

考虑高斯误差和 Doppler 扩展的最大比合并性能分析

李汉强¹, 郭伟¹, 郑辉²

(1 电子科技大学抗干扰通信国家重点实验室, 四川成都 610054 2 信号盲处理国防科技重点实验室, 四川成都 610041)

摘要: 在高斯误差和 Doppler 扩展条件下, 研究信道估计时公共导频信道相关长度对天线阵的合并性能影响. 假设信道估计通过相关 WCDMA 公共导频信道的 N 个符号来获得, 文章首先推导了相干 BPSK 解调时平均 BER 性能的闭解表达式, 然后利用该平均 BER 表达式对导频信道最优相关长度进行了分析, 给出了最优相关长度的计算方法, 并证明了最优相关长度 N 只与最大 Doppler 扩展 f_d 和符号周期有关, 与阵列参数以及天线接收的信噪比无关.

关键词: 天线阵列; 最大比合并; 非理想信道估计; 高斯误差; Doppler 扩展

中图分类号: TN913.24 **文献标识码:** A **文章编号:** 0372-2112 (2006) 01-0024-07

The Impacts of Gaussian Error and Doppler spread on Maximal-Ratio Combining of Antenna Arrays

LI Han-qiang¹, GUO Wei¹, ZHENG Hui²

(1. National Communication Technology Key Lab, University of Electronic Science and Technology of China, Chengdu, Sichuan 610054, China;
2. National Defence Key Lab of Blind Processing of Signals Chengdu, Sichuan 610041, China)

Abstract Maximum-ratio combining (MRC) is a simple and effective combining scheme for adaptive antenna arrays to combat fading. However, it requires estimation of the spatial signature (i.e., the channel gain and phase at each antenna element) of the desired signal across the array. Assuming the channel estimation is obtained by N symbols' correlation using common pilot channel (CPICH), we proceed to develop a fully analytical assessment of the impacts of Gaussian error and Doppler spread on the MRC performance. The originality of the approach revolves around the derivation of the closed-form expression for average bit error probability for coherent BPSK. The expression is then applied to find the optimal correlation length of channel estimation. As a result, the computing method of optimal correlation length has been given. It is also proved that the optimal correlation length N was only correlated with maximal Doppler spread f_d and symbol duration.

Key words antenna arrays; maximal-ratio combining; imperfect channel estimation; Gaussian error; Doppler spread

1 引言

在多天线分集接收系统中, 可以通过合并多个天线上接收到的信号来提高系统性能. 最大比合并 (MRC) 是线性合并技术中一种最优的合并技术. 通过选择最优的空间合并加权矢量, MRC 分集可以使得输出信噪比 (SNR) 最大化^[1]. 文章提出的多天线最大比合并接收机如图 1 所示, 每天线支路的复加权因子 a_k 始终与该支路信道增益的复共轭保持一致. 信道估计通过相关 WCDMA 系统的公共导频信道 (CPICH) 来获得 (CPICH 信道如图 2 所示). 信道估

计时, 一方面高斯噪声会对信道估计引入高斯估计误差, 为了降低噪声对估计的影响, 通常在相关时引入 N 个符号长度的平均来增加估计精度, 该平均的前提是假设信道衰落在该平均周期内保持不变; 另一方面, Doppler 扩展会使得信道衰落快速变化. Doppler 扩展越大, 衰落变化速度越快. 因此对相关长度 N 的选择就存在一个折中, 相关长度 N 太短, 对噪声的抑制较差; 相关长度 N 太长, Doppler 扩展的影响又不能保证信道衰落在相关周期 N 内保持不变. 本文的目的就是研究存在高斯误差和 Doppler 扩展时相关长度对天线分集接收机性能的影响.

已经有一些文献研究了高斯误差和 Doppler 扩展对分集接收性能的影响。文献 [2~4] 针对高斯误差的影响进行分析。J G Proakis 在文献 [2] 中分析了存在高斯误差时 MRC 合并的平均 BER 性能, 该文中的分析依靠相位作为判决变量。在文献 [3] 中, Gans 分析了存在高斯估计误差时输出信噪比 (SNR) 的概率密度函数。近来, S Roy 在文献 [4] 中首先推导了归一化 SNR 的概率密度函数, 然后利用推导的归一化 SNR 概率密度函数

进一步推导了相干 BPSK 解调时的中断概率和平均 BER 性能公式。以上文献都只针对高斯误差进行分析, 并没有分析 Doppler 扩展的影响。在文献 [5] 中, 作者分析自适应信道估计器, 提出根据 Doppler 扩展来选择最优的信道估计滤波器因子可以使得平均 BER 最小化。但是文章并没有给出平均 BER 性能的闭解表达式。在文献 [6] 中, 作者通过仿真方式分析高斯误差和 Doppler 扩展的综合影响, 仿真结果表明综合考虑高斯误差和 Doppler 扩展时, 存在最优的相关长度 N 可以使得平均 BER 最小化。然而该文只是通过仿真进行分析, 并没有给出最优平均相关长度 N 的求解方法和平均 BER 性能表达式。

尽管已经有这些文献对本文相关问题进行了分析, 但是联合分析高斯误差和 Doppler 扩展对分集性能影响, 并给出理论推导结果的文献还没有看到。本文给出了解决该问题的一个完整分析框架。我们首先推导了多天线最大比合并接收机输出 SNR 的概率密度函数闭解, 然后利用该闭解进一步推导了相干 BPSK 解调的平均 BER 性能闭解表达式。最后利用该平均 BER 表达式对最优相关长度 N 进行了分析, 给出了求解最优相关长度 N 的方法, 证明了最优相关长度 N 只与 Doppler 扩展符号周期有关, 与信道条件无关。

2 信号模型和非理想信道估计

文章考虑具有 M 个接收天线单元的多天线分集接收系统。天线阵接收到的信号包含用户信号的 M 个副本和加性高斯白噪声。离散化后 k 时刻接收信号可以表示为

$$x(k) = c_0(k)s_0(k) + n(k) \quad (1)$$

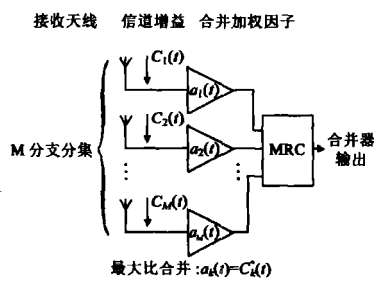


图 1 多天线最大比合并接收机

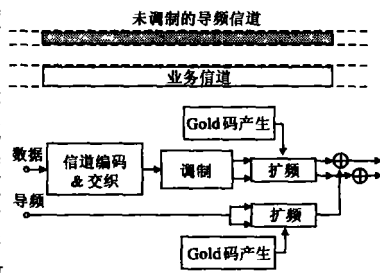


图 2 WCDMA 公共导频信道 CPICH

其中 $c_0(k) = [c_{01}(k), \dots, c_{0M}(k)]^T$ 是 $M \times 1$ 信道增益复矢量, 其具有宽平稳特性。 $s_0(k)$ 是传输的宽平稳信号, 平均传输功率为 σ_s^2 , $n(k)$ 是加性白高斯噪声复矢量, 方差矩阵为 $R_n = I_M \sigma_n^2$ 。其中 I_M 是 $M \times M$ 单位矩阵。此处假设天线单元间距离足够远, 天线单元上的衰落互不相关, 即衰落相关矩阵为 $E\{c_0(k)c_0^H(k)\} = I_M \Omega$ 参数 Ω 是 $c_{\alpha}(k)$ 的二阶矩。信道假设为 Rayleigh 衰落信道, 且最大 Doppler 扩展为 f_d 。

阵列信号进行加权合并之后的输出 SNR 可以表示为

$$Y_0(k) = \frac{\langle |w_0^H(k)c_0(k)s_0(k)|^2 \rangle}{\langle |w_0^H(k)n(k)|^2 \rangle} \quad (2)$$

其中 $\langle \cdot \rangle$ 表示期望平均, $|\cdot|$ 表示取复数幅度。 $w_0(k)$ 是空间合并加权矢量。当信道增益矢量 $w_0(k)$ 被理想估计时, 空间加权矢量 $w_0(k)$ 就等于信道衰落矢量 $c_0(k)$ 的复共轭, 此时输出 SNR 可以被最大化。理想的输出 SNR 可以表示为 [4]

$$Y_0(k) = \frac{\sigma_s^2 c_0^H(k)c_0(k)}{\sigma_n^2} \quad (3)$$

然而在实际系统中, 不可能对信道衰落矢量进行理想估计, 通常利用信道衰落矢量 $c_0(m)$ 的估计 $\hat{c}_0(m)$ 来进行 MRC 合并。估计 $\hat{c}_0(m)$ 通过相关 WCDMA 共同导频信道 CPICH 的 N 个符号来获得。这里我们假设导频信道的扩频码与业务信道的扩频码完全正交, 即业务信道对信道估计没有影响。在该假设条件下信道衰落矢量 $c_0(m)$ 的估计 $\hat{c}_0(m)$ 可以表示为:

$$\hat{c}_0(m) = \frac{1}{N\sigma_s^2} \cdot \left[\sum_{k=m-L(N-1)/2}^{m+L(N-1)/2} |p(k)|^2 c_0(k) + \sum_{k=m-L(N-1)/2}^{m+L(N-1)/2} p^*(k)n(k) \right] \quad (4)$$

其中 $p(k)$ 是公共导频信道 CPICH 传输信号。文献 [3] 已经计算了存在 Doppler 扩展时信道衰落的自相关函数为:

$$E\{c_{0i}(k)c_{0i}^*(k+\tau)\} = J_0(2\pi f_d \tau) \Omega \quad \text{for } i \in \{1, 2, \dots, M\} \quad (5)$$

其中 f_d 是最大 Doppler 扩展, τ 是时间延迟。 $J_0(g)$ 是第一类零阶 Bessel 函数。利用该式, 我们可以求出信道衰落矢量估计 $\hat{c}_0(m)$ 的条件均值和方差为:

$$E\{\hat{c}_0(m) | c_0(m)\} = \frac{\sum}{N} c_0(m) \quad (6)$$

$$\text{var}\{\hat{c}_0(m)\} = \frac{\sum^2}{N^2} \text{var}\{c_0(m)\} + \frac{\sigma_n^2}{N\sigma_s^2}$$

其中 $\sum = \sum_{j=0}^{N-1} J_0(2\pi f_d T_b)$, T_b 是符号周期。

则在估计噪声等效的准则下, 可以将 $\hat{c}_0(m)$ 表示为

$$c_0(m) = \frac{\sum}{N} c_0(m) + e(m) \quad (7)$$

其中 $\frac{\sum}{N}$ 对应于 Doppler 扩展的影响。 $e(m) = [e_1(m), e_2(m), \dots, e_M(m)]^T$ 对应于高斯估计误差, 它为一个高斯随机变量矢量, 其相关矩阵为 $R_e = \sigma_n^2 \backslash (N\sigma_s^2) I_M$ 。即 $e_i(m)$ 的方差为 $\sigma_n^2 \backslash (N\sigma_s^2)$ 。

则多天线分集接收系统实际输出 SNR 为:

$$\gamma(m) = \frac{\sigma_s^2 |d_0^H(m) c_0(m)|^2}{\langle |d_0^H(m) n(m)|^2 \rangle} \quad (8)$$

3 Rayleigh信道中相干 BPSK解调准确 BER性能分析

3.1 归一化 SNR的条件概率密度函数

与文献[4]的处理方法相同,我们首先利用一个归一化正交变换矩阵 P 将信道衰落矢量 $c_0(m)$ 变换为只在第一行有值,其余行为 0 的形式,即 $d_0(m) = p c_0(m) = \sqrt{c_0^H(m) c_0(m)} u$, $u = [1, 0, \dots, 0]^T$. 则经过正交变换矩阵 P 变换之后为:

$$d_0(m) = \left[\frac{\sum}{N} + g_1(m) \right] d_0(m) + h(m) \sqrt{c_0^H(m) c_0(m)} \quad (9)$$

其中 $d_0(m) = p c_0(m)$, $h(m) = [0, g_2(m), \dots, g_M(m)]^T$, $g(m) = [g_1(m), \dots, g_M(m)] = f(m) / \sqrt{c_0^H(m) c_0(m)}$, $f(m) = P \cdot e(m)$. 因为 $e(m)$ 的自相关矩阵对于空间旋转来讲是不变的,则新噪声矢量 $f(m)$ 的自相关矩阵与 $e(m)$ 的相同.

利用式(9),我们可以将实际输出 SNR(8)表示为:

$$\gamma = \frac{\sigma_s^2 |d_0^H(m) d_0(m)|^2}{\langle |d_0^H P \cdot n(m)|^2 \rangle} = \frac{\sigma_s^2 \left| \frac{\sum}{N} + g_1(m) \right|^2 (c_0^H(m) c_0(m))^2}{\left[\left| \frac{\sum}{N} + g_1(m) \right|^2 c_0^H(m) c_0(m) + h^H(m) h(m) c_0^H(m) c_0(m) \right] \sigma_n^2} \quad (10)$$

进一步可求出归一化 SNR ρ 为:

$$\rho = \frac{\gamma}{\gamma_0} = \frac{1}{1 + \frac{h^H(m) h(m)}{|\sum N + g_1(m)|^2}} \quad (11)$$

利用非中心 F 分布^[7],我们推导了归一化 SNR ρ 的条件概率密度函数为(参考附录 A):

$$f\rho(\rho | \gamma_0) = (M-1) e^{-\rho \gamma_0} \gamma_0^{-1} {}_1F_1 \left[M; 1; \frac{\rho \gamma_0}{2N} \right] \rho \cdot (1-\rho)^{M-2} \quad (12)$$

其中 ${}_1F_1(\alpha; \beta; z)$ 是合流超几何函数.

3.2 输出 SNR 的概率密度函数

在 Rayleigh衰落信道中,理想 SNR γ_0 是一个 $2M$ 自由度的 χ^2 分布,它的概率密度函数为 $f(\gamma_0) = \frac{\gamma_0^{M-1}}{\gamma_0^M \Gamma(M)} e^{-(\gamma_0/\gamma_0)}$, 其中 $\gamma_0 = (\sigma_s^2 \Omega) / \sigma_n^2$, 表示每个天线单元上平均输出 SNR. 我们已经获得了归一化信噪比 $\rho = \gamma/\gamma_0$ 的条件概率密度函数,因此实际输出 SNR γ 的概率密度函数可以通过下面的积分来获得:

$$f(\gamma) = \int_{\gamma_0} \frac{1}{\gamma_0} f_{\rho|\gamma_0} \left(\frac{\gamma}{\gamma_0} | \gamma_0 \right) f(\gamma_0) d\gamma_0 \quad (13)$$

利用[8, p. 318, eq. 3.382], 实际输出 SNR γ 的概率密度函

数可以表示为

$$f(\gamma) = \gamma_0^M \left[\frac{\sum^2}{2N} + \frac{1}{\gamma_0} \right]^{-(M-1)} e^{-\rho(\sum^2/(2N) + 1/(\gamma_0))} {}_1F_1 \left[M; 1; \frac{\sum^2}{2N} \gamma \right] \quad (14)$$

利用库默尔变换^[9],有

$${}_1F_1(\alpha; \beta; z) = e^z {}_1F_1(\beta - \alpha; \beta; z - \alpha z) \quad (15)$$

则可以将式(14)重新表示为

$$f(\gamma) = \gamma_0^M \left[\frac{\sum^2}{2N} + \frac{1}{\gamma_0} \right]^{-(M-1)} e^{-(\gamma/\gamma_0)} \times {}_1F_1 \left[1-M; 1; \frac{\sum^2}{2N} \gamma \right] \quad (16)$$

注意到上式合流超几何函数的第一个参数小于 0 可以利用索宁多项式^[10]将实际输出 SNR 的概率密度函数 $f(\gamma)$ 表示为闭解形式,即

$$f(\gamma) = \gamma_0^M \left[\frac{\sum^2}{2N} + \frac{1}{\gamma_0} \right]^{-(M-1)} e^{-(\gamma/\gamma_0)} \sum_{k=0}^{M-1} C_{M-1}^k \left[\frac{\sum^2}{2N} \gamma \right]^k \quad (17)$$

3.3 BPSK解调时平均 BER性能

对于 BPSK 调制,某一确定输出 SNR 的条件 BER 为 $P_b^{BPSK}(\gamma)^{[1]} = Q(\sqrt{\gamma})$. 可以将条件 BER 在输出 SNR γ 的概率密度函数上进行平均来获得 BPSK 调制时的平均 BER

$$P_b^{BPSK} = \int_0^\infty Q(\sqrt{\gamma}) f_\gamma(\gamma) d\gamma = \gamma_0^M \left[\frac{\sum^2}{2N} + \frac{1}{\gamma_0} \right]^{-(M-1)} \sum_{k=0}^{M-1} C_{M-1}^k \left[\frac{\sum^2}{2N} \right]^k Q_3 \quad (18)$$

其中 $Q_3 = \int_0^\infty \frac{Q(\sqrt{\gamma})}{k!} \gamma^k e^{-(\gamma/\gamma_0)} d\gamma$ 我们已经在附录 B 中推导了 Q_3 的闭解表达式(参考附录 B)

$$Q_3 = \frac{1}{2} \gamma_0^{k/2} \left[1 - \sqrt{\frac{\gamma_0}{\gamma_0 + 2}} \sum_{i=0}^k C_{2i} \left[\frac{1}{2\gamma_0 + 4} \right]^i \right] \quad (19)$$

最后将 Q_3 带入并化简就得到了 BPSK 调制时平均 BER 性能表达式:

$$P_b^{BPSK} = \frac{1}{2} \left\{ 1 - \left[\frac{\sum^2}{2N} + \frac{1}{\gamma_0} \right]^{-(M-1)} \sum_{k=0}^{M-1} C_{M-1}^k \left[\frac{\sum^2}{2N} \right]^k \cdot \left[\frac{1}{\gamma_0} \right]^{M-1-k} \sqrt{\frac{\gamma_0}{\gamma_0 + 2}} \sum_{i=0}^k C_{2i} \left[\frac{1}{2\gamma_0 + 4} \right]^i \right\} \quad (20)$$

为了验证式(20)在无 Doppler 扩展时的正确性,我们令最大 Doppler 扩展 f_d 等于 0 且 N 趋于无穷,并注意到对于 $i = 0, 1, \dots, M-2$ 上式第一层求和的累加项在 N 趋于无穷时都等于零只有 $i = M-1$ 时非零. 化简后有

$$P_b^{BPSK} = \frac{1}{2} \left\{ 1 - \left[\sum_{i=0}^{M-1} C_{2i} \left[\frac{1-\mu^2}{4} \right]^i \right] \right\}, \mu = \sqrt{\frac{\gamma_0}{\gamma_0 + 2}} \quad (21)$$

式(21)与 J Proakis 在文献[1]中推导的公式等价.

图 3 给出了当 $f_d = 0$ 本文推导的式(20)与文献[1]推导的公式在 N 趋于无穷时的对比^①. 当 $f_d = 0$ 时,有 $\sum_{j=0}^{N-1} J_0(2j\pi \cdot 0 \cdot T_b) = N$, 于是式(7)变成 $\hat{c}_0(m) = c_0(m)$

① 文中的仿真根据 WCDMA 规范进行,即仿真中的载波频率和符号周期 T_b 分别是 2GHz 和 6.25×10^{-5} 秒

+ $e(m)$, 且 $e_i(m)$ 的方差 $\sigma_n^2 / (N\sigma_s^2)$ 在 N 趋于无穷时趋于零, 则 $\hat{c}_0(m)$ 趋于 $c_0(m)$, 即理想信道估计. 从图 3 给出的结果来看, 当 $f_d = 0$ 时, 本文推导的公式 (20) 在 N 趋于无穷时趋近于文献 [1] 推导的公式.

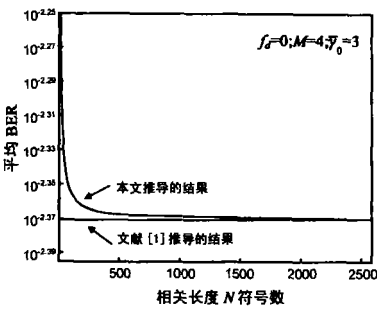


图 3 公式 (20) 的正确性验证

由于 Doppler 扩展的影响, 使得信道增益在式 (4) 的相关区间 N 内并不保持不变, 特别是终端高速移动的时候. 相关区间越长 (N 越大), 因 Doppler 扩展而引入的估计误差也越大. 但是因高斯噪声而引入的高斯估计误差 (式的最后一项) 却需要长的相关区间来减小 $e_i(m)$ 的方差. 因此存在一个合理的相关长度 N 可以使得平均 BER 最小. 图 4 给出了以 \bar{v}_0 和终端移动速度 V 为参数时, 平均 BER 与相关长度 N 的关系. 图中的曲线可以分为两组, 分别对应于 $\bar{v}_0 = 10$ 和 $\bar{v}_0 = 2$ 每组曲线包括终端移动速度 $V = 100, 200$ 和 300 km/h 时的结果. 从仿真结果可以看出, 对于不同的终端移动速度, 存在一个最优的相关长度 N 可以使得平均 BER 最小. 从两组曲线之间的对比来看, 最优相关长度 N 值只与终端移动速度 V 有关, 与 \bar{v}_0 无关.

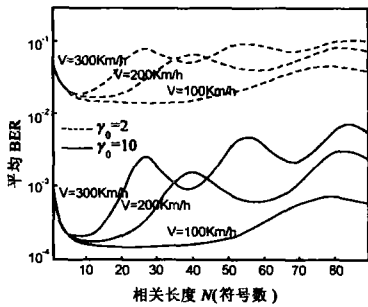


图 4 平均 BER 与相关长度 N 的关系 (天线数 $M = 4$)

4 最优相关长度 N 分析

图 4 已经表示在高斯估计误差和 Doppler 扩展的综合影响下, 存在一个最优的相关长度 N 可以使得平均 BER 最小. 在本部分, 我们针对最优相关长度 N 进行分析. 将 $P_b^{lp,sk}$ 对于 N 进行求导, 并令导数为零就可以求出最优的相关长度 N . 首先我们定义 $Q = \frac{\sum_{i=1}^2}{2N}$. 求导之后并令导数为零有:

$$\frac{d(P_b^{lp,sk})}{dN} = \frac{d(P_b^{lp,sk})}{dQ} \times \frac{dQ}{dN} = \Psi \times Q'_N = 0 \quad (22)$$

其中 Ψ 表示平均 BER $P_b^{lp,sk}$ 对 Q 的导数, Q'_N 表示 Q 对 N 求导. 我们在附录 C 证明了平均 BER $P_b^{lp,sk}$ 是关于 Q 的递减函数, 即 $\Psi < 0$ (参考附录 C), 因此式 (22) 等价于

$$Q'_N = 0 \quad (23)$$

式 (23) 表示当 Q 得到其最大值时, $P_b^{lp,sk}$ 得到其最小值. 至

此, 我们可以得出一个重要结论: 相关长度 N 的最优值只与 Doppler 扩展和符号周期有关, 与天线阵列参数和信号功率参数无关.

显然, 利用式 (23) 来求解理论上的最优相关长度 N 将会计算非常复杂. 本部分的目的就是寻求合理的近似方法来求解最优 N 的近似解. 本文采用 Bessel 函数的多项式展开来对最优的相关长度 N 进行分析. 第一类零阶 Bessel 函数可以近似为 $J_0(z)$:

$$J_0(z) = \sum_{k=0}^K \frac{(-1)^k (z)^{2k}}{2^{2k} (k!)^2} \quad (24)$$

图 5 给出了 Q 值的近似值与真实值之间的比较. Q 值的近似计算结果分别利用 Bessel 函数的 2 阶和 1 阶近似 (即 $J_0(z) = \sum_{k=0}^K \frac{(-1)^k (z)^{2k}}{2^{2k} (k!)^2}$,

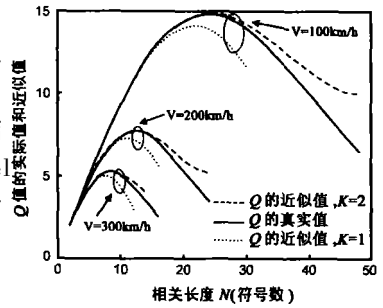


图 5 Q 值的近似精度比较 (天线数 $M = 4$)

选择 $K = 2$ 或 1 来计算, 而 Q 值的真实值直接利用 Bessel

函数来计算. 仿真结果显示 $K = 2$ 是最小的近似阶数. 它表示 $K = 2$ 是最小的整数可以使得近似后的 Q 曲线的最大值位置与 Q 的真实曲线的最大值位置保持一致, 而使得 Q 曲线出现最大值的 N 就为最优的相关长度 N .

利用 Bessel 函数的 2 阶近似, 我们将式 (23) 展开成了关于 N 的多项式形式 (参考附录 D)

$$\frac{D^4}{20} N^4 - \frac{D^4}{8} N^3 + \left(\frac{3D^4}{12} - \frac{3D^2}{3} \right) N^2 + \frac{3D^2}{2} N - \left(\frac{D^4}{120} + \frac{D^2}{6} - 1 \right) = 0 \quad (25)$$

其中 $D = \pi f_d T_b$. 方程的最小正实数解就为最优相关长度 N .

表 1 列出了不同终端移动速度时的最优相关长度 N 的近似值和理论值之间的计算结果比较. 最优 N 的近似值利用式 (25) 来计算, 而最优 N 的理论值直接利用式 (23) 来计算. 从仿真结果可以看出, 近似后的最优结果与理论值较好吻合, 但计算复杂度又不会太大.

表 1 不同终端移动速度时的最优相关长度

V (Km/h)	100	200	300	400	500
最优 N 的近似值 (符号数)	24	12	8	6	5
最优 N 的理论值 (符号数)	25	12	9	7	5

5 结论

文章分析了存在高斯估计误差和 Doppler 扩展条件下的最大比合并性能. 文章假设信道增益的估计是通过相关 WCDMA 公共导频信道的 N 个符号来获得. 在存在高斯估

计误差和 Doppler扩展的影响下,文章推导出的结果包括:实际输出 SNR 概率密度函数的闭解形式,相干 BPSK 解调的平均 BER 性能闭解表达式.利用平均 BER 表达式,文章分析了相关长度 N 对平均 BER 性能的影响.分析表明在高斯估计误差和 Doppler扩展的综合影响下,存在一个最优的相关长度 N 可以使得平均 BER 最小.文章还证明相关长度 N 的最优值只与最大 Doppler扩展和符号周期有关,与天线阵列参数和信号功率参数无关.

附录 A:

在本附录中,我们推导归一化 SNR的条件概率密度函数.

我们首先定义

$$\begin{cases} a = h^H(m)h(m) = \sum_{i=2}^M [\text{real}^2\{g_i(m)\} + \text{img}^2\{g_i(m)\}] \\ b = |\sum N + g_1(m)|^2 \end{cases} \quad (26)$$

则可定义 $c = \frac{|\sum N + g_1(m)|^2}{h^H(m)h(m)} = \frac{b}{a}$, 则归一化信噪比 $\rho =$

$$\frac{\gamma}{\gamma_0} = \frac{1}{1 + 1/c}$$

由文献 [1]可知 a 是具有 $2M - 2$ 自由度的 x^2 变量.其中

$\text{real}\{g_i(m)\}$ 和 $\text{img}\{g_i(m)\}$ 的方差为 $\frac{s}{2c_0^H(m)c_0(m)}$, $s = \frac{\sigma_n^2}{N\sigma_s^2}$

我们对 $b = |\sum N + g_1(m)|^2$ 进行变换有:

$$b = \frac{\left| \sum_{j=1}^N (1+j) + g_1(m)(1+j) \right|^2}{2} = \frac{H_x + H_y}{2} \quad (27)$$

其中 $H_x = \left[\frac{\sum}{N} + \text{real}\{g_1(m)\} - \text{img}\{g_1(m)\} \right]$, $H_y = \left[\frac{\sum}{N} + \text{real}\{g_1(m)\} + \text{img}\{g_1(m)\} \right]$. 从变换可以看出 H_x 和 H_y 是相互独立的高斯随机变量, 他们的均值为 $\frac{\sum}{N}$, 方差

为 $\frac{s}{c_0^H(m)c_0(m)}$.

则 b 是非中心、2自由度的 x^2 变量 [1].

$$\text{定义 } c' = \frac{\left| \frac{\sum}{N\sigma} + g_1(m)/\sigma \right|^2 / 2}{|g_2(m)/\sigma|^2 + \dots + |g_M(m)/\sigma|^2 / 2(M-1)}$$

$$= c(M-1), \text{ 其中 } \sigma = \sqrt{\frac{s}{Nc_0^H(m)c_0(m)}}$$

则根据文献 [7], c' 是非中心 F 分布, 其概率密度函数为

$$f_{c'}(c') = (M-1)e^{-(\sum N \sigma)^2 / 2}$$

$$\cdot {}_1F_1 \left[M; 1; \frac{\frac{1}{2M-1} \left(\frac{\sum}{N\sigma} \right)^2 c'}{1 + \frac{1}{M-1} c'} \right] \left(\frac{1}{1 + \frac{c'}{M-1}} \right)^M \quad (28)$$

由于 $c' = c(M-1)$, 则 c 的概率密度函数为:

$$f_c(c) = (M-1) \frac{1}{(1+c)^M} e^{-(\sum N \sigma)^2 / 2} {}_1F_1 \left[M; 1; \frac{\frac{1}{2} \left(\frac{\sum}{N\sigma} \right)^2 c}{1+c} \right] \quad (29)$$

由于 $\rho = \frac{\gamma}{\gamma_0} = \frac{1}{1 + 1/c}$ 通过简单变换就可以求出 ρ 的条件概率密度函数为:

$$f_\rho(\rho) = (M-1) e^{-(\sum N \sigma)^2 / 2} {}_1F_1 \left[M; 1; \frac{1}{2} \left(\frac{\sum}{N\sigma} \right)^2 \rho \right] \cdot (1-\rho)^{M-2} \quad (30)$$

最后将 s 和 σ 带入式 (30), 有 $\rho = \frac{\gamma}{\gamma_0}$ 的条件概率密度函数为

$$f_\rho(\rho) = (M-1) e^{-(\sum^2 \gamma_0 / 2N)} (1-\rho)^{M-2} {}_1F_1 \left[M; 1; \frac{\sum^2 \gamma_0}{2N} \rho \right] \quad (31)$$

附录 B:

在本附录中,我们推导 Q_3 (19)的闭解表达式.

经过变量替换, Q_3 可以表示为非完全 Gamma函数、指数函数以及幂函数的混合积分形式:

$$\begin{aligned} Q_3 &= \int_0^{\sqrt{\gamma_0}} Q(\sqrt{y}) y^k e^{-(y/\sqrt{\gamma_0})} dy \\ &= \frac{1}{2\sqrt{p}} \int_0^{\sqrt{\gamma_0}} y^k e^{-(y/\sqrt{\gamma_0})} \Gamma \left[\frac{1}{2}, \frac{y}{2} \right] dy \end{aligned} \quad (32)$$

根据 [8 eq 6.455.1, p663], 式 (32) 中的积分可以表示为超几何函数形式 ${}_2F_1(\alpha, \beta; \gamma; z)$. 即

$$\begin{aligned} Q_3 &= \frac{1}{2\sqrt{2p}} \frac{\Gamma \left[k + \frac{3}{2} \right] \left(\frac{2\sqrt{\gamma_0}}{\sqrt{\gamma_0} + 2} \right)^{k + \frac{3}{2}}}{k + 1} \\ &\cdot {}_2F_1 \left[1; k + \frac{3}{2}; k + 2; \frac{2}{\sqrt{\gamma_0} + 2} \right] \end{aligned} \quad (33)$$

文献 [11]已经推导了当 ${}_2F_1 \left[1; k + \frac{1}{2}; k + 1; \frac{2}{\sqrt{\gamma_0} + 2} \right]$ 中 k 是整数时, 它可以表示为闭解形式 [11, eq. 11]. 利用该结果, 将 Q_3 最终表示为:

$$Q_3 = \frac{1}{2} \sqrt{\gamma_0}^{k+1} \left[1 - \sqrt{\frac{\gamma_0}{\gamma_0 + 2}} \sum_{i=0}^k C_{2i}^k \left(\frac{1}{2\sqrt{\gamma_0} + 4} \right)^i \right] \quad (34)$$

附录 C:

在本附录中,我们证明平均 BER 是关于 $Q = \frac{\sum^2}{2N}$ 的单调递减函数. 即 $\Psi < 0$

要证明平均 BER (20) 是关于 $Q = \frac{\sum^2}{2N}$ 的单调递减函数, 即证明

$$H(Q) = \left[Q + \frac{1}{\gamma_0} \right]^{-(M-1)} \sum_{k=0}^{M-1} C_{M-1}^k(Q) \left[\frac{1}{\gamma_0} \right]^{M-1-k}$$

$$\cdot \left[\sum_{i=0}^k C_{2i}^i \left(\frac{1}{2\bar{v}_0 + 4} \right)^i \right] \quad Q > 0 \quad \bar{v}_0 > 0$$

是 Q 的单调递增函数. 将 $H(Q)$ 重新表示为:

$$H(Q) = \sum_{i=0}^{M-1} \sum_{k=i}^{M-1} C_{M-1}^k \left(\frac{Q}{Q + \frac{1}{\bar{v}_0}} \right)^{M-1-k} \cdot \left[C_{2i}^i \left(\frac{1}{2\bar{v}_0 + 4} \right)^i \right] = \sum_{i=0}^{M-1} f_1(Q; i; \bar{v}_0) = 1 + \sum_{i=1}^{M-2} f(Q; i; \bar{v}_0) + C_{2(M-1)}^{M-1} \left(\frac{Q}{2\bar{v}_0 + 4} \right)^{M-1} \left(Q + \frac{1}{\bar{v}_0} \right)^{M-1} \quad (35)$$

其中

$$f(Q; i; \bar{v}_0) = \left[C_{2i}^i \left(\frac{1}{2\bar{v}_0 + 4} \right)^i \right] \sum_{k=i}^{M-1} C_{M-1}^k \left(\frac{Q}{Q + \frac{1}{\bar{v}_0}} \right)^{M-1-k} \cdot \left(\frac{1}{\bar{v}_0} \right)^{M-1-k} \quad (36)$$

观察式 (35), 第一项为常数, 最后一项为 Q 的递增函数.

下面证明对于 $i \in (1, M-2)$, $f(Q; i; \bar{v}_0)$ 都是 Q 的递增函数.

将 $f(Q; i; \bar{v}_0)$ 重新表示为:

$$f(Q; i; \bar{v}_0) = \left[C_{2i}^i \left(\frac{1}{2\bar{v}_0 + 4} \right)^i \right] \frac{\sum_{k=i}^{M-1} C_{M-1}^k Q^k \left(\frac{1}{\bar{v}_0} \right)^{M-1-k}}{\left(Q + \frac{1}{\bar{v}_0} \right)^{M-1}} = \left[C_{2i}^i \left(\frac{1}{2\bar{v}_0 + 4} \right)^i \right] \frac{\sum_{k=i}^{M-1} C_{M-1}^k Q^k \left(\frac{1}{\bar{v}_0} \right)^{M-1-k}}{\sum_{j=0}^{i-1} C_{M-1}^j Q^j \left(\frac{1}{\bar{v}_0} \right)^{M-1-j} + \sum_{j=i}^{M-1} C_{M-1}^j Q^j \left(\frac{1}{\bar{v}_0} \right)^{M-1-j}} = \left[C_{2i}^i \left(\frac{1}{2\bar{v}_0 + 4} \right)^i \right] \frac{1}{\frac{f_1(Q; i)}{f_2(Q; i)} + 1}$$

其中

$$f_1(Q; i) = \sum_{j=0}^{i-1} C_{M-1}^j Q^j \left(\frac{1}{\bar{v}_0} \right)^{M-1-j} \quad f_2(Q; i) = \sum_{k=i}^{M-1} C_{M-1}^k Q^k \left(\frac{1}{\bar{v}_0} \right)^{M-1-k}$$

观察 $f_1(Q; i)$, 由于 $j \leq i-1$, 显然在定义域内, $f_1(Q; i)$ 是关于 Q 的单调递减函数. 观察 $f_2(Q; i)$, 由于 $k \geq i$ 则 $f_2(Q; i)$ 是关于 Q 的单调递增函数. 因此对于 $i \in (1, M-2)$, $f(Q; i; \bar{v}_0)$ 都是单调递增函数. 则 $H(Q)$ 是单调递增函数. 平均 BER 是关于 Q 的单调递减函数. 因此平均 BER 关于 Q 的导数小于零. 即

$$\Psi < 0 \quad (37)$$

命题得证.

附录 D: 将式 (23) 展开成关于 N 的多项式

利用 Bessel 函数的 2 阶近似, Q 可以被展开为:

$$Q \approx \left(\sum_{k=0}^2 \left[\frac{(-1)^k (2\gamma_d T_b)^{2k}}{2^{2k} (k!)^2} \sum_{j=0}^{N-1} J^{2k} \right] \right)^2 = \frac{(\Sigma_2(N))^2}{2N} \quad (38)$$

其中 $\Sigma_2(N)$ 为

$$\Sigma_2(N) = \sum_{k=0}^2 \left[\frac{(-1)^k (2\gamma_d T_b)^{2k}}{2^{2k} (k!)^2} \sum_{j=0}^{N-1} J^{2k} \right] = \frac{D^4}{20} N^5 - \frac{D^4}{8} N^4 + \left[\frac{D^4}{12} - \frac{D^3}{3} \right] N^3 + \frac{D^2}{2} N^2 - \left[\frac{D^4}{120} + \frac{D^2}{6} - 1 \right] N \quad (39)$$

其中 $D = \gamma_d T_b$, 则 Q_N 可以被表示为 $\frac{2\Sigma_2(N)\Sigma'_2(N)N - (\Sigma_2(N))^2}{2N^2}$, 其中 $\Sigma'_2(N)$ 表示 $\Sigma_2(N)$

对 N 求倒数.

注意到 $\Sigma_2(N)$ 在 $N > 0$ 的条件下将不等于 0 则式 (23) 等效于

$$2\Sigma'_2(N)N - \Sigma_2(N) = 0 \quad (40)$$

将式 (39) 带入式 (40) 后, 可以将式 (40) 展开成关于 N 的多项式形式:

$$\frac{D^4}{20} N^5 - \frac{D^4}{8} N^4 + \left[\frac{D^4}{12} - \frac{D^3}{3} \right] N^3 + \frac{D^2}{2} N^2 - \left[\frac{D^4}{120} + \frac{D^2}{6} - 1 \right] N = 0 \quad (41)$$

注意到 N 大于 0 则最终的展开结果为:

$$\frac{D^4}{20} N^4 - \frac{D^4}{8} N^3 + \left[\frac{D^4}{12} - \frac{D^3}{3} \right] N^2 + \frac{D^2}{2} N - \left[\frac{D^4}{120} + \frac{D^2}{6} - 1 \right] = 0 \quad (42)$$

最优相关长度 N 的近似解即为式 (42) 的最小正解.

参考文献:

[1] J G Proakis Digital Communications [M]. New York McGraw-Hill 1995.

[2] J G Proakis Probabilities of error for adaptive reception of M -phase signals [J]. IEEE Trans Commun Technol 1968 COM-16: 71- 81.

[3] M J Gans The effect of Gaussian error in maximal ratio combiners [J]. IEEE Trans Commun Technol 1971, 19: 492- 500.

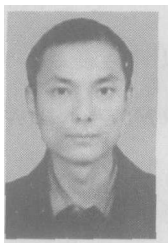
[4] S Roy P Fortier Maximal-ratio combining architectures and performance with channel estimation based on a training sequence [J]. IEEE Trans Wireless 2004 3: 1154- 1164.

[5] G A Chen X H You, J Wang Adaptive channel estimation and Dedicated pilot power adjustment based on the fading-rate measurement for a pilot-aided CDMA systems [J]. IEEE JSel Areas Commun 2001, 19(1): 132- 140.

[6] A Higashi T Taguchi K Ohno Performance of coherent de-

- tection and RAKE for DS-SS uplink channels [A]. Proceedings of PMRC'95 [C]. Toronto, Canada, 1995. 436-440.
- [7] R J Muihead Aspects of Multivariate Statistical Theory [M]. New York Wiley, 1982.
- [8] I S Gradshteyn, I M Ryzhik Table of Integrals, Series and Products [M]. San Diego CA: Academic, 1980.
- [9] 数学手册编写组. 数学手册 [M]. 北京: 人民教育出版社, 1979.
- [10] 蔡萋萋, 沈永欢, 等. 实用数学手册 [M], 北京: 科学出版社, 1992.
- [11] V Aalo S Pattaramalai Average error rate for coherent MPSK signals in Nakagami fading channels [J]. Electronics Letters, 1996, 32(17): 1538-1539.

作者简介:



李汉强 男, 1976年生于四川成都, 电子科技大学博士, 主要研究方向为第三代移动通信空时二维信号处理. E-mail: cnpk@126.com.



郭伟 男, 1964年生于四川达川, 电子科技大学教授、博士生导师, 中国通信学会青年工作委员会副主任委员和多家学术委员会委员, 主要研究方向为通信网络技术、网络仿真技术、信号处理技术、通信对抗技术等.

郑辉 男, 1957年出生于江苏昆山, 信号盲处理国防科技重点实验室博士生导师, 主要研究方向为多媒体通信、盲信号处理、移动通信技术.