

一种新的 Pseudo-Zernike 矩的快速算法

夏 婷, 周卫平, 李松毅, 舒华忠

(东南大学计算机科学与技术系, 江苏南京 210096)

摘 要: Zernike 矩因具有正交性和旋转不变性而广泛应用于模式识别、图像分析等领域。Pseudo-Zernike 矩具有与 Zernike 矩相似的性质, 但它较 Zernike 矩具有更好的抗噪声性。由于 pseudo-Zernike 矩的复杂性, 相关的快速算法的研究尚未得到很好的解决。本文根据 pseudo-Zernike 矩自身的特点, 推导了一种快速有效的计算方法。

关键词: Zernike 矩; pseudo-Zernike 矩; 快速算法

中图分类号: TP301 **文献标识码:** A **文章编号:** 0372-2112 (2005) 07-1295-04

A Novel Algorithm for Fast Computation of Pseudo-Zernike Moments

XIA Ting, ZHOU Wei ping, LI Song-yi, SHU Hua zhong

(Department of Computer Science and Technology, Southeast University, Nanjing, Jiangsu 210096, China)

Abstract: Zernike moments are widely used in the fields of pattern recognition and image analysis due to their good properties such as orthogonality and rotation invariance. Pseudo-Zernike moments have similar properties as those of Zernike moments; moreover, they are less sensitive to image noise than the conventional Zernike moments. However, the problem of fast computation of pseudo-Zernike moments has not been well solved due to the complexity of the pseudo-Zernike polynomials. In this paper, we present a novel method for fast computing the pseudo-Zernike moments.

Key words: zernike moments; pseudo zernike moments; fast algorithm

1 引言

矩是描述图像特征的算子, 它在模式识别与图像分析领域中有重要的应用。迄今为止, 常见的矩描述子可以分为以下几种: 几何矩、正交矩 (Legendre 矩、Zernike 矩, pseudo-Zernike 矩)、复数矩和旋转矩。其中几何矩提出的时间最早且形式简单, 对它的研究最为充分。而正交矩因为具有简单的反变换形式, 且用其描述图像具有最少的信息冗余度, 因而较其它类型的矩有更广泛的应用^[1]。

Zernike 多项式于 1934 年被首次提出^[2], 随后 Bhatia 和 Wolf 等人推导了它的正交性和不变性^[3]。Pseudo-Zernike 矩具有与 Zernike 矩相似的正交性质和旋转不变性, 但前者对图像的噪声敏感性更低。此外, pseudo-Zernike 矩提供了更多的特征向量: 对于不超过 n 阶的 pseudo-Zernike 矩, 共有 $(n+1)^2$ 个线性独立的矩, 而 Zernike 矩只含有 $(n+1)(n+2)/2$ 个线性独立分量。

然而, pseudo-Zernike 矩的计算复杂耗时, 这在很大程度上限制了它在图像处理方面的应用。由于 pseudo-Zernike 多项式定义在单位圆内, 其计算过程中需要进行相应的坐标变换, 故比 Legendre 矩计算复杂。即便是与 Zernike 矩比较, 许多关于 Zernike 矩的快速算法也不能直接有效地用来计算 pseudo-

Zernike 矩。目前, 有关正交矩的快速算法研究主要集中在 Legendre 矩和 Zernike 矩^[4~8]。

最近 Chong 等人提出了一种基于两步骤法的 pseudo-Zernike 矩的快速算法^[9]。其主要思想是通过迭代方法由低阶矩计算高阶矩。但对于某一指定阶数的矩, 他们的方法并不能独立地计算出结果, 必须先计算相应的低阶矩。因此该方法不适用于计算单个给定阶数的矩。

本文提出一种新的计算 pseudo-Zernike 矩的方法, 我们称其为 l 迭代法。该方法不仅能够减少矩的计算时间, 而且可以有效地计算任一指定阶数的矩。

2 Pseudo-Zernike 矩介绍

Bhatia 和 Wolf 指出^[3], 若一个多项式, 在轴关于原点旋转后, 具有不变性, 必须具有如下的形式:

$$V_{nl}(x, y) = V_{nl}(r \cos \theta, r \sin \theta) = R_n(r) \cdot e^{j l \theta}, \quad j = \sqrt{-1} \quad (1)$$

即具有旋转不变性的多项式必须是一个实值多项式与复指数函数的乘积。

阶数为 n 、重复度为 l 的 pseudo-Zernike 矩定义为^[1]:

$$A_{nl} = \frac{n+1}{\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^1 R_{nl}(r) \cdot e^{-j l \theta} f(r, \theta) r dr d\theta \quad (2)$$

其中, $f(r, \theta)$ 是一幅灰度图像的极坐标表示, $R_{nl}(r)$ 是 pseudo-

Zemike 径向多项式, 其定义为

$$R_{nl}(r) = \sum_{s=0}^{n-|l|} (-1)^s \frac{(2n+1-s)!}{s! (n-1-|l-s|)! (n+1+|l+1-s|)!} r^{n-s} \quad (3)$$

$n = 0, 1, 2, 3, \dots; l$ 可取正负整数值, 且满足 $|l| \leq n$.

显然, pseud σ Zemike 矩具有旋转不变性, 并且具有正交性. 若令

$$V_{nl}(x, y) = V_{nl}(r \cos \theta, r \sin \theta) = R_{nl}(r) e^{jl\theta} \quad (4)$$

则

$$\int_0^{2\pi} \int_0^1 [V_{nl}(r, \theta)]^* V_{mk}(r, \theta) r dr d\theta = \frac{\pi}{n+1} \delta_{mn} \delta_{kl} \quad (5)$$

由于 pseud σ Zemike 矩由极坐标 (r, θ) 表示, 且 $|r| \leq 1$. 故在计算时, 需将原始图像映射到单位圆内. pseud σ Zernike 矩的离散化公式为^[4]:

$$A_{nl} = \frac{2(n+1)}{\pi(N-1)^2} \sum_{i=0}^{N-1} \sum_{j=0}^{N-1} R_{nl}(r_{ij}) e^{-jl\theta} f(i, j) \quad (6)$$

其中:

$$r_{ij} = \sqrt{(c_1 i + c_2)^2 + (c_1 j + c_2)^2} \quad (7a)$$

$$\theta_{ij} = \tan^{-1} \left(\frac{c_1 j + c_2}{c_1 i + c_2} \right) \quad (7b)$$

$$c_1 = \frac{\sqrt{2}}{N-1}, \quad c_2 = -\frac{1}{\sqrt{2}} \quad (7c)$$

3 Pseud σ Zernike 矩的快速算法

对于一幅给定的数字图像, 由公式(2), (3)可以看出, pseud σ Zernike 矩的计算复杂性主要是由多项式 R_{nl} 的计算复杂性造成的. 在公式(3)中, 假设计算 $m!$ 需要 $m-1$ 次乘法, 和式中的每一小项要算 4 次阶乘的运算, 一次求幂运算, 因此每一小项需要约 $(5n-3s-3)$ 次乘法运算; 一个和式共有 $(n-|l|+1)$ 项, 因此, 计算一个 R_{nl} 用到了大约 $(n-|l|+1)(7n+3|l|-6)/2$ 次乘法, 对给定的阶数 $n, |l|$ 从 0 到 n , 共需要约 $2n^3 + 9n^2/2 - n/2$ 次乘法, 即 $O(n^3)$ 次乘法. 对一幅 $N \times N$ 的数字图像, 计算 n 阶 pseud σ Zernike 矩 A_{nl} , 若按直接方法对所有像素遍历一遍, 则由计算径向多项式 R_{nl} 带来的乘法运算次数为 $O(N^2 n^3)$. 可见, 随着图像尺寸 N 以及阶数 n 的增大, 运算量迅速增大. 因此, 有必要引入相应的快速算法.

3.1 两步骤法

Chong 等人对 pseud σ Zernike 多项式进行了研究^[9], 提出了如下的迭代关系

$$R_{nl} = (L_1 r + L_2) R_{(n-1)l}(r) + L_3 R_{(n-2)l}(r) \quad (8)$$

$$\begin{cases} L_1 = \frac{2n(2n+1)}{(n+l+1)(n-l)} \\ L_2 = -2n + \frac{(n+l)(n-l-1)}{(2n-l)} L_1 \\ L_3 = (2n-1)(n-1) - \frac{(n+l-1)(n-l-2)}{2} L_1 + 2(n-1)L_2 \end{cases} \quad (9)$$

$$R_{nn}(r) = r^n \quad (10)$$

$$R_{n-1}(r) = -2nR_{(n-1)(n-1)}(r) + (2n+1)R_{nn} \quad (11)$$

在文献[9]中, 他们提出, 当 $n-l > 1$ 时, 用式(8)和式(9)迭代

计算多项式 $R_{nl}(r)$ 的值; 当 $n=l$ 时, 用式(10); 当 $n-l=1$ 时, 用式(11). 这样, 可以避免阶乘的计算. 但用该方法获取某一给定 n 阶的 pseud σ Zernike 多项式值时需要计算所有低于 n 阶的矩, 因此所需的运算量与计算从 0 到 n 阶所需的运算量相同, 都为 $O(n^2)$.

3.2 l 迭代法

为了解决 Chong 方法中存在的缺陷, 我们提出一种新的迭代计算 pseud σ Zernike 矩 A_{nl} 的方法. 该方法的思想是推导多项式 $R_{nl}(r)$ 关于下标 l 的迭代关系, 通过高序数的 l 推导出低序数的 l 的 $R_{nl}(r)$ 值, 因此我们称其为 l 迭代算法.

对于 $n-l \geq 2$, 我们旨在得到如下形式的迭代关系式:

$$R_{n(l-2)}(r) = H_1 R_{nl}(r) + (H_2 + \frac{H_3}{r}) R_{n(l-1)}(r) \quad (12)$$

在上式中, 若 $l = n$, 则由 $R_{nl}(r)$ 的定义可知, 式(12)左边为:

$$R_{n(n-2)}(r) = n(2n+1)r^n - 2n(2n-1)r^{n-1} + (2n-1)(n-1)r^{n-2} \quad (13)$$

而式(12)右边为:

$$\begin{aligned} & H_1 R_n(r) + (H_2 + \frac{H_3}{r}) R_{n(n-1)}(r) \\ &= H_1 r^n + (H_2 + \frac{H_3}{r}) [(2n+1)r^n - 2nr^{n-1}] \\ &= (H_1 + H_2(2n+1))r^n + (H_3(2n+1) - 2nH_2)r^{n-1} - 2nH_3r^n \end{aligned} \quad (14)$$

比较上述二式相应的系数, 可得到:

$$\begin{cases} H_1 = n(2n+1) - (2n+1)H_2 \\ H_2 = \frac{2n+1}{2n}H_3 + (2n-1) \\ H_3 = -\frac{(2n-1)(n-1)}{2n} \end{cases} \quad (15)$$

类似地, 当 $l = n-1$ 时, 可得到

$$\begin{cases} H_1 = (2n-1)(n-1) - (2n-1)H_2 + \frac{2n+1}{2}H_3 \\ H_2 = \frac{2n}{n-1}H_3 + (2n-3) \\ H_3 = -\frac{2(2n-3)(n-2)}{3(2n-1)} \end{cases} \quad (16)$$

综上, 令

$$\begin{cases} H_1 = a + bH_2 + dH_3 \\ H_2 = dH_3 + e \\ H_3 = f \end{cases} \quad (17)$$

其中, a, b, c, d, e, f 为系数, 且只与 n, l 有关, 而与 r 无关.

将式(17)代入式(12), 通过推导, 可以得到各系数为:

$$\begin{cases} a = l(2l+1) \\ b = -(2l+1) \\ c = \frac{(n+l+2)(n-l)}{2} \\ d = \frac{(n+l+1)(n-l+1)}{2l} \\ e = 2l-1 \\ f = -\frac{2(l-1)(2l-1)}{(n+l)(n-l+2)} \end{cases} \quad (18)$$

故可得到:

$$H_1 = l(2l+1) - (2l+1)H_2 + \frac{(n+l+2)(n-l)}{2}H_3 \quad (19a)$$

$$H_2 = \frac{(n+l+1)(n-l+1)}{2l}H_3 + 2l - 1 \quad (19b)$$

$$H_3 = -\frac{2(l-1)(2l-1)}{(n+l)(n-l+2)} \quad (19c)$$

这样, 通过式(10)、(11)、(12)和(19a)~(19c)可以计算出 n 阶的所有 pseudor Zernike 多项式 $R_{nl}(r)$ 。当 $l = n$ 时, 用公式(10); 当 $n - l = 1$ 时, 用公式(11); 当 $n - l > 1$ 时, 用公式(12)和(19a)~(19c); 对 l 按从大到小的顺序, 依次迭代, 可得到各阶的 $R_{nl}(r)$ 。

采用该算法, 对任意 $l(1 \leq l \leq n)$, 只有 $R_{nn}(r)$, $R_{n(n-1)}(r)$ 在计算 r^n 时需要的乘法次数稍多一点。对 $l < n - 1$, 不用计算 r 的各次幂, 也避免了系数的计算。用这一方法计算 4 阶, 3 阶, 2 阶, 1 阶 pseudor Zernike 多项式的示意图见图 1。

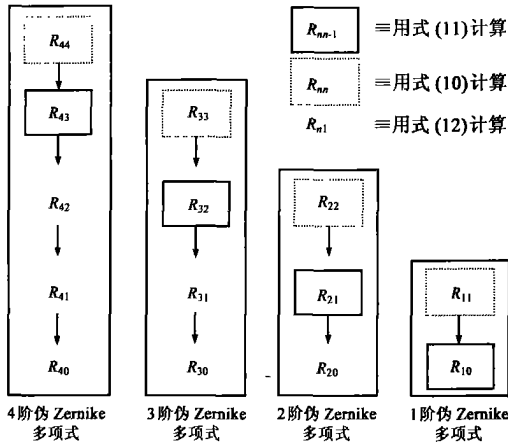


图 1 l 迭代法计算 pseudo-Zernike 多项式

用该方法计算 n 阶的 pseudor Zernike 矩 A_{nl} , 由计算多项式 $R_{nl}(r)$ 所需的乘法次数仅为 $O(n)$, 与文献[9]中的方法相比减少了一个数量级, 从而有效地提高了计算的速度。此外, 用这一方法, 还可独立计算出 n 阶的 pseudor Zernike 矩, 而不用计算出高于或低于 n 阶的矩。这意味着任意阶的 pseudor Zernike 矩均可独立完整的计算出来, 避免了用高阶或低阶矩迭代计算时由误差累积而可能产生的数据不稳定的现象。

在图像的特征提取中, 若只要求给定阶数的某一 pseudor Zernike 矩, 用这种方法可大大节省计算的时间, 并提高计算的精度。若要求不同阶的 pseudor Zernike 矩, 用这一算法可方便地实现并行计算。

4 实验结果

我们首先将前一节中介绍的两种方法用于计算一幅二值图像(见图 2, 图像大小为 63×63)的 pseudor Zernike 矩。表 1 列出了求指定阶矩所需的 CPU 时间(本文实验在 Intel P4 2.4GHz PC 机上实现), 表 2 列出了两种方法对该幅图像求 0 到指定阶的 pseudor Zernike 矩的 CPU 时间。从表中数据可以看出, 求指定阶的 pseudor Zernike 矩, l 迭代法较 Chong 的方法有效得多。对于计算从 0 到指定阶数的所有 pseudor Zernike 矩, 则

两种方法的效率差不多。

表 1 对二值图像(63×63)

指定的阶数 n	求指定阶数的矩	
	CPU 时间(单位: 毫秒)	
	两步骤法	l 迭代法
$n = 5$	40	29
$n = 10$	107	55
$n = 15$	203	82
$n = 20$	312	106
$n = 25$	447	131
$n = 30$	600	167
$n = 35$	782	200
$n = 40$	981	234

表 2 对二值图像(63×63)

0 指定的阶数 n	求 0 到指定阶的矩	
	CPU 时间(单位: 毫秒)	
	两步骤法	l 迭代法
$n = 0-5$	96	94
$n = 0-10$	363	361
$n = 0-15$	774	774
$n = 0-20$	1324	1325
$n = 0-25$	2066	2062
$n = 0-30$	2904	2891
$n = 0-35$	3971	3969
$n = 0-40$	5102	5099

表 3 对灰度图像(32×32)

指定的阶数 n	求指定阶数的矩	
	CPU 时间(单位: 毫秒)	
	两步骤法	l 迭代法
$n = 5$	10	7
$n = 10$	40	13
$n = 15$	84	19
$n = 20$	134	25
$n = 25$	203	32
$n = 30$	281	37
$n = 35$	396	47
$n = 40$	473	59

表 4 对灰度图像(32×32)

0 指定的阶数 n	求 0 到指定阶的矩	
	CPU 时间(单位: 毫秒)	
	两步骤法	l 迭代法
$n = 0-5$	22	22
$n = 0-10$	92	93
$n = 0-15$	202	197
$n = 0-20$	345	343
$n = 0-25$	527	530
$n = 0-30$	759	759
$n = 0-35$	1024	1020
$n = 0-40$	1322	1322

表 3 给出了对一幅 32×32 灰度图像, 用两种方法计算指定阶的矩所需的 CPU 时间, 表 4 列出了两种方法对该幅图像求 0 到指定阶的 pseudor Zernike 矩的 CPU 时间。

由于 pseudor Zernike 矩为正交矩, 我们利用下述反变换公式重建一幅图像:

$$f(x, y) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{\substack{l=-n \\ l \neq 0}}^n A_{nl} V_{nl}(x, y) \approx \sum_{n=0}^M \sum_{l=-n}^n A_{nl} R_{nl}(r) e^{j l \theta} \quad (20)$$

图 3 给出了用 Chong 的方法对上面的 32×32 灰度图像的重建情况。从左到右, 依次为原始输入图像, n 取 10, 15, 20, 25, 30, 35, 40 阶的重建图像的结果。图 4 给出了用 l 迭代法计算相应阶 pseudor Zernike 矩的图像重建结果。

我们用下式定量计算重建图像的误差。

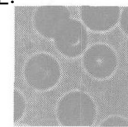


图 2 63×63 二值图像

图 5 125×125 灰度图像

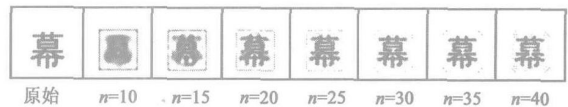


图 3 用两步骤法重建灰度图像

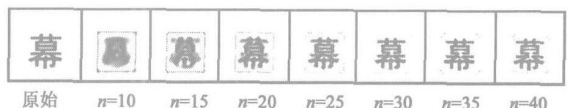


图 4 用 l 迭代法重建灰度图像

$$E = \frac{\sum_i \sum_j [f(i, j) - \hat{f}(i, j)]^2}{\sum_i \sum_j f(i, j)^2} \quad (21)$$

表5给出了对一幅 125×125 的灰度图像(图5),用两种方法重建图像的误差比较.可以看出,当阶数较低时,两种方法的重建精度差不多.而当阶数增大时, l 迭代法的重建误差比Chong的方法小.这是由于 l 迭代法避免了用低阶矩迭代计算高阶矩时所带来的误差累积.

表5 对 125×125 灰度图像重建误差的比较

阶数	两步骤法	l 迭代法
$n=5$	0.158628	0.158628
$n=10$	0.100403	0.100403
$n=15$	0.0697352	0.0697352
$n=20$	0.0454512	0.0454512
$n=25$	0.0307265	0.0307076
$n=30$	0.0225617	0.0222829
$n=35$	0.0157785	0.0155664
$n=40$	0.0124033	0.0118961
$n=45$	0.00952122	0.00898599
$n=50$	0.00779939	0.00718587

5 结论

本文中,我们对 pseudor Zernike 矩已有的快速算法进行了介绍,指出了其存在的主要缺陷,并推导了一种新的计算 pseudor Zernike 矩的快速算法.该方法能够非常有效地计算任意给定阶数的 pseudor Zernike 矩,因而对于只需要使用部分矩特征的图像分析方法具有很好的实用价值.

参考文献:

- [1] C H Teh, R T Chin. On image analysis by the methods of moments[J]. IEEE Trans Pattern Analysis and Machine Intelligence. 1988, 10(4): 496-513.
- [2] F Zernike. Beugungs theorie des schneidenverfahrens und seiner verbesserten form, der phasen kontrast methode[J]. Physica, 1934, 1: 689-704.
- [3] A B Bhatia, E Wolf. On the circular polynomials of Zernike and related

orthogonal sets[A]. Proc Camb Phil Soc[C]. 1954, 50: 40-48.

- [4] C W Chong, P Raveendran et al. A comparative analysis of algorithms for fast computation of Zernike moments[J]. Pattern Recognition. 2003, 36: 731-742.
- [5] R Mukundan, K R Ramakrishnan. Fast computation of Legendre and Zernike moments[J]. Pattern Recognition. 1995, 28(9): 1433-1442.
- [6] J Gu, H Z Shu et al. A novel algorithm for fast computation of Zernike moments[J]. Pattern Recognition. 2002, 35: 2905-2911.
- [7] H Z Shu, L M Luo, et al. An efficient method for computation of Legendre moments[J]. Graphical Models. 2000, 62: 237-262.
- [8] J D Zhou, H Z Shu, et al. Two new algorithms for efficient computation of Legendre moments[J]. Pattern Recognition. 2002, 35: 1143-1152.
- [9] C W Chong, et al. An efficient algorithm for fast computation of Pseudor Zernike moments[J]. International Journal of Pattern Recognition and Artificial Intelligence. 2003, 17(6): 1011-1023.

作者简介:



夏婷女, 1980年出生于南京, 东南大学影像科学与技术实验室硕士, 主要研究方向为医学图像处理 and 模式识别. E-mail: Lotus_xt@seu.edu.cn.



周卫平女, 现为东南大学影像科学与技术实验室副教授, 博士, 主要研究方向为医学图像处理、模式识别等.

李松毅男, 1967年出生, 现为东南大学影像科学与技术实验室讲师, 主要研究方向为医学图像处理等.

舒华忠男, 1965年生于江西, 现为东南大学生物医学工程系教授, 博士生导师, 1992年获法国雷恩大学应用数学博士学位, 研究工作主要包括放射治疗计划优化、医学图像处理和模式识别等.