来求解最大输出电压的解析表达式.

(1) W/L 不是一个小的情况

注意到 W/L 取值的最常用范围是 $[1/3, 2]$ 之间^[1,2]. 考虑

在这时的 $\operatorname{th} \frac{(2n+1)\pi W}{2L}$ 的最小值为 $\operatorname{th} \frac{3\pi W}{2L} = \operatorname{th} \frac{\pi}{2} = 0.9170$, 和它的渐近值 1 近似相等, 可以有

$$\operatorname{th} \frac{(2n+1)\pi W}{2L} \approx \lim_{n \rightarrow \infty} \operatorname{th} \frac{(2n+1)\pi W}{2L} = 1 \quad (11)$$

将上式代入(10)后, 得到

$$V_{o \max} = \frac{8\sigma V_s}{\pi^2} \operatorname{th} \frac{\pi W}{2L} \sin \frac{\pi}{L} x + \frac{8\sigma V_s}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} \sin \frac{(2n+1)\pi}{L} x \quad (12)$$

为了求 $V_{o \max}(x)$ 的最大输出电压, 对上式求导, 并注意

$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\cos(2n+1)x}{2n+1} = \frac{1}{4} \ln \cot^2 \frac{2}{x}$ $[0 < x < \pi]$, 于是得到

$$V'_{o \max} = \frac{8\sigma V_s}{\pi^2} \frac{\pi}{L} \left[\operatorname{th} \frac{\pi W}{2L} \cos \frac{\pi}{L} x - \cos \frac{\pi}{L} x + \frac{1}{4} \ln \cot^2 \frac{\pi}{2L} \right]$$

将 $x = \frac{L}{2}$ 代入上式, 得到 $V'_{o \max} \left(\frac{L}{2} \right) = 0$, 因此 $x = \frac{L}{2}$ 是最大输出电压处. 根据式(12)得到

$$V_{o \max} \left(\frac{L}{2} \right) = \frac{8\sigma V_s}{\pi^2} \left[\operatorname{th} \frac{\pi W}{2L} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)^2} \right] \quad (13)$$

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)^2} = G - 1 \approx -0.084$, 其 G 是卡塔兰常数^[6], 得到

$$V_{o \max} \left(\frac{L}{2} \right) = \frac{8\sigma V_s}{\pi^2} \left[\operatorname{th} \frac{\pi W}{2L} - 0.084 \right] \quad (14)$$

(2) W/L 为一个小量

在 W/L 为一个小量时, 设在 m 项后与渐近值相等, 式(10)可以写成

$$\begin{aligned} V_{o \max} &= \frac{8\sigma V_s}{\pi^2} \operatorname{th} \frac{\pi W}{2L} \sin \frac{\pi}{L} x + \frac{8\sigma V_s}{\pi^2} \sum_{n=1}^m \frac{1}{(2n+1)^2} \operatorname{th} \frac{(2n+1)\pi W}{2L} \\ &\quad \sin \frac{(2n+1)\pi}{L} x + \frac{8\sigma V_s}{\pi^2} \sum_{n=m}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} \operatorname{th} \frac{(2n+1)\pi W}{2L} \\ &\quad \sin \frac{(2n+1)\pi}{L} x \quad (15) \end{aligned}$$

将式(15)的第三项写成它的渐近表达式, 上式是

$$\begin{aligned} V_{o \max} &= \frac{8\sigma V_s}{\pi^2} \operatorname{th} \frac{\pi W}{2L} \sin \frac{\pi}{L} x + \frac{8\sigma V_s}{\pi^2} \sum_{n=1}^m \frac{1}{(2n+1)^2} \operatorname{th} \frac{(2n+1)\pi W}{2L} \\ &\quad \sin \frac{(2n+1)\pi}{L} x - \frac{8\sigma V_s}{\pi^2} \sum_{n=1}^m \frac{1}{(2n+1)^2} \sin \frac{(2n+1)\pi}{L} x \\ &\quad + \frac{8\sigma V_s}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} \sin \frac{(2n+1)\pi}{L} x \end{aligned}$$

将 $X = \frac{L}{2}$ 和卡塔兰常数(取三位)代入上式, 得到

$$\begin{aligned} V_{o \max} \left(\frac{L}{2} \right) &= \frac{8\sigma V_s}{\pi^2} \left[\sum_{n=0}^m \frac{(-1)^n}{(2n+1)^2} \operatorname{th} \frac{(2n+1)\pi W}{2L} \right. \\ &\quad \left. + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{(2n+1)^2} - 0.084 \right] \quad (16) \end{aligned}$$

由于 W/L 是一个小量, 而式(16)中求和都是有限项求和, 故将 $\operatorname{th} x$ 用级数展开至一次项, 得到

$$V_{o \max} \left(\frac{L}{2} \right) = \frac{8\sigma_{vs}}{\pi^2} \left[\frac{\pi W}{2L} \sum_{n=0}^m \frac{(-1)^n}{(2n+1)^2} + \sum_{n=1}^m \frac{(-1)^{n+1}}{(2n+1)^2} - 0.084 \right] \quad (17)$$

在 $W/L \ll 1$ 时, 对 m 取到 14, 这时式(17)趋向一个常数, 得到

$$V_{o \max} \left(\frac{L}{2} \right) = 0.951 \frac{W}{L} \sigma_{vs} \quad (18)$$

式(18)是 $W/L \ll 1$ 时的输出电压, 在 $W/L < 1/3$ 时可以用式(18)来计算输出电压.

5 计算结果与对比

实际传感器的尺寸是 W/L 在 $[1/3, 2]$ 之间. 可以根据式(12)和式(14)来对 W/L 在 $[1/3, 2]$ 之间的传感器分析. 为了便于对比, 列出了 V_o 理想值和实验值分别是

$$V_o(\text{理想}) = \frac{\sigma_{xys}}{\sigma_{os}} \frac{W}{L} V_s \quad (19)$$

$$V_o(\text{实验}) = \frac{\sigma_{xys}}{\sigma_{os}} \frac{W}{L} V_s f \left(\frac{L}{W} \right) \quad (20)$$

所分析的有限尺寸器件输出特性讨论如下:

(1) 器件灵敏度与器件尺寸的关系

根据式(12)和式(2)可以得到器件的灵敏度为

$$\delta = \frac{V_o/V_s}{V_o(\text{理论})/V_s} = \frac{8}{\pi^2} \left[\frac{L}{W} \text{th} \frac{\pi W}{2L} \sin \frac{\pi}{L} x + \frac{L}{W} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} \sin \frac{(2n+1)\pi x}{L} \right] \quad (21)$$

根据上式, 画出 δ

与宽长比 W/L 的关系如图 2 所示. 从图 2 可以看到宽长比变化时, 器件两侧部分的输出电压会随着变化, 这被称为电源电极短路效应. 而中间部分受电极短路效应

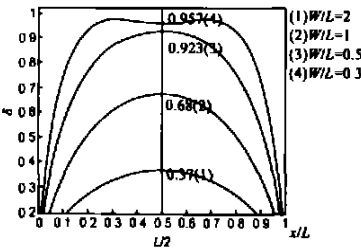


图 2 器件的尺寸对器件的灵敏度的影响

的影响较小. 在宽长比为 0.5 时, 输出电压最大值已经达到理论值的 92.3%, 而且电源电极短路效应也很小. 而在 $W/L = 2$ 时, 最大输出电压仅有理论值的 37%. 因此器件宽长比最适宜的情况是小于 1. 在 $W/L = 0.3$ 时, 由于宽度比长度足够小, 电极短路效应减小很多, 输出电压趋向于一个不依 x 而变的量, 曲线应趋于平坦. 由于式(12)绘图时只能取有限项, 所以迭加项不够, 这时曲线上出现两个小的峰值, 绘图时发现项数越多, 峰值越

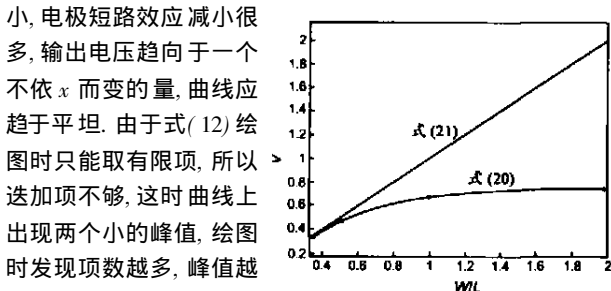


图 3 输出电压与 W/L 的关系, 其中

$$V = V_o / \frac{\sigma_{xys}}{\sigma_{os}} V_s$$

(2) 最大输出电压

输出电压与 W/L 关系是由式(14)决定, 它与

输出理想值式(19)都画在图 3 上. 从图中可以看到在 W/L 增加时, 器件输出电压并不是如式(19)所示无限制增加, 而是有一个饱和值, 事实上 $V_o \left(\frac{W}{L} = \infty \right) = 0.74 \frac{\sigma_{xys}}{\sigma_{os}} V_s$. 这说明了 W/L 增加到一定的值以后, 输出电压有一个最大值. 由图可见最大值约在 1 左右, 在 2 基本上是平的了. 这也是常见的压阻器件不超过 2 的原因.

为了对比, 我们用 MATLAB 计算了数值解和式(14)对比, 其结果如图 4 所示. 最大误差小于 8%.

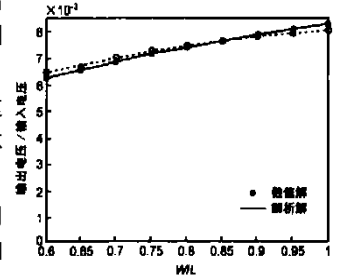


图 4 W/L 变化时数值解和模拟解比较

6 结束语

这篇文章用摄动法求解了四端硅压力传感器的两维偏微分方程, 得到了输出电压的解析表达式. 虽然输出电压已有数值解模型, 但本文给出的结果精确、简练、便于实际人员设计和模拟使用, 对实际生产有重要的意义. 我们也用类似的方法求解了引出电极对 V_o 的影响, 输出电阻的解析表达式, 这些将另文介绍.

参考文献:

- [1] I P Zhadko, G G Babichev, et al. Silicon pressure transducer with differential sensitive element based on transverse electromotive force effect [J]. Sensors and Actuators A, 2001, 90(1): 89-95.
- [2] A V Gridchin, V A Gridchin. The four terminal piezotransducer: theory and comparison with piezoresistive bridge [J]. Sensors and Actuators A, 1997, 58(2): 219-223.
- [3] 齐薇佳, 鲍敏杭. 横向电压型压力传感器电极短路效应 [J]. 复旦大学学报, 1988, 27(1): 68-75.
- [4] 李家春, 周显初. 数学物理中的渐近方法 [M]. 北京: 科学技术出版社, 1998. 181-269.
- [5] Ji Huan he. Linearized perturbation technique and its applications to strongly nonlinear oscillators [J]. Computers and Mathematics with Applications, 2003, 20(45): 1-8.
- [6] N M 雷日克, N C 格拉德什坦. 函数表与积分表 [M]. 北京: 高等教育出版社, 1959. 39, 8, 464.

作者简介:

陆生礼 男, 1965 年 9 月生于江苏江阴, 1990 年毕业于南京大学信息物理系, 获理学硕士学位. 现在东南大学电子工程系工作, 研究方向为专用集成电路与系统设计、MOS 器件与物理、功率器件与电路.

柯导明 1954 年 7 月出生于安徽安庆, 1992 年毕业于东南大学电子工程系, 获博士学位, 安徽大学电子学院工作, 现在的研究方向是半导体器件物理与模拟. E-mail: kezhang2@mail.hf.ah.cn.