

Zoom-FFT 的改进、频谱反演与时-频局部化特性

罗利春

(北京 947 信箱, 北京 100083)

摘要: 回顾了经典连续分段序列 Zoom-FFT 方法, 定义了时间分段序列的占比 R_{ms} , 分析了在实际应用中, 对 $R_{ms} < 1$ 的时间分段序列的 Zoom-FFT 处理的需求并建立了处理这种序列的新方法. 提出并证明了 R_{ms} 为任意值的 Zoom-FFT 频谱反演回实际频谱的理论公式和修正公式. 给出了对跳频信号进行 $R_{ms} = 1$ 的 Zoom-FFT 处理和对话带信号进行 $R_{ms} < 1$ 的 Zoom-FFT 处理并反演回实际频谱的例子. 证明 Zoom-FFT 方法对解决信号快速搜索和粗分析与信号细节分析的矛盾有实用价值. 间断分段序列的 Zoom-FFT 进一步提高了分析效率. 最后讨论了 Zoom-FFT 具有类似于小波变换的时-频局部化特性问题.

关键词: 信号分析与处理; FFT; Zoom-FFT; 频谱反演; 时-频局部化

中图分类号: TN911 **文献标识码:** A **文章编号:** 0372-2112 (2006) 01-0077-06

Improvement and Spectrum Inversion for Zoom-FFT and Its Time-Frequency Localization Functions

LUO Lichun

(P. O. Box 947 Beijing 100083, China)

Abstract The classic Zoom-FFT, which is for continues sections of signal sequence is reviewed. A novel method for Zoom-FFT, which is used for disconnected sections of signal sequence noted as $R_{ms} < 1$, is offered. The algorithm and the computing cost of it are discussed. A formula for the spectrum inversion from a Zoom-FFT spectrum under onto the practical spectrum from which the former is imaged is established and proved. Examples of application of Zoom-FFT for hopping-frequency signals in HF band and inversion of the Zoom-FFT spectrum of disconnected sections of six-tone signals in voice band are offered. The new Zoom-FFT method will be useful for resolving the contradiction between quickly searching for signals and precisely analyzing signals in practical engineering. The time-frequency localization function of Zoom-FFT, similar to that of wavelet analysis is stated and analyzed.

Key words signal analysis; FFT; Zoom-FFT; spectrum inversion; time-frequency localization

1 引言

Zoom-FFT (又称游标 FFT) 的基本原理是^[1-4], 先对时间上连续但不重叠的等长度分段信号采样序列进行 FFT, 得到第一批分段粗 FFT 谱. 然后在分段粗 FFT 谱感兴趣的粗频点上对这些分段 FFT 的粗频点所构成的序列 (称为时域二次采样) 进行第二批 FFT, 以得到粗频点处的 FFT 细节谱, 如图 1 所示. 本文将这种经典 Zoom-FFT 称为连续分段序列 Zoom-FFT.

笔者应用并改进 Zoom-FFT 初步解决了通信侦察中全频段快速搜索与局部频带信号精细分析矛盾的问题. 由

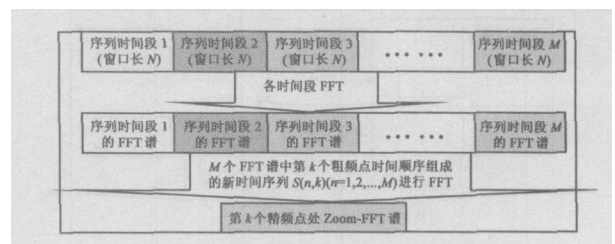


图 1 经典连续分段序列 Zoom-FFT 基本原理示意

此感到, Zoom-FFT 方法尽管并非新颖, 但应用及发展潜力仍然较大. 文章内容与安排如下.

(1) 在经典 Zoom-FFT 文献中, 只建立了上述连续分段序列 Zoom-FFT 方法. 笔者在应用中发现, 在信号采样

与处理的硬件实现中,还需要在第一批 FFT 窗口长度 N 固定的情况下,为在较少的数据量以保持较高的分析速度的条件下获得较高的频谱分辨率而加大信号时域二次采样窗口长度.这时,连续时间段序列 Zoom-FFT 方法就不能满足要求.为此,笔者提出了时间等间隔间断分段 Zoom-FFT 方法(简称间断分段序列 Zoom-FFT).本文 2.1 节给出该方法,2.2 节叙述其算法,2.3 节讨论其计算量与实现代价;

(2)无论是连续分段序列 Zoom-FFT 还是间断分段序列 Zoom-FFT,进行 Zoom-FFT 的目的都是为了得到信号的细节频谱.这就要求在进行 Zoom-FFT 后,能够从 Zoom-FFT 谱中反演得到信号的真实细节频谱.这个反演并不能自然得到,需要相应的计算公式.然而,已有文献中却未曾给出过这种公式.鉴于此,本文提出了 Zoom-FFT 的频谱反演计算公式,它同时适用于连续分段序列和间断分段序列 Zoom-FFT.本文 3.1~3.3 节讨论该问题;

(3)4.1 节讨论采用连续分段序列 Zoom-FFT 解决跳频信号实际搜索与分析问题的实例.4.2 节讨论间断分段序列 Zoom-FFT 方法与反演公式分析话带信号的问题;

(4)应用表明,Zoom-FFT 具有类似于小波变换^[5-9]的时频局部化特性.第 5 节研究该问题.

2 时间间断分段序列 Zoom-FFT

2.1 基本原理

定义 Zoom-FFT 中,1 个信号序列段长度 N 与相邻 2 个信号序列段起点点的间隔长度 L 之比,称为 Zoom-FFT 的时域二次采样占空比(简称占空比) R_{ms} ,即

$$R_{ms} = \frac{\text{序列时间段长度}}{\text{相邻时间段起点间隔}} = \frac{N}{L} \quad (1)$$

间断分段序列 Zoom-FFT 的基本原理是,在图 1 所示的经典 Zoom-FFT 中,将占空比 R_{ms} 改为小于 1 的某个值,如 $R_{ms} = 0.5$ 如图 2 所示.

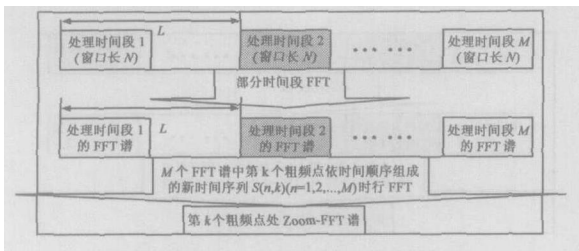


图 2 间断分段序列 Zoom-FFT 基本原理

因此,由 R_{ms} 的定义,可将连续分段序列与间断分段序列的 Zoom-FFT 分别归结为 $R_{ms} = 1$ 的 Zoom-FFT 和 $R_{ms} < 1$ 的 Zoom-FFT

2.2 算法

间断分段序列 Zoom-FFT 算法与经典 Zoom-FFT 算法^[4]的主要区别是,需根据期望得到的精细频谱频点间隔 Δf_{d-zoom} 确定占空比 R_{ms} , 及其值不等于第一批 FFT 窗口长度 N 的相邻 2 个信号序列段间隔长度 L 以及据此改变 AD

采样方式.具体算法如下:

1)确定 FFT 频谱的粗频点间隔 Δf 和间断分段序列 Zoom-FFT 细频点间隔 Δf_{d-zoom} ;

2)确定占空比 R_{ms} , 并由式 (1) 得到相邻 2 个信号序列段间隔长度 L ;

3)根据 AD 采样速率 f_s 和所确定的 Δf 和 Δf_{d-zoom} , 分别确定第一批 FFT 长度 N 和 Zoom-FFT 长度 M . 即

$$\left. \begin{aligned} N &= \frac{f_s}{\Delta f} \\ M &= \frac{f_s}{L \Delta f_{d-zoom}} \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

4)令 $m = 0$ 和 $n = 0$ (m 与 n 分别为子序列及其内部的序列值序号);

5)用 AD 变换采集构造信号序列 $\{s(n), n = 0, 1, \dots, N-1\}$;

6)若 $n < mN/R_{ms} + N$, 回到 4), 继续采集; 否则, 进行第一批 FFT 中的第 m 个 FFT, 得到带有时间局部化信息 mN/R_{ms} 的粗频谱 $\{S_1(k_1, m), k_1 = 0, 1, \dots, N-1\}$;

$$S_1(k_1, m) = \sum_{n=mN/R_{ms}}^{mN/R_{ms}+N-1} s(n)W^{nmk_1}, \quad m = 0, 1, \dots, M-1 \quad (3)$$

式中, $k_1 = 0, \dots, N-1$ 为第一批 FFT 的粗频点, $W = \exp[-j2\pi/(MN)]$. 然后, 令 $m = m + 1$;

7)若 $m < M$, 返回 5)和 6); 否则, 在感兴趣的粗频点 k_1 上, 进行第二批 FFT, 得到该粗频点的一个精细频谱 ($k_2 = 0, \dots, M-1$ 为 Zoom-FFT 的细频点):

$$S_{zoom}(k_1, k_2) = \sum_{m=0}^{M-1} S_1(k_1, m)W^{mk_2} \quad (4)$$

由此得到一个新的 FFT 频谱 $\{S_{zoom}(k_1, k_2), k_2 = 0, 1, \dots, M-1, k_1 = 0, 1, \dots, N-1\}$. 然后, 令 $m = m - M$;

8)是否在所有感兴趣的粗频点上都进行了第二批 FFT? 若没有, 改变 k_1 , 并重复 7); 若已经完成, 则根据是否有新的信号序列需要处理而决定是否返回 5).

2.3 计算量与实现代价

不妨用乘法次数评估计算量.由 N 点 FFT 的乘法次数为 $N \log_2 N$ 知,计算给定分辨率下 N 点粗频谱中 1 个粗频点处局部频谱, 间断分段序列 Zoom-FFT 约需要 $M \log_2 M + N \log_2 N$ 次乘法.要达到相同目的,连续分段序列 Zoom-FFT 需 $M \log_2 M + L \log_2 L$ 次乘法,而原始 FFT 需要 $ML \log_2(ML)$ 次乘法.因此,新方法比这两种方法的计算量都小.

3 连续分段与间断分段 Zoom-FFT 的频谱反演公式

3.1 频谱反演理论公式

进行 Zoom-FFT 的最终目的是为了得到信号的真实细节频谱估计, 即由 Zoom-FFT 谱反演出信号实际物理频谱.

这往往并不能自然得到. 现提出 Zoom-FFT 谱的频谱反演公式如下.

设信号时域一次采样速率为 f_s , f_k 为信号实际物理频谱 $S(f)$ 的一个频点, k_1 为第一批 FFT 频谱 $S_1(k)$ 中对应 $S(f)$ 中的 f_k 频点, $k_2^{(R)}$ 为时域二次采样占空比为 R_{ms} 时第二批 FFT (Zoom-FFT) 频谱 $S_{zoom}(k)$ 中对应 $S_1(f)$ 的 f_k 的频点. 又设第一批 FFT 的窗口长度为 N , Zoom-FFT 窗口长度为 M , 则用 $f_s, f_k, k_1, k_2^{(R)}, N, M$ 和 R_{ms} 表示的 f_k 的将 $R_{ms} < 1$ 的 Zoom-FFT 谱中的频点 k_2 反演回实际物理频谱中频点的理论公式为

$$f_k = \frac{f_s}{N} k_1 + \frac{f_s k_2^{(R)} R_{ms}}{NM} \quad (5)$$

推导 首先定义, 实际物理频谱是用 $R_{ms} = 1$ 的 Zoom-FFT 谱的物理影射 (即乘以 $f_s N$) 所代替的. 因此, 只要证明式 (5) 是将 $R_{ms} < 1$ 的 Zoom-FFT 谱中的频点 k_2 反演回 $R_{ms} = 1$ 的 Zoom-FFT 谱中的频点 $k_2^{(1)}$ 的物理影射 (即乘以 $f_s N$) 的理论公式即可.

由离散时间信号分析理论知, 式 (5) 中, 等式右边第一项为第一批 (原始) FFT 谱的物理频点 f_k 的反演公式^[4]. 加上 Zoom-FFT 处理后, 当占空比为 1 时, 则所得最终频谱分辨率将提高 M 倍, 细节谱的反演公式为, 粗频点 $\frac{f_s}{N} k_1$ 加上 $\frac{f_s k_2^{(1)}}{NM}$, 即式 (5) 等式右边第二项除以占空比 R_{ms} 后的值. 当占空比 R_{ms} 小于 1 时, 同样由时域采样与频域分辨率的关系, 以及 R_{ms} 的定义, 可以推知, $R_{ms} < 1$ 作用的物理意义等效于二次“稀释”时域采样序列——增大采样间隔. 这等效于压缩 Zoom-FFT 谱的有效带宽, 使信号谱分量在 $R_{ms} < 1$ 的 Zoom-FFT 谱中的频点比 $R_{ms} = 1$ 的 Zoom-FFT 谱中高, 即向上移动到后者的 $1/R_{ms}$ 倍值处: $k_2^{(R)} = k_2^{(1)} / R_{ms}$. 因此, 要恢复 $k_2^{(R)}$ 在 $R_{ms} = 1$ 的 Zoom-FFT 谱中的频点, 必须乘以 R_{ms} . 由此得式 (5).

3.2 频谱缠绕时反演公式的修正

式 (5) 所给出的, 仅为占空比为 R_{ms} 时 Zoom-FFT 的最终频谱反演的理论公式. 实际应用中, 由于频域采样点与信号实际频谱分量并非恰好对齐, 可能造成所得 Zoom-FFT 频谱并非是原始频谱的单向平移, 而是实际频谱的一种缠绕 (即低频分量跑到高端, 高频分量跑到低端). 另外, 当占空比 R_{ms} 小到一定程度时, 对于确定的 f_k , 所对应的 $k_2^{(R)}$ 必然增大到超出 M 的范围. 这时, 就会发生频谱缠绕, 这给反演原始频谱造成了困难. 对此, 虽可用频谱平移的方法解决^[4, 10], 但不总可行. 这里给出频谱缠绕情况下 Zoom-FFT 频谱反演的直接修正公式.

各符号同上. 又设 R_{ms} 为 1 时 Zoom-FFT 频谱中待反演的信号频点为 $k_2^{(1)}$, R_{ms} 小于 1 时该频点为 $k_2^{(R)}$. 再设由 R_{ms} 小到一定程度时所引起的 Zoom-FFT 频谱缠绕的次数为 g , 则

$$g = \lfloor k_2^{(R)} / M \rfloor = \lfloor k_2^{(1)} / (MR_{ms}) \rfloor \quad (6)$$

式中, $\lfloor x \rfloor$ 为对 x 取整算子 (即 $\lfloor x \rfloor$ 为小于 x 的最大整数). 则用 $f_s, k_1, k_2^{(1)}, k_2^{(R)}, N, M, R_{ms}$ 和 g 表示的 f_k 的反演修正公式为

$$f_k = \begin{cases} \frac{f_s k_1}{N} + \frac{f_s k_2^{(R)} R_{ms}}{NM}, & \frac{k_2^{(1)}}{R_{ms}} \leq M \\ \frac{f_s k_1}{N} + \frac{f_s (k_2^{(R)} + gM) R_{ms}}{NM}, & \frac{k_2^{(1)}}{R_{ms}} > M \end{cases} \quad (7)$$

这里仅从物理意义上说明. 由于 Zoom-FFT 的窗口宽度为 M , 当占空比 R_{ms} 小到一定程度时, $k_2^{(R)}$ 就可能增大到超出 M 的范围. 这在实际 Zoom-FFT 频谱上表现为从频谱低端从头再来. 即, Zoom-FFT 频谱中的 $k_2^{(R)}$ 分量不是在 Zoom-FFT 频谱中消失, 而是再回到 $k = 0$ 处后再往上增长. 因此, 式 (7) 的第二个等式中第二项中的 $k_2^{(R)}$ 就必须再加上这个被超出的次数 g 乘以 Zoom-FFT 频谱宽度 M 的积.

3.3 $k_2^{(1)}$ 频率值的估计

从形式上看, 式 (6) 和 (7) 中 $k_2^{(1)}$ 的值是已知的, 即必须要有 R_{ms} 为 1 的 Zoom-FFT 频谱, 这与应用 R_{ms} 小于 1 的 Zoom-FFT 的目的相矛盾. 但实际上, 式 (6) 和式 (7) 中 $k_2^{(1)}$ 的值都不需要精确值, 而只需要一个大致范围即可. 因为式 (6) 只是求 $k_2^{(1)} / (MR_{ms})$ 的整数部分, 式 (7) 中只是在公式的应用条件中有 $k_2^{(1)}$. 这两种情况, 都可以用事先预处理所得的 R_{ms} 为 1 的信号 Zoom-FFT 频谱可能的最低频谱分量频点 k_{2L} 和可能的最高频谱分量频点 k_{2H} 予以估计 (事先预估待分析信号频带的上下边界 k_{2L} 和 k_{2H} , 这不困难. 比如, 在通信侦察中, 对信号带宽就有预定的先验知识: HF 为 3~5MHz, VHF 为 13~25kHz 等. 反演理论也主张预备必要的先验信息^[11, 12]).

由 k_{2L} 和 k_{2H} 估计 $k_2^{(1)}$ 的方法如下:

1) 当 $k_{2L} < k_2^{(R)} R_{ms} < k_{2H}$ 时, 说明该频点没有发生过缠绕, 可以用 $k_2^{(1)} = (k_{2L} + k_{2H}) / 2$ 代入式 (6) 求 g (事实上这时不需 g), 并应该用式 (7) 的第一式 (其中不含 g) 进行计算.

2) 当 $k_2^{(R)} R_{ms} < k_{2L}$ 或 $k_2^{(R)} R_{ms} > k_{2H}$ 时, 说明该频点已经发生了缠绕. 由于在所有频谱分量中, 信号频带的上边界 k_{2H} 最先发生缠绕. 若记 k_{2H} / R_{ms} 为 $k_{2H}^{(R)}$, 即

$$k_{2H}^{(R)} = \frac{k_{2H}}{R_{ms}} \quad (8)$$

则若 $|k_2^{(R)} - k_{2H}^{(R)}| \leq M$, 可用 $k_2^{(1)} = k_{2H}$ 代入式 (6) 求 g , 并且应该用式 (7) 的第二式进行反演.

3) 当 $k_2^{(R)} R_{ms} < k_{2L}$ 或 $k_2^{(R)} R_{ms} > k_{2H}$, 并且 $|k_2^{(R)} - k_{2H}^{(R)}| > M$ 时 ($k_{2H}^{(R)}$ 的定义仍同式 (8)), 若

$$\lfloor |k_2^{(R)} - k_{2H}^{(R)}| / M \rfloor = j \quad (9)$$

则应该用 $k_2^{(1)} = (k_{2H} - j \times M)$ 代入式 (6) 求 g , 并且应该用式 (7) 的第二式进行计算.

4 应用

无论是 $R_{ms} = 1$ (连续分段序列) 还是 $R_{ms} < 1$ (间断分段

序列)的 Zoom-FFT,在实际信号分析工程中都有着重要的应用价值.这里分别给出用 $R_{ms} = 1$ 的 Zoom-FFT 实现跳频信号快速搜索与精确分析和 $R_{ms} < 1$ 的 Zoom-FFT 计算话带六音信号频谱的两个应用实例.

4.1 跳频信号搜索与分析

我们采用连续和间断两种 Zoom-FFT 方法,实现了在宽频段快速搜索中同时进行窄带信号分析的功能.其中一种连续分段(即 $R_{ms} = 1$) Zoom-FFT 方案是,分析带宽为 30MHz 第一批 FFT 的长度为 $N = 256$ Zoom-FFT 长度为 128 这样,在对分辨力为 256kHz 的粗频谱进行信号搜索时,基本同时得到了分辨力为 1.953kHz 的细频谱,从而得以在宽带搜索检测的同时进行跳频信号精确分析.其中一个实现样本的宽带宏观粗 FFT 频谱如图 3 所示.从中看出,在 25.8MHz 附近有一组信号,但看不出有几个信号,也不知它们是否为跳频信号.为此进行

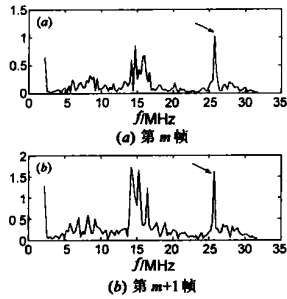


图 3 用于跳频信号快速搜索的时间相邻 2 帧宽带宏观粗 FFT 频谱

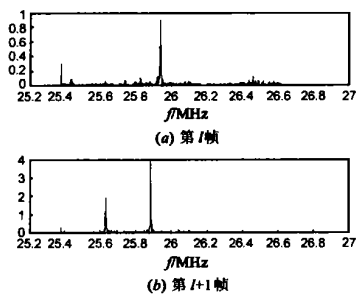


图 4 用于跳频信号精确分析的窄带微观 Zoom-FFT 频谱

Zoom-FFT 处理.其中相邻 2 帧窄带微观频谱如图 4 所示.从中可看出 25.8MHz 附近至少有 2 个信号,且 (a) 中的 25.925MHz 的信号在 (b) 中跳到了 25.875MHz 很可能为一个跳频信号.当具有跳频带宽及其中心频率的先验知识时,还可以用间断分段序列 Zoom-FFT 在相同计算量下

得到更高分辨力的精细频谱,从而可以进行信号个体带内特征分析.

4.2 话带六音信号

设被分析信号为一个话带六音信号,各单音频率分别为 $1357\ 1382\ 1393\ 1407\ 1418\ 1443\text{Hz}$ 信号带宽为 $BW = 1443 - 1357 = 86\text{Hz}$ AD 采样速率为 $f_s = 10\text{kHz}$ 原始 FFT 窗口长度 $N = 23$ 则原始 FFT 谱分辨力 $\Delta f_1 = f_s / N \approx 434.78\text{Hz}$ 这样,用原始 FFT 粗频点数表示的信号带宽约为 $86 / 434.78 \approx 0.1978$ (点).并且,这 6 个单音在第一批 FFT 谱中的粗频点都为第 4 个频点,即 $k_1 = 3$ (k_1 的取值从 0 开始, $k_1 = 0$ 对应零频率即直流分量),对应着 $1304.35\text{Hz} \sim 1739.13\text{Hz}$ 这个频带.因此,在该设定采样速率 f_s 和 FFT 窗口长度 N 条件下,所得原始 FFT 频谱完全无法分辨这 6 个单音.

采用 Zoom-FFT 在第一批 FFT 谱中的第 4 个粗频点(即 $k_1 = 3$)上进行频谱分辨力增强处理,并确定 Zoom-FFT 窗口长度为 $M = 100$ 则 Zoom-FFT 频谱的分辨力 Δf_{Zoom} 为

$$\Delta f_{\text{Zoom}} = \frac{f_s}{NM} = \frac{10 \times 10^3}{23 \times 100} \approx 4.3478(\text{Hz})$$

按此进行连续分段序列 (R_{ms} 为 1 的) Zoom-FFT 所得频谱中上述 6 个单音频点 $k_2^{(1)} = 12\ 18\ 20\ 23\ 26\ 32$ 将 f_s / N 代入,用式 (5) 和 (6) 可求得其频率分别为 $1356.52\ 1382.61\ 1391.31\ 1404.35\ 1417.39\ 1443.46\text{Hz}$ 与 6 个单音的实际频率非常接近.

再令 R_{ms} 分别等于 $1/2\ 1/3\ 1/4\ 1/5\ 1/6\ 1/7\ 1/8\ 1/9$ 和 $1/10$ 分别进行间断分段 Zoom-FFT.这里给出单音 1 (1357Hz) 和单音 6 (1443Hz) 在所得 Zoom-FFT 谱中的频点及在实际物理频谱中的反演频点,如表 1 所示.从表 1 看出, (a) $R_{ms} < 1$ 的 Zoom-FFT 谱可以反演得到实际物理谱估计; (b) 式 (6) 和式 (7) 反演的 $R_{ms} < 1$ 的 Zoom-FFT 的物理频谱准确度较高; (c) 频谱反演没有特殊要求(如,不要求带宽小于某个值).

表 1 部分单音在时间间断分段序列 Zoom-FFT 谱中的位置及其实际频谱反演频率 (进行 Zoom-FFT 的粗频点为 $k_1 = 3$ 其物理频率为 1304.35Hz)

R_{ms}	单音 1 (1357Hz) 频点			单音 6 (1443Hz) 频点			Zoom-FFT 谱带宽 (细频点数)	反演带宽 (Hz) (实际带宽为 86Hz)
	Zoom-FFT 频点序号 ($k_2^{(R)} + 1$)	缠绕次数 g	反演频率 (Hz)	Zoom-FFT 频点序号 ($k_2^{(R)} + 1$)	缠绕次数 g	反演频率 (Hz)		
1/1	13	0	1356.52	33	0	1443.46	20	86.94
1/2	25	0	1356.52	65	0	1443.48	40	86.96
1/3	37	0	1356.52	97	0	1443.48	60	86.96
1/4	49	0	1356.52	28	1	1442.39	79	85.87
1/5	61	0	1356.52	61	1	1443.48	100	86.96
1/6	73	0	1356.52	93	1	1443.48	120	86.96
1/7	86	0	1357.14	23	2	1442.24	138	85.10
1/8	98	0	1357.17	56	2	1442.94	159	85.77
1/9	8	1	1356.04	88	2	1443.00	179	86.96
1/10	21	1	1356.52	19	3	1442.61	199	86.09

5 Zoom-FFT 类似于小波变换的时-频局部化特性

5.1 功能定性说明

由式 (2), 我们可以得到两个不相等的频谱分辨率 Δf 和 Δf_{d-zoom} 公式:

$$\left. \begin{aligned} \Delta f &= \frac{f_s}{N} \\ \Delta f_{d-zoom} &= \frac{f_s R_{ms}}{NM} \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

这表明, 我们可选择足够小的 N , 使 Δf 很大, 由此换取使原始分段序列的粗 FFT 谱成为一个能够提供足够精确的时间局部化信息的时间-频率胞元. 这样, 当我们需要较精确的时间局部化信息时, 可以选用较小的 M 值 (最小为 1) 或较大的 R_{ms} 值 (最大为 1), 使得 Δf_{d-zoom} 较大, 这时, 频率局部化信息就较粗糙. 而当需要较精确的频率局部化信息时, 可以选用较大的 M 值或较小的 R_{ms} 值, 使得 Δf_{d-zoom} 较小, 这时, 时间局部化信息就较粗糙. 这实际上就实现了小波变换^[5-9]的时-频局部化特征功能. 这从图 1 与图 2 也可直观看出.

5.2 初步数学表述

若将式 (10) 中的 N 定义为最小尺度且为基尺度 (N 本身可任选, 但一旦选定就是最小尺度), 其它尺度值与它的比为相对尺度, 并且定义复指数函数 $\exp[-j2\pi f/(MN)]$ 为基本小波, 则 Zoom-FFT 中第一批 FFT 所得任意一个粗频谱 $S_1(k_p, m)$ 就类似于尺度为 N 、相对尺度为 1、平移值为 mN/R_{ms} (见式 (3)) 的小波变换. 若参与 Zoom-FFT 的粗频谱是第 $l \sim l+M$ 个 $S_1(k_p, m)$, 则所得 Zoom-FFT 谱 $\{S_{zoom}(k_p, n, k_2), k_2 = 0, 1, \dots, M-1\}$ 就类似于相对尺度为 M/R_{ms} 、平移值为 l 的小波变换. 这样, 若改变 M/R_{ms} 和 l 值, 就可得到不同相对尺度和平移值下的类似单尺度小波变换. 若同时多次改变 M/R_{ms} 值和 l 值并进行 Zoom-FFT, 则可得到一组类似多尺度小波变换. 这样, 若将式 (4) 左边 $S_{zoom}(k_p, l, k_2)$ 改记为 $W(M, l, k_p, k_2)$, 右边乘以 $1/\sqrt{M}$, 求和指标 m 的起始值由 0 改为 n , 并将式 (3) 代入, 则式 (4) 变为:

$$W(M, l, k_p, k_2) = \frac{1}{\sqrt{M}} \sum_{m=l}^{l+M-1} \sum_{n=mN/R_{ms}}^{mN/R_{ms}+N-1} s(n) \times \exp\left\{-\frac{j2\pi}{NM} [Mk_1 n + Nk_2 (m-l)]\right\} \quad (11)$$

式中, k_1 与 k_2 同式 (3) 和式 (4), 即 k_1 与 k_2 为粗频点, k_2 为细频点. 若令

$$\Psi(m, k_p, k_2) = \exp\left\{-\frac{j2\pi}{N} [k_1 n + Nk_2 m]\right\} \quad (12)$$

为一个以 m 为时间变量、以 FFT 谱频点 k_1 与 k_2 为参变量的基本小波, 则 $\Psi\left\{\frac{m-l}{M}, k_p, k_2\right\}$ 就是一个以 l 为平移值、 M 为尺度的小波. 这样, 式 (11) 可写为

$$W(M, l, k_1, k_2) = \frac{1}{\sqrt{M}} \sum_{m=l}^{l+M-1} \sum_{n=mN/R_{ms}}^{mN/R_{ms}+N-1} s(n) \Psi\left\{\frac{m-l}{M}, k_1, k_2\right\} \quad (13)$$

$k_1 = 0 \dots, N-1, k_2 = 0 \dots, M-1$

显然, $W(M, l, k_p, k_2)$ 就类似于一个在有限时间区间上的小波变换. 注意, 由于有间断分段序列的情况, 由式 (5) 知, Zoom-FFT 谱 $W(M, l, k_1, k_2)$ 的实际尺度应是 M/R_{ms} 而不是 M .

5.3 基本特点

Zoom-FFT 谱 $W(M, n, k_1, k_2)$ 与小波变换相比有 4 个基本特点.

(1) $W(M, l, k_1, k_2)$ 含有尺度量 M/R_{ms} 与平移量 l , 这与小波变换相同;

(2) $W(M, l, k_p, k_2)$ 不仅含有尺度与平移量, 而且在每一对 M 与 l 下都同时具有 FFT 谱的频点值 (k_1, k_2) . 因此, 它所等效的小波变换, 不仅是在每一对 M 与 l 下的一个值, 而是在每一个粗频点 k_1 下的 k_2 所代表的 Zoom-FFT 的 M 个细频点. 显然, 这 M 个细频点相当于在尺度 M 下的小波变换中增加了取值分别为 $M/k_2 (k_2 = 0 \dots, M-1)$ 的 M 个子尺度, 正是这个子尺度产生了 $W(M, l, k_1, k_2)$ 的细节谱信息, 增强了 Zoom-FFT 谱的时频局部化功能. 进一步, 一个基尺度为 N 的原始 FFT 谱也存在子尺度, 其值分别为 N/k_1 ;

(3) 由于 $W(M, l, k_p, k_2)$ 带有参变量 k_1 和 k_2 , 因此, 它是在信号 FFT 谱频率组合 (k_1, k_2) 点的小波变换, 这等于将信号分解成若干频率分量后, 再对其中的 (k_1, k_2) 频率分量在时域求小波变换. 这相当于一种分层扫描;

(4) $W(M, l, k_p, k_2)$ 的基本小波是复指数函数, 它本身没有时间局部化功能, 这是其缺点. 但它可通过选取充分小的基尺度 N 和相对尺度 M/R_{ms} 加以改善, 且有很好的频率局部化功能 (因 M/R_{ms} 可任意大).

5.4 优势及需要继续研究的问题

事实上, 图 4 所示用于跳频信号分析的相邻 2 帧窄带微观频谱就是相对尺度为 128、子尺度为 $128/k_2$ 、时间平移量分别为 l 和 $l+1$ 的二维尺度小波变换图. 而图 3 所示的跳频信号搜索用的宽带宏观频谱则是一个未做 Zoom-FFT 其基尺度为 $N = 256$ 、时间平移量分别为 m 和 $m+1$ 的原始粗 FFT 谱. 尽管没有相对尺度, 但由 FFT 的原理知, 它也存在 256 个子尺度: $256/k_1$. 因此, 它也是一种二维尺度小波变换. 以上两组图的横坐标就代表子尺度的倒数. 显然, 前者频率局部化性能较好而时间局部化较差, 适用于信号分析; 而后者时间局部化较好而频率局部化较差, 适用于信号搜索.

6 小结

本文在回顾经典 Zoom-FFT 的基础上, 指出了在实际应用中, 对时间间断的分段序列进行 Zoom-FFT 处理的需

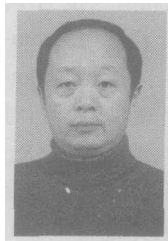
求,在定义占空比 R_m 基础上,给出了间断分段序列 Zoom-FFT的方法与算法.提出并证明了 R_m 为任意值的 Zoom-FFT谱反演信号物理频谱的公式.给出了用 Zoom-FFT进行跳频信号搜索与分析的话带多音信号处理并反演物理频谱的例子.论述了 Zoom-FFT具有小波变换的时-频局部化功能问题.Zoom-FFT及其改进具有现实的应用价值.

致谢 陈旭、杨军、刘焯昆、朱凯、鲁旭东等直接参与了 Zoom-FFT的工程应用,在此一并致谢!

参考文献:

- [1] C W Nawrocki ZOOM FFT—An Approximate Variable Frequency Algorithm [R]. TM -SA 2201-584-72 NUSC. 22 Nov 1972
- [2] A H Nuttall An Approximate Fast Fourier Transform Technique for Variable Spectral Analysis [R]. NUSC, TR 4767 1974
- [3] R C Y Yip Some aspects of the zoom transform [J]. IEEE Trans on Computers 1976 25(3): 287- 296
- [4] 罗利春. 无线电侦察信号分析与处理 [M]. 北京: 国防工业出版社. 2003 23- 29
Luo Lichun Signal Analysis and Processing for Radio Reconnaissance [M]. Beijing National Defence Industry Press 2003 23- 29. (in Chinese)
- [5] J Morlet, G Arens, E Fougeau, D Giard Wave propagation and sampling theory-Part I Complex signal and scattering in multilayered media [J]. Geophysics 1982, 47(2): 203- 221
- [6] J Daubechies Where do wavelet come from? — a personal point of view [J]. Proc of IEEE, 1996 84(4): 510- 513
- [7] J Daubechies Time-frequency localization operators a geometric phase space approach [J]. IEEE Trans II, 1988, 34 (4): 605- 612
- [8] J Daubechies The wavelet transform, time-frequency localization and signal analysis [J]. IEEE Trans II, 1990, 36 (5): 605- 612
- [9] J Daubechies 小波十讲 [M]. 李建平, 杨万里, 译. 北京: 国防工业出版社. 2004 9- 55
- [10] Luo Lichun, Xiao Xianci Aligning signal harmonics to DFT grid [A]. The Proceeding of 2003 IEEE Antenna and Propagation Society International Symposium [C]. Columbus, OH, USA: IEEE, 2003 199- 202
- [11] J J Clark, A L Yuille Data fusion for sensory information processing systems [M]. Kluwer Academic Publishers 1990 17- 38
- [12] 塔兰托拉 A (法). 反演理论—数据拟合及模型参数估算方法. 张先康, 等, 译, 刘福田, 校. 北京: 学术书刊出版社, 1989. 34- 55
A Tarantola Methods for Data Fitting and Model Parameter Estimation [M]. Amsterdam Elsevier Science Publishers 1987 (in Chinese)
- [13] 罗利春. ISI信道调制分类技术评估 [J]. 电子学报. 2003 31(7): 1070~ 1073, 1077
Luo Lichun An assessment of modulation classifiers for ISI channels [J]. Acta Electronica Sinica 31(7), 2003 1070~ 1073, 1077. (in Chinese)

作者简介:



罗利春 男, 1959年生于四川, 博士. 研究兴趣是电子侦察信号分析、电磁信号方向反演、电磁理论与工程等.