

导电媒质平面上方垂直磁偶极源赫兹位函数的球面波展开式

江滨浩,刘永坦

(哈尔滨工业大学电子工程研究所,黑龙江哈尔滨 150001)

摘 要: 精确有效地计算索末菲型积分是分析导电媒质半空间电磁波辐射和散射问题的关键. 本文给出求解有限导电媒质平面上方垂直磁偶极源赫兹位函数的解析方法. 利用圆柱波函数的球面波函数展开式和超几何函数理论,位函数中的索末菲积分被表示成快速、绝对收敛的球面波展开式;展开系数是以物性参数为复宗量的勒让德多项式. 该展开式易于电磁场的计算和分析,并且不受场点和源点的位置、媒质的物性参数和频率等条件的限制.

关键词: 电磁理论; 索末菲型积分; 垂直磁偶极子; 球面波展开

中图分类号: O441.1, O174.1 **文献标识码:** A **文章编号:** 0372-2112 (2006) 06-1152-04

Expansion of Spherical Wave Functions for Hertz Potential of a Vertical Magnetic Dipole over Conducting Medium Plane

JIANG Bin-hao, LIU Yong-tan

(Institute of Electronics Engineering, Harbin Institute of Technology, Harbin, Heilongjiang 150001, China)

Abstract: An accurate and efficient method for computing Sommerfeld type integrals is crucial in the analysis of the electromagnetic waves for radiators and scatters in the presence of a conducting half-space. In this paper, an analytical approach is described for the evaluation of the Hertz potential of a vertical magnetic dipole over the finitely conducting medium plane. By using the expansion of spherical wave functions for a cylindrical wave function and the techniques of the hypergeometric functions, the Sommerfeld integral contained in the potential is expressed as a rapidly and absolutely convergent series of spherical wave functions; and the coefficients of the series are cast into the Legendre polynomials with complex argument for the medium parameter. The obtained result has the advantage that it holds without the restrictions on the locations of dipole source and observation points, ranges of medium parameters and frequency and so on, and can conveniently be employed to calculate and analyze the electromagnetic fields.

Key words: electromagnetic theory; Sommerfeld type integral; vertical magnetic dipole; expansion of spherical wave function

1 引言

1909年索末菲利用傅立叶-贝塞尔变换的方法首次推导出导电媒质半空间上方谐振偶极源赫兹位函数的无穷积分表达式. 这些积分和近地偶极源的电磁场问题被后人分别称为索末菲型积分和索末菲半空间问题. 一方面这些积分是研究近地天线、电磁波传播、散射和地球物理勘探等实际问题的理论基础, 另一方面积分的被积函数在复平面上含有奇异点并快速振荡, 索末菲型积分不能用闭合形式来表达并难以进行有效的数值积分计算; 所以如何精确、有效地计算这些积分一直是各国学

者研究的课题^[1~5].

本文着重研究有限导电媒质平面上方垂直磁偶极源反射波场的索末菲半空间问题. 赫兹位函数中的索末菲积分被表示成球面波展开式形式. 其中展开系数是以物性参数为复宗量的勒让德多项式. 这些球面波展开式具有绝对、快速收敛的性质, 是此类索末菲半空间问题一个精确解析解答(不受场点和源点的位置、媒质的物性参数和频率等条件的限制).

2 基本公式

建立圆柱坐标系 (r, ϕ, z) 使 $z=0$ 平面为媒质的分界

面. $z > 0$ 半空间为空气 $(\epsilon_0, \mu_0; k_0)$, $z < 0$ 半空间为均匀的导电媒质 $(\epsilon_0, \mu_0; \gamma)$. 谐振磁偶极源(磁流元)沿 z 轴取向位于 $z = d$ 处. 空气中的场关于 z 轴对称分布, 赫兹位函数仅有垂直分量 $u_m = (0, 0, u_m)$. 应用傅立叶—贝塞尔变换, 位函数可用如下连续谱的圆柱波函数表示为^[6]

$$u_m = \frac{m}{4} \frac{1}{i} \int_0^\infty \frac{1}{u_0} [e^{-iu_0 |z-d|} + R_m(l) e^{-iu_0(z+d)}] J_0(l) dl \quad (1)$$

式中 $R_m(l) = (u_0 - u_1)/(u_0 + u_1)$, m 是磁偶极子的强度, $J_0(l)$ 是零阶贝塞尔函数, $u_0 = (k_0^2 - l^2)^{1/2}$ 和 $u_1 = (k_0^2 - l^2 - \gamma^2)^{1/2}$; 这里 $r = 1 - i/\epsilon_0$. 显然, $\text{Re}(r) > 0, \text{Im}(r) < 0$. 为了使积分满足辐射条件并具有收敛性, 积分路径的选取必须满足条件 $\text{Re}(u_0) > 0$ 和 $\text{Im}(u_0) < 0$.

应用索末菲尔德恒等式^[6]

$$\int_0^\infty \frac{1}{u_0} e^{-iu_0(z \pm d)} J_0(l) dl = i \frac{e^{-ik_0 r_\pm}}{r_\pm} = ig(r_\pm) \quad (2)$$

其中 $r_\pm = [r^2 + (z \pm d)^2]^{1/2}$, 式(1)可改写成

$$u_m = \frac{m}{4} \left\{ g(r_-) - g(r_+) - \frac{2}{k_0^2(1-r_-)} \cdot \left[\frac{\partial^2}{\partial z^2} g(r_+) - k_0^2 \left(\frac{\partial^2}{\partial z^2} + k_0^2(1-r_-) \right) SI \right] \right\} \quad (3)$$

$$\text{式中} \quad SI = -\frac{i}{k_0} \int_0^\infty \frac{1}{u_0} e^{-iu_0(z+d)} J_0(l) dl \quad (4)$$

显然 $g(r_-)$ 和 $g(r_+)$ 分别是位于 $z = d$ 和 $z = -d$ 处偶极源激励的直达波和镜像反射波(外向球面波). $l_b = \pm k_0, \pm k_0 \sqrt{r}$ 是式(4)被积函数的分支点, 它们分别位于 l -平面的第二、四象限上. 式(4)的积分路径应选取在第一象限内.

3 索末菲尔德积分的球面波展开

对式(4)进行变量变换 $l = k_0 \sin \theta$ 和 $r = r \sin \theta$, $(z + d + i/k_0) = r \cos \theta$; 这里, $r = [(z + d + i/k_0)^2 + 1]^{1/2}$, 是大于零的微小量. 有

$$SI = -i \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_0^{\pi/2+i\epsilon} \frac{\cos \theta \sin \theta}{\sqrt{r - \sin^2 \theta}} e^{-\cos \theta} e^{-ik_0 r \cos \theta \sin \theta} \cdot J_0(k_0 r \sin \theta \sin \theta) d\theta \quad (5)$$

应用圆柱波函数的球面波展开式^[17]

$$e^{-ik_0 r \cos \theta \sin \theta} J_0(k_0 r \sin \theta \cos \theta) = \sum_{n=0}^{\infty} (-i)^n (2n+1) P_n(\cos \theta) P_n(\cos \theta) j_n(k_0 r) \quad (6)$$

式中 $P_n(\cdot)$ 是勒让德多项式, $j_n(\cdot)$ 是 n 阶球贝塞尔函数, 有

$$SI = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \left(n + \frac{1}{2} \right) C_n(r) P_n(\cos \theta) j_n(k_0 r) \quad (7)$$

式中

$$C_n = -2 \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left[\int_0^{\pi/2+i\epsilon} \frac{\sin \theta \cos \theta}{\sqrt{r - \sin^2 \theta}} P_n(\cos \theta) e^{-\cos \theta} d\theta \right] \quad (8)$$

$\theta = \arg \text{tg} [1/(z+d)]$. 显然, 经过变换 $l = k_0 \sin \theta$, 分支点 l_b

$= \pm k_0$ 在 l -复平面上已被消除. 式(8)中的积分路径位于 $[0, \text{Re}(\theta) + \pi/2, 0, \text{Im}(\theta) + \pi]$ 区域内; $(r - \sin^2 \theta)^{1/2}$ 的分支点和相应割线位于该区域外. 可以证明式(8)中的第二个积分为零. 对积分式(8)依次进行变换 $\theta = i$ 和 $\sinh^2 h = s$, 式(8)可以改写成

$$C_n(r) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_0^{\pi/2+i\epsilon} P_n(\sqrt{1+s}) \frac{e^{-\sqrt{1+s}}}{\sqrt{s+s^2}} ds \quad (9)$$

可以看出上式积分是一致收敛的. 经过冗长复杂的推导过程(见附录), 我们得到

$$C_0 = -2 \sqrt{r} \\ C_n = \frac{i^n (1-r)^n \sqrt{r} (n/2)}{[(n+3)/2]} \frac{d}{dr} P_n(\sqrt{r}) \quad (10)$$

式中 (\cdot) 是伽马函数.

至此, 我们得到了索末菲尔德积分的球面波级数展开式. 展开式中的每一项可以解释为位于 $z = -d$ 处相应“波源”在 $z > 0$ 半空间产生的球面波. 其中 $j_n(k_0 r_+)$ 代表着沿径向方向上的驻波, $P_n(\cos \theta)$ 反映了场在以 r_+ 为半径球面上正负交替的周期性变化, 标号 n 确定了波节线的数目, 展开系数 $C_n(r)$ 可看成“波源”的“强度”来直接反映大地对电磁场的影响. 由不等式^[8]

$$\begin{aligned} |j_n(k_0 r_+)| &\leq \frac{(2k_0 r_+)^n}{(2n+1)!!} \\ |P_n(\cos \theta)| &\leq 1 \\ |P[\cosh(a+ib)]| &\leq e^{na} \frac{\sqrt{np} + e^a}{\sqrt{np} e^a + 1} \end{aligned} \quad (1)$$

可以看出式(7)展开式是绝对收敛的. 随着 n 的增大, 展开式中通项的递减速度将快于 $[(2n+1)!!]^{-1}$ 量级的递减速度. 图 1(a) 和图 1(b) 分别给出了 $\theta = 30^\circ, 60^\circ$ 和 $r = 5 - i2$ 时, SI 的球面波级数展开式的实部和虚部随 $k_0 r_+$ 变化的数值计算结果. 级数截断值分别取为 $N = 10$ 和 $N = 15$. 计算结果表明级数前 10 项与级数前 16 项之间的差值小于 10^{-5} 量级, $n > 10$ 后的级数余项对 SI 的贡献小于 1% 数量级.

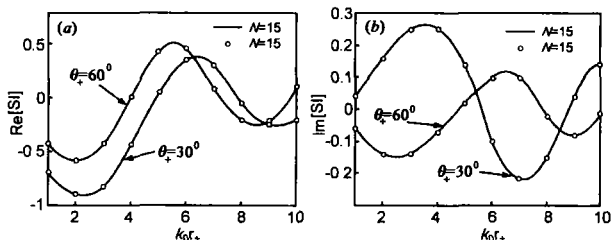


图 1 索末菲尔德的实部和虚部随 $k_0 r_+$ 变化的结果

4 结束语

如上所述, 偶极源(点辐射源)激励的电磁场是外向球面波. 索末菲尔德半空间问题是球面波在平媒质分界面的

反射和折射问题. 由于波的球面对称性和平媒质分界面的形式之间的差异, 直接在球坐标系下来解决此类问题是不适宜的. 前人所采用的傅立叶—贝塞尔积分变换把电磁场的空间分布表示连续谱的圆柱波函数(索末菲尔德型积分的形式解答)是自然和无奈的方法. 然而, 球坐标系中赫姆霍兹方程的解, 即使是对于无界空间, 可表示为离散球面波函数集的级数展开式.

本文已给出了均匀有限导电媒质平面上方垂直磁偶极源赫兹位函数的球面波展开式(7). 它的主要特点是: () 它适合于任意源点和场点位置、各种媒质的物性参数以及频率范围情况, 是精确的解析解答; () 它收敛性好, 展开系数式(10)可看成“波源”的“强度”来直接反映大地对电磁场的影响, 并便于计算; () 展开式中勒让德多项式和球贝塞尔函数(均可表示为初等函数)既有明显的物理解释又便于计算, 它们分别表示场量随空间变量 r_+ 和 r_- 的变化特征; 因此, 本文的结果是索末菲尔德半空间问题的精确和有效解答, 它能够为相关的电磁场问题研究提供方便、准确的解析表达式. 导电媒质平面上方垂直和水平电偶极源电磁场的球面波展开式将在另文给出.

附录 展开系数的推导

应用关系式

$$\frac{1}{\sqrt{s+r}} = \frac{1}{p} \int_0^{\infty} t^{-1/2} e^{-(r+s)t} dt \quad (A1)$$

式(9)可以改写成

$$C_n = \frac{1}{p} \int_0^{\infty} t^{-1/2} e^{-rt} dt \cdot \lim_{s \rightarrow 0} e^{-\sqrt{1+s}} e^{-ts} P_n(\sqrt{1+s}) ds \quad (A2)$$

取极限后, 再应用拉普拉斯变换公式^[9]

$$\mathcal{L} P_n(\sqrt{1+s}) = t^{-5/4} e^{t/2} W_{1/4, n/2+1/4}(t) \quad (A3)$$

式中 $W_{1/4, n/2+1/4}(t)$ 是第二类惠泰克(Whittaker)函数. 有

$$C_n = \frac{1}{\sqrt{p}} \int_0^{\infty} x^{n/2-1} e^{-xt} U\left(\frac{1}{2} + \frac{n}{2}, n + \frac{3}{2}; t\right) dt \quad (A4)$$

式中 $U(-; t)$ 是第二类合流超几何函数, 这里已应用关系式^[10]

$$e^{1/2} W_{a,c}(t) = t^{c+1/2} U(c-a+1/2, 1+2c; t) \quad (A5)$$

再应用拉普拉斯变换^[9]

$$\mathcal{L} t^{b-1} U(a, c; t) = \frac{(b)(b-c+1)}{(a+b-c+1)} \frac{r^{-b}}{{}_2F_1(a, b; a+b-c+1; 1-r^{-1})} \quad (A6)$$

式中 ${}_2F_1(-; 1-r^{-1})$ 是高斯超几何级数, $\Gamma(\cdot)$ 是伽马函数. 有

$$C_n = \frac{1}{\sqrt{p}} r^{-n/2} \left(\frac{n}{2}\right) \left(-\frac{1}{2} - \frac{n}{2}\right) \cdot \lim_{0} \frac{1}{(\cdot)} {}_2F_1\left(\frac{n}{2}, \frac{n}{2} + \frac{1}{2}; ; 1 - \frac{1}{r}\right)$$

$$= \frac{\left(-\frac{1}{2} - \frac{n}{2}\right) \left(\frac{n}{2} + \frac{3}{2}\right) \left(\frac{n}{2} + 1\right)}{\sqrt{p} \left(\frac{n}{2} + \frac{1}{2}\right) r^{n/2+1}} \cdot (r-1) {}_2F_1\left(\frac{n}{2} + 1, \frac{n}{2} + \frac{3}{2}; 2; 1 - \frac{1}{r}\right) = -\frac{2}{\sqrt{p}} \left(1 + \frac{n}{2}\right) \left(\frac{1}{2} - \frac{n}{2}\right) (r-1)^{1/2} P_n^{-1}(\sqrt{r}) \quad (A7)$$

在推导式(A7)过程已分别用到如下关系式^[10]

$$\lim_{0} \frac{1}{(\cdot)} {}_2F_1(a, b; ;) = (a)_1 (b)_1 {}_2F_1(a+1, b+1; 2;) \quad (A8)$$

$${}_2F_1(a, a + \frac{1}{2}; ;) = 2^{-1} (\cdot)^{(1-\cdot)/2} (1-\cdot)^{1/2-1/2-a} \cdot P_{2a}^{-1}[(1-\cdot)^{-1/2}] \quad (A9)$$

式中 $\cdot = 1 - \frac{1}{r}$, 由式(A7)和关系式

$$P_n^{-1}(\sqrt{r}) = \frac{(n)}{(n+2)} P_n^1(\sqrt{r}) \quad (A10)$$

可推导出

$$C_{2n} = 2(-1)^{n+1} \sqrt{p} \frac{(n+1)(2n)}{(n+\frac{1}{2})(2n+2)} (r-1)^{1/2} \cdot P_{2n}^1(\sqrt{r}) \quad (A11)$$

同时, 由式(A2), 我们能够得到式(9)中的 $C_0(\cdot)$.

下面再研究 C_{2n+1} , 由式(A9), 记 $C_{2n+1} = A_{2n+1} + B_{2n+1}$, 式中

$$A_{2n+1} = \frac{-1}{\sqrt{p}} (r-1)^{1/2} [P_{2n+1}^1(\sqrt{r}) + P_{2n+1}^1(-\sqrt{r})] \quad (A12)$$

$$B_{2n+1} = \frac{1}{\sqrt{p}} (r-1)^{1/2} [P_{2n+1}^1(-\sqrt{r}) - P_{2n+1}^1(\sqrt{r})] \quad (A13)$$

这里 $\cdot = (n+3/2)(2n+1)(-n)/(2n+3)$. 应用关系式^[10]

$$e^{-i\nu} P_\nu^\mu(-\sqrt{r}) - P_\nu^\mu(\sqrt{r}) = \frac{2}{p} e^{-i\mu} \sin[p(\nu+\mu)] Q_\nu^\mu(-\sqrt{r}) \quad (A14)$$

这里 $Q_\nu^\mu(-\sqrt{r})$ 是第二类连带勒让德函数, 有

$$A_{2n+1} = \frac{(-1)^n (r-1)^{1/2} (n+\frac{1}{2})}{\sqrt{p} (n+2)} Q_{2n+1}^1(-\sqrt{r}) \quad (A15)$$

再应用 $Q_\nu^\mu(-\sqrt{r})$ 和 $P_\nu^\mu(\pm\sqrt{r})$ 与高斯超几何级数的关系式^[10]

$$e^{-i\mu} Q_\nu^\mu(-\sqrt{r}) = 2^\mu \sqrt{p} e^{i(\nu-\mu)/2} (r-1)^{-\mu/2} \left[e^{i/2} \frac{\left(\frac{1}{2} + \frac{\nu}{2} + \frac{\mu}{2}\right)}{\left(1 + \frac{\nu}{2} - \frac{\mu}{2}\right)} F\left(\frac{1}{2}\right) \right]$$

$$- \sqrt{r} \left[\frac{1 + \frac{y}{2} + \frac{\mu}{2}}{\frac{1}{2} + \frac{y}{2} - \frac{\mu}{2}} F \left(\frac{3}{2} \right) \right] \quad (A16)$$

$$P^{\mu}(\pm \sqrt{r}) = 2^{\mu} \sqrt{\rho} (r-1)^{-\mu/2} \cdot \left[\frac{F \left(\frac{1}{2} \right)}{\left(1 + \frac{y}{2} - \frac{\mu}{2} \right) \left(\frac{1}{2} - \frac{y}{2} - \frac{\mu}{2} \right)} \right. \\ \left. + \frac{2 F \left(\frac{3}{2} \right)}{\left(\frac{1}{2} + \frac{y}{2} - \frac{\mu}{2} \right) \left(-\frac{y}{2} - \frac{\mu}{2} \right)} \right] \quad (A17)$$

式中

$$F \left(\frac{1}{2} \right) = {}_2F_1 \left(-\frac{y}{2} - \frac{\mu}{2}, \frac{1}{2} + \frac{y}{2} - \frac{\mu}{2}; \frac{1}{2}; r \right) \quad (A18)$$

$$F \left(\frac{3}{2} \right) = {}_2F_1 \left(\frac{1}{2} - \frac{y}{2} - \frac{\mu}{2}, 1 + \frac{y}{2} - \frac{\mu}{2}; \frac{3}{2}; r \right) \quad (A19)$$

可以推导出

$$A_{2n+1} = 2 \sqrt{r} {}_2F_1 \left(n+1, -\frac{1}{2} - n; \frac{3}{2}; r \right) \\ + i \frac{\left(n + \frac{1}{2} \right) \left(n + \frac{3}{2} \right)}{(n+1)(n+2)} \\ {}_2F_1 \left(n + \frac{1}{2}; -n-1; \frac{1}{2}; r \right) \quad (A20)$$

$$B_{2n+1} = -2 \sqrt{r} {}_2F_1 \left(n+1, -\frac{1}{2} - n; \frac{3}{2}; r \right) \quad (A21)$$

将式 A(20) 和 A(21) 合并相加,有

$$C_{2n+1} = i(-1)^{n+1} \frac{\left(\frac{1}{2} \right)}{2(n+2)} (r-1)^{1/2} P_{2n+1}(\sqrt{r}) \quad (A22)$$

在推导式(A20)过程已分别用到如下关系式^[10]

$$(-1)_1^{-2} (1-r)^{a+b-1} {}_2F_1(a-1, b-1; -1; r) \\ = \frac{d}{d} [(-1)^{-1} (1-r)^{a+b-1} {}_2F_1(a, b; ; r)] \quad (A23)$$

$$2 \sqrt{\rho} {}_2F_1 \left(-n, n + \frac{3}{2}; \frac{3}{2}; r \right) \\ = - (n+1) \left(-n - \frac{1}{2} \right) P_{2n+1}(r) \quad (A24)$$

式中 $\rho = \sqrt{r}$. 最后,将式(A11)和(A22)合并整理就得到式(9).

参考文献:

[1] SARABANDI K. Efficient calculation of the fields of a dipole radiating above an impedance surface [J]. IEEE Trans on Antennas and Propagation, Sept 2002, 50 (9): 1222 - 1234.
 [2] COLLIN R E. Some observations about the near zone electric field of a Hertzian dipole above a lossy earth [J].

IEEE Trans on Antennas and Propagation, Nov 2004, 54 (11): 3133 - 3137.

[3] 江滨浩,刘永坦. 计算索末菲尔德型积分的新方法—球面波级数展开法[J]. 电子与信息学报, 2003, 25 (2): 235 - 241.

JIANG Bin-Hao, LIU Yong-Tan. A new technique for computing sommerfeld type integrals—expansion of spherical wave functions [J]. Journal of Electronics & Information Technology, 2003, 25 (2): 235 - 241. (in Chinese)

[4] 邹军,袁建生,马信山,广义索末菲积分快速算法及架空导线与地下线间互阻抗的计算[J]. 中国电机工程学报, 2001, 21 (9): 43 - 46.

ZOU Jun, YUAN Jian-Sheng, MA Xing-Shan. Fast evaluation of generalized Sommerfeld integral and the mutual impedance calculation between overhead conductors and underground conductors [J]. Proceedings of the CSEE, 2001, 21 (9): 43 - 46. (in Chinese)

[5] 胡俊,聂在平. 索末菲尔德积分新方法—快速汉克尔变换[J]. 电子学报, 1998, 26 (3): 126 - 128.

HU Jun, NIE Zai-Ping. A new method to calculate sommerfeld integral—fast hankel transform [J]. Acta Electronica Sinica, 1998, 6 (3): 126 - 128. (in Chinese)

[6] BANOS A. Dipole radiation in the presence of a conducting half-space [M]. New York: Pergmon Press, 1966. 19, 36 - 37.

[7] STRATTON J A. 电磁理论 [M]. 北京, 科学出版社, 1992: 326 - 327.

STRATTON J A. Electromagnetic Theory [M]. Beijing: Science Publishing House, 1992. 326 - 327.

[8] 张培旋. 多项式的上界 [J]. 山东大学学报 (自然科学版), 1982, 19 (2): 26 - 37.

ZHANG Pei-Xuan. The maxium term for polynomials [J]. Journal of Shandong University, 1982, 19 (2): 26 - 37. (in Chinese)

[9] MAGNUS I S, et al. Table of Integrals, Series, and Products [M]. New York: Academic Press, 1980: 805, 860.

[10] MAGNUS W, et al. Formulas and theorms of the special functions of mathematical physics [M]. New York: Spring-Verlag, 1966. 304, 38, 52, 164, 161, 156, 42.

作者简介:

江滨浩 男, 1959 年生于沈阳市, 教授, 博士, 主要从事非均匀介质中电磁波的传播和散射、等离子体电磁控制和电磁兼容等问题的教学和科研工作. E-mail: Jiangbh@hit.edu.cn

刘永坦 男, 1936 年生于江苏南京市, 教授, 中国科学院、工程院双院士, 主要研究方向是新体制雷达系、制导与信号处理.