

# 基于偏微分方程的图像盲恢复模型

朱江兵<sup>1</sup>, 许天周<sup>1</sup>, 黄春光<sup>2</sup>

(1 北京理工大学理学院数学系, 北京 100081; 2 北京理工大学机电工程学院, 北京 100081)

**摘要:** 提出了一种新的基于偏微分方程的图像盲恢复模型. 改进了 Chan 和 Wong 的交替最小化思想. 扩散系数不是直接来源于图像的梯度幅值而是在图像梯度模的基础上恢复出图像的边缘信息, 消除了梯度模在分母中对实验产生的误差, 给出了模型粘性解的存在性, 唯一性和稳定性的定理. 并给出实验结果, 通过比较表明该模型有很好的性能.

**关键词:** 图像恢复; 盲逆卷积; 交替最小化; 粘性解

**中图分类号:** TP391 **文献标识码:** A **文章编号:** 0372-2112 (2006) 05-0887-05

## A New Method for Image Blind Restoration Based on PDE

ZHU Jiang-bing<sup>1</sup>, XU Tian-zhou<sup>1</sup>, HUANG Chun-guang<sup>2</sup>

(1 Department of Mathematics, School of Science, Beijing Institute of Technology, Beijing 100081, China;

2 School of Mechano Electronics Engineering, Beijing Institute of Technology, Beijing 100081, China)

**Abstract** A new blind restoration model based on PDE was proposed for image restoration, which improved the Chan and Wong's alternating minimization (AM) algorithm. The diffusion coefficient was not obtained from the gradient magnitude of the image directly, but the edge information restored from the gradient magnitude based on the model of the image. A voided the error caused by the gradient magnitude of the denominator. Existence, uniqueness and stability of the model's viscosity solution were provided. The experimental results are given and compared with the Chan-Wong's model. The improvement by the new model is visible.

**Key words** image restoration; blind deconvolution; alternating minimization; viscosity solution

### 1 引言

图像恢复指的是从一个被模糊与噪声污染了的观察到的图像恢复为原始图像. 如果  $u$  和  $I$  分别为原始图像与观察到的图像, 则线性移不变性图像退化模型可以如下表示

$$I(x) = Au(x) + n(x), \quad x \in \Omega \quad (1)$$

$$Au(x) = \int_D h(x, s)u(x-s)ds \quad (2)$$

$\Omega \subseteq R^N$  是图像支集, 称  $A$  为模糊算子,  $D$  是模糊算子支集.  $h(x, s)$  称为点源扩散函数 (Point Spread Function, PSF),  $n$  为噪声<sup>[1]</sup>.

图像的盲恢复关于原始图像与模糊函数是一个不适定性问题<sup>[2,3]</sup>, 所以 You 和 Kavch 在文献 [3] 提出: 通过考虑如下联合最小化问题模型来正则  $u$  和  $h$

$$\min_{u, h} \inf (u, h) = \min_{u, h} \frac{1}{2} \|Au - I\|_{L^2(\Omega)}^2 + \alpha_1 \|u\|_{H^1}^2 + \alpha_2 \|h\|_{H^1}^2 \quad (3)$$

随后 Chan 和 Wong<sup>[2]</sup> 在改进 You-Kaveh 模型的基础上, 提出了如下联合最小模型,

$$\min_{u, h} \inf (u, h) = \min_{u, h} \frac{1}{2} \|Au - I\|_{L^2(\Omega)}^2 + \alpha_1 \int |\nabla u| du dy + \alpha_2 \int |\nabla h| dx dy \quad (4)$$

在 Chan-Wong 的模型中, 利用变分法知, 变分问题的极值函数  $u$  应满足下面极值条件

$$\alpha_1 \operatorname{div} \left[ \frac{\nabla u}{|\nabla u|} \right] - A^* (Au - I) = 0 \text{ 且 } \left. \frac{\partial u}{\partial n} \right|_{\partial\Omega \times R^+} = 0 \quad (5)$$

变分问题的极值函数  $h$  应满足极值条件

$$\alpha_2 \operatorname{div} \left[ \frac{\nabla h}{|\nabla h|} \right] - B^* (Bh - I) = 0 \text{ 且 } \left. \frac{\partial h}{\partial n} \right|_{\partial\Omega \times R^+} = 0 \quad (6)$$

其中  $Bh = \int_D u(x, s)h(x-s)ds$ ,  $A^*$  和  $B^*$  分别为  $A$  与  $B$  的共轭算子.

利用梯度下降法或等价的, 引入时间变量  $t$  将  $u$  看成定义于空间时间域上的函数  $u(x, t)$  且  $t=0$  时,  $u(x, 0) = I(x)$ , 将变分问题的极值条件化为非线性反应扩散方程组.

$$\begin{cases} u_i = \alpha_1 \operatorname{div} \left[ \frac{\nabla u}{|\nabla u|} \right] - A^* (Au - I), \\ h_i = \alpha_2 \operatorname{div} \left[ \frac{\nabla h}{|\nabla h|} \right] - B^* (Bh - I), \\ \left. \frac{\partial u}{\partial n} \right|_{\partial \Omega \times R^+} = 0 \quad \left. \frac{\partial h}{\partial n} \right|_{\partial \Omega \times R^+} = 0 \end{cases} \quad (7)$$

Chan和Wong在文献[2]中指出了,求 \$u\$ 和 \$h\$ 能量最小,可以通过交替迭代来进行求解.即先固定 \$u\$ 求出 \$h\$,然后再固定 \$h\$ 再求 \$u\$,如此交替迭代.最终同时恢复出 \$u\$ 和 \$h\$,其算法可以如下简单表示

求 \$h^{n+1}\$ (第 \$n+1\$ 次迭代) 固定 \$u^n\$

$$h_i = \alpha_2 \operatorname{div} \left[ \frac{\nabla h^n}{|\nabla h^n|} \right] - B^* (B^n h^n - I) \quad (8)$$

求 \$u^{n+1}\$ (第 \$n+1\$ 次迭代) 固定 \$h^{n+1}\$

$$u_i = \alpha_1 \operatorname{div} \left[ \frac{\nabla u^{n+1}}{|\nabla u^{n+1}|} \right] - (A^{n+1})^* (A^{n+1} u^n - I) \quad (9)$$

如此交替(8)与(9)迭代,最终得到 \$u\$ 和 \$h\$.

注:关于 \$A^\* (Au - I)\$ 展开式的说明.

对于 \$\forall \varphi(x) \in C\_0^\infty(R^n, R)\$, 充分小, \$\mathbb{P}(x) + u(x)\$ 取为变分问题的容许函数,并将其代入到 \$f(u, h)\$,并考虑

$$\begin{aligned} & \frac{d}{d\lambda} \|A(u + \mathbb{P}) - I\|_{L^2}^2 \Big|_{\lambda=0} \\ &= \frac{d}{d\lambda} \int_{R^n} |A(u + \mathbb{P})(x) - I(x)|^2 dx \Big|_{\lambda=0} \\ &= 2 \int_{R^n} \left[ \int_{R^n} h(x - \xi) u(\xi) d\xi - I(x) \right] \\ & \quad \cdot \left[ \int_{R^n} h(x - y) \varphi(y) dy \right] dx \\ &= 2 \int_{R^n} \left[ \int_{R^n} h(x - y) \left( \int_{R^n} h(x - \xi) u(\xi) d\xi - I(x) \right) \right. \\ & \quad \left. \cdot \varphi(y) dy \right] dx \end{aligned}$$

由变分法基本原理有

$$\int_{R^n} h(y - x) \left[ \int_{R^n} h(y - \xi) u(\xi) d\xi - I(y) \right] dy = 0$$

记 \$\tilde{h}(x) = h(x)\$ 由此可知 \$A^\* (Au - I)\$ 的表达式

$$A^* (Au - I) = \tilde{h}^* (h^* u - I)$$

## 2 新算法

在 Chan-Wong 的模型中,由于利用交替最小化的思想,

$$u_i = \alpha_1 \operatorname{div} \left[ \frac{\nabla u^{n+1}}{|\nabla u^{n+1}|} \right] - (A^{n+1})^* (A^{n+1} u^n - I)$$

实际上已假定模糊算子 \$Au(x) = \int h(x, s) u(x, s) ds = u^\* \cdot h\$ 中的 \$h\$ 已知,由此可以看成是一个已知模糊核的图像恢复模型.将 Rudin-Osher-Lions Chan 等极小化问题<sup>[2,4,5]</sup>推广到一般情形,为此我们在式(5)中引入

$$g(x) = \frac{1}{1 + k |\nabla G_o^* u|^2}, k > 0, G_o = \frac{1}{4\pi\sigma} \exp\left[-\frac{|x|^2}{4\sigma}\right]$$

则式(5)变为

$$\alpha_1 \operatorname{div} \left[ \left( g^2(x) \frac{\nabla u}{|\nabla u|} \right) \right] - A^* (Au - I) = 0 \quad (10)$$

将式(10)中的左端展开后有,

$$\alpha_1 \left[ g^2(x) \operatorname{div} \left[ \frac{\nabla u}{|\nabla u|} \right] + 2g(x) \nabla g \cdot \frac{\nabla u}{|\nabla u|} \right] - A^* (Au - I) = 0 \quad (11)$$

根据文献[6],为了减少实验时由于分母存在 \$|\nabla u|\$ 产生的误差,考虑如下形式

$$\left| \nabla u \right| \cdot \left\{ \alpha_1 \left[ g^2(x) \operatorname{div} \left[ \frac{\nabla u}{|\nabla u|} \right] + 2g(x) \nabla g \cdot \frac{\nabla u}{|\nabla u|} \right] - A^* (Au - I) \right\} = 0$$

为了防止 \$\nabla u\$ 在边缘过分的扩散而丢失了一些很重要的细节,进而在第一项添加 \$g(x)\$,这是因为 \$g(x)\$ 会随着 \$|\nabla u|\$ 的增大而减少.由此有

$$\alpha_1 \left[ g^2(x) |\nabla u| \operatorname{div} \left[ \frac{\nabla u}{|\nabla u|} \right] + 2g(x) \nabla g \cdot \nabla u \right] - |\nabla u| \cdot g(x) A^* (Au - I) = 0 \quad (12)$$

利用梯度下降法,将其转化为如下非线性反应扩散方程

$$u_t = \alpha_1 \left[ g^2(x) |\nabla u| \operatorname{div} \left[ \frac{\nabla u}{|\nabla u|} \right] + 2g(x) \nabla g \cdot \nabla u \right] - |\nabla u| \cdot g(x) A^* (Au - I) \quad (13)$$

其中

$$\begin{aligned} & \left| \nabla u \right| \operatorname{div} \left[ \frac{\nabla u}{|\nabla u|} \right] \\ &= \frac{u_{xx}(u_x^2 + u_y^2) + u_{yy}(u_x^2 + u_y^2) - 2u_{xy}u_{xy} - u_{xx}u_x^2 - u_{yy}u_y^2}{u_x^2 + u_y^2} \\ &= \Delta u - (\nabla u^T D^2 n \nabla u) \setminus |\nabla u|^2 \end{aligned}$$

称为退化扩散项,其中 \$D^2 u\$ 为一个 Hessian 矩阵.此项使沿梯度正交方向扩散,在梯度方向没有扩散<sup>[7]</sup>.实际上,记与梯度 \$\nabla u\$ 正交方向为 \$\xi = \frac{(-u\_y, u\_x)}{|\nabla u|}\$,则 \$u\$ 沿 \$\xi\$ 的二阶方向

导数 \$u\_{\xi\xi} = |\nabla u| \operatorname{div} \left[ \frac{\nabla u}{|\nabla u|} \right]\$, \$g^2(x)\$ 控制着扩散速度; \$\nabla g \cdot \nabla u\$ 为 \$\nabla u\$ 方向的反应项.此项能导致激波以保持边缘<sup>[2,4]</sup>. \$A^\* (Au - I)\$ 促使定态解是获得图像的最佳逼近估计.

对于式(6)同样为了减少实验时由于分母存在 \$|\nabla h|\$ 产生的误差,也添加 \$|\nabla h|\$ 项,考虑如下形式

$$\begin{cases} \left[ \alpha_2 \operatorname{div} \left[ \frac{\nabla h}{|\nabla h|} \right] - B^* (Bh - I) \right] \cdot |\nabla h| = 0 \\ \text{且 } \left. \frac{\partial h}{\partial n} \right|_{\partial \Omega \times R^+} = 0 \end{cases} \quad (14)$$

基于上述的分析,则得到新的联合最小化模型:

$$\begin{cases} u_t = \alpha_1 \left[ g^2(x) |\nabla u| \operatorname{div} \left[ \frac{\nabla u}{|\nabla u|} \right] + 2g(x) \nabla g \cdot \nabla u \right] - |\nabla u| \cdot g(x) A^* (Au - I), \\ h_t = |\nabla h| \left[ \alpha_2 \operatorname{div} \left[ \frac{\nabla h}{|\nabla h|} \right] - B^* (Bh - I) \right], \\ \left. \frac{\partial u}{\partial n} \right|_{\partial \Omega \times R^+} = 0 \quad \left. \frac{\partial h}{\partial n} \right|_{\partial \Omega \times R^+} = 0 \end{cases} \quad (15)$$

### 3 解的存在性、唯一性、稳定性

由于新得到的模型式 (15) 是非线性的和退化的, 因此我们需要证明方程 (15) 粘性解<sup>[6]</sup>的适定性, 即存在性、唯一性和稳定性. 本文的模型是在一个二维的空间中, 在数学上, 我们可以研究其维的情形, 方程组 (15) 中的参数  $\alpha_1, \alpha_2, k$  都为常数, 不会影响适定性的证明, 为了简化表达形式而不影响对解的讨论, 考虑  $\alpha_1 = \alpha_2 = k = 1$ , 并考虑其周期边界条件, 通过周期延拓, 考虑如下 Cauchy 问题

$$\begin{cases} u_t = g^2 a_{ij} (\nabla u) u_{x_i x_j} + 2g \frac{\partial g}{\partial t} [\nabla G_x \cdot \nabla u] \\ \quad - |\nabla u| \cdot g A^* (Au - I), \\ h_t = b_{ij} (\nabla h) h_{x_i x_j} - B^* (Bh - I), \\ \left. \frac{\partial u}{\partial n} \right|_{\partial \Omega \times R^+} = 0 \quad \left. \frac{\partial h}{\partial n} \right|_{\partial \Omega \times R^+} = 0 \end{cases} \quad (16)$$

其中  $g = g(s) = \frac{1}{1+s^2}, s = (s_1, s_2, \dots, s_n) = \nabla G^* u, \frac{\partial g}{\partial t} = \frac{\partial g}{\partial s_i} (s), G = \frac{1}{4p} \exp\left[-\frac{(x^2 + y^2)}{4}\right]$  和  $a_{ij} = \delta_{ij} - \frac{p_i p_j}{|p|^2}, b_{ij} = \delta_{ij} - \frac{q_i q_j}{|q|^2}$ , 其中  $\delta_{ij} - \frac{p_i p_j}{|p|^2}$  是  $\nabla u^T D^2 u \nabla u / |\nabla u|^2$  的第  $i$  行, 第  $j$  列的元素. 对于  $b_{ij}$  同样考虑.

由于交替最小估计, 只需证明 (16)

$$u_t = g^2 a_{ij} (\nabla u) u_{x_i x_j} + 2g \frac{\partial g}{\partial t} [\nabla G_x \cdot \nabla u] - |\nabla u| \cdot g A^* (Au - I) \quad (17)$$

的粘性解的存在性、唯一性和稳定性; 另一方程可以利用同样的方法证明.

初值满足如下假设:

(H1) (初值周期假设) 函数  $f: R^n \rightarrow R$  是周期函数, 即存在正整数  $n$  维向量  $t$  满足

$$f(x+t) = f(x), x \in R^n$$

(H2) (算子  $\Gamma$  周期假设) 对于  $u \in L^\infty(R^n \times [0, T])$ ,  $T > 0, t \in [0, T]$ , 当  $u(x+t, t) = u(x, t), (x, t) \in R^n \times [0, T], t \in R^n$  时,

$$\Gamma u(x+t, t) = \Gamma u(x, t), t \in R^n$$

(H3) (算子  $\Gamma$  极值假设) 对于  $u \in L^\infty(R^n \times [0, T])$ ,  $T > 0, t \in [0, T]$  成立

$$|\Gamma u(x, t)| \leq C_T |u(x, t)|$$

首先我们来回顾文献 [8] 中粘性解的定义.

函数  $u \in C(R^n \times [0, T])$ ,  $T > 0$  为式 (17) 的粘性下解, 如果对任意的  $\phi \in C^2(R^2 \times R)$ , 下列条件在点  $(x_0, t_0) \in R^n \times [0, T]$  上成立, 并且有  $u - \phi$  取局部最大值.

当  $\nabla \phi(x_0, t_0) \neq 0$  时

$$\frac{\partial \phi}{\partial t}(x_0, t_0) = g((\nabla G_x \cdot \nabla u)(x_0, t_0))^2 a_{ij} (\nabla \phi(x_0, t_0)) \phi_{x_i x_j}(x_0, t_0) + 2g((\nabla G_x \cdot \nabla u)(x_0, t_0)) \cdot$$

$$\frac{\partial g}{\partial t} ((\nabla G_x \cdot u)(x_0, t_0)) [(\nabla G_x \cdot u)(x_0, t_0) \cdot \nabla \phi(x_0, t_0)] - |\nabla \phi(x_0, t_0)| \cdot g(\nabla G_x \cdot u)(x_0, t_0) \cdot A^*(Au - I)(x_0, t_0) \leq 0 \quad (18)$$

当  $\nabla \phi(x_0, t_0) = 0$  时,

$$\frac{\partial \phi}{\partial t}(x_0, t_0) = g((\nabla G_x \cdot \nabla u)(x_0, t_0))^2 \cdot \limsup a_{ij}(p) \phi_{x_i x_j}(x_0, t_0) \leq 0 \quad (19)$$

类似地, 将定义中的“局部最大值”改为“局部最小值”, 相应“ $\leq 0$ ”改为“ $\geq 0$ ”, “ $\limsup$ ”改为“ $\liminf$ ”. 由此可得到粘性解的定义, 自然地, 函数  $u$  为一个粘性解, 意味着  $u$  既为一个粘性下解又为一个粘性上解.

由于对粘性解适定性的证明很长, 限于篇幅的原因, 略去证明过程. 我们给出下面的定理:

定理 3.1 Cauchy 问题式 (17) 有唯一粘性解  $u \in C(R^n \times [0, T]) \cap L^\infty(0, T, W^{1,\infty}(R^n))$  对于任意的  $T \in [0, \infty]$  且  $\inf I \leq u(x, t) \leq \sup I, I$  在  $R^n$  上 Lipschitz 连续. 更进一步, 如果  $v \in C(R^n \times R_+)$  为对应于另一个 Lipschitz 连续函数  $I_1$  方程 (17) 的粘性解, 则存在一个只依赖于  $I_1, I$  和  $T$  的常数  $c > 0$  满足

$$\sup_{0 \leq t \leq T} \|u(x, t) - v(x, t)\|_{L^\infty(R^n)} \leq c \|I - I_1\|_{L^\infty(R^n)} \quad (20)$$

### 4 模型的数值计算

本文的试验对象是灰度图像. 我们对

$$u_t = \alpha_1 [g^2(x) |\nabla u| \operatorname{div} \left( \frac{\nabla u}{|\nabla u|} \right) + 2g(x) \nabla g \cdot \nabla u - |\nabla u| \cdot g(x) A^* (Au - I)]$$

进行如下离散化, 对于  $h_t = -(|\nabla h| [B^* (Bh - I) - \alpha_2 \operatorname{div} \left( \frac{\nabla h}{|\nabla h|} \right)])$  的离散化以同样的方式进行.  $u_{ij}$  表示图像像素点  $x_i = i \cdot s, y_j = j \cdot s$  的灰度值,  $s$  是空间步长,  $u(x_s, y_s, t_s)$  记为  $u_{ij}^n, u_{ij}$  估计使用向前差分格式

$$u_t = \frac{u_{ij}^{n+1} - u_{ij}^n}{\Delta t}$$

其中  $\Delta t$  是时间 (尺度参数) 步长.

扩散项

$$|\nabla u| \operatorname{div} \left( \frac{\nabla u}{|\nabla u|} \right) = \frac{u_{xx}(u_x^2 + u_y^2) + u_{yy}(u_x^2 + u_y^2) - 2u_{xy}u_x u_y - u_{xx}u_x^2 - u_{yy}u_y^2}{u_x^2 + u_y^2}$$

用中心差分进行估计

$$(u_x)_{ij}^n = \frac{u_{i+1/2, j}^n - u_{i-1/2, j}^n}{2h} \quad (21)$$

$$(u_y)_{ij}^n = \frac{u_{i, j+1/2}^n - u_{i, j-1/2}^n}{2h} \quad (22)$$

$$(u_{xx})_{ij}^n = \frac{u_{i+1, j}^n - 2u_{i, j}^n + u_{i-1, j}^n}{h^2} \quad (23)$$

$$(u_{yy})_{ij}^n = \frac{u_{ij+1}^n - 2u_{ij}^n + u_{ij-1}^n}{h^2} \quad (24)$$

$$(u_{xy})_{ij}^n = \frac{u_{i+1,j+1}^n - u_{i-1,j+1}^n - u_{i+1,j-1}^n + u_{i-1,j-1}^n}{h^2} \quad (25)$$

$\nabla g \cdot \nabla u$  综合使用向前或向后差分格式估计

$$\begin{aligned} (\nabla g \cdot \nabla u)_{ij} &= \max(\Delta x g_{i,j}, 0) \Delta x^+ u_{ij} + \min(\Delta x g_{i,j}, 0) \Delta x^- u_{ij} \\ &= \max(\Delta y g_{i,j}, 0) \Delta y^+ u_{ij} + \min(\Delta y^- g_{i,j}, 0) \Delta y^- u_{ij} \end{aligned} \quad (26)$$

上式各项分别用以下格式表示:

$$\begin{aligned} \Delta x^- u_{ij} &= u_{ij} - u_{i-1,j} & \Delta x^+ u_{ij} &= u_{i+1,j} - u_{ij} \\ \Delta y^- u_{ij} &= u_{ij} - u_{i,j-1} & \Delta y^+ u_{ij} &= u_{i,j+1} - u_{ij} \\ \Delta x g_{ij} &= \frac{g_{i+1,j} - g_{i-1,j}}{2h} & \Delta y g_{ij} &= \frac{g_{i,j+1} - g_{i,j-1}}{2h} \end{aligned}$$

对于  $A^* (Au - I)$  可以转化为  $A^* Au - A^* I$ , 而  $A^* Au$  和  $A^* I$  有如下差分格式

$$A^* A u_{ij} = \sum_{k,l} \tilde{h}(e_k, f_l) \left( \sum_{p,q} h(z_p, v_q) u(x_i - z_p - e_k, y_j - v_q - f_l) \right) \quad (27)$$

$$A^* I_{ij} = \sum_{k,l} \tilde{h}(z_k, v_l) I(x_i - z_k, y_j - v_l) \quad (28)$$

则其迭代格式计算  $u_{ij}^{n+1}, n = 1, 2, \dots, N$

$$u_{ij}^{n+1} = u_{ij}^n + \Delta t \Gamma(u_{ij}^n) \quad (29)$$

初始条件

$$u_{ij}^0 = I(x_i, y_j)$$

$$\begin{aligned} \Gamma(u) &= \alpha_1 [g^2(x) |\nabla u| \operatorname{div} \left( \frac{\nabla u}{|\nabla u|} \right) + 2g(x) \nabla g \cdot \nabla u] \\ &\quad - |\nabla u| \cdot g(x) A^* (Au - I) \end{aligned}$$

其中  $\alpha_1 > 0$  是均衡参数.

对于  $h_i = \alpha_2 \operatorname{div} \left( \frac{\nabla h}{|\nabla h|} \right) - B^* (Bh - I)$  的离散化以同样的方式进行

$$h_{ij}^{n+1} = h_{ij}^n + \Delta t \mathfrak{h}(h_{ij}^n)$$

初始条件

$$\mathfrak{h}(h) = |\nabla h| \left[ \alpha_2 \operatorname{div} \left( \frac{\nabla h}{|\nabla h|} \right) - B^* (Bh - I) \right]$$

Chan和Wong的交替离散求解的思想是: 在每一个迭代过程中, 例如, 在固定  $u^n$  时, 通过式(8)进行一次迭代求出一个  $h^{n+1}$ , 再利用这个  $h^{n+1}$  进行一次迭代得到  $u^{n+1}$ . 由本文的第三部分的证明可以得知式(29)与(30)在其已知的初始条件下有唯一的收敛解, 因此我们利用此性质, 将Chan和Wong的迭代思想进行了改进.

求  $h^{n+1}$  (第  $n+1$  次迭代), 固定  $u^n$ ,  $\text{step}_1 > 1$  为一个我们设定的正整数.

$$l = 1, m = 1$$

if  $l \leq \text{step}_1$

$$h_{ij}^{n+1} = h_{ij}^n + \Delta t \mathfrak{h}(h_{ij}^n)$$

$$\mathfrak{h}(h) = |\nabla h| \left[ \alpha_2 \operatorname{div} \left( \frac{\nabla h}{|\nabla h|} \right) - B^* (Bh - I) \right]$$

$$h^n = h^{n+1}, \quad l = l + 1$$

else  $h^{n+1} = h^n$

求  $u^{n+1}$  (第  $n+1$  次迭代), 固定  $h^{n+1}$ ,  $\text{step}_2 > 1$  为一个我们设定的正整数.

if  $m \leq \text{step}_2$

$$u_{ij}^{n+1} = u_{ij}^n + \Delta t \Gamma(u_{ij}^n)$$

$$\begin{aligned} \Gamma(u) &= \alpha_1 [g^2(x) |\nabla u| \operatorname{div} \left( \frac{\nabla u}{|\nabla u|} \right) + 2g(x) \nabla g \cdot \nabla u] \\ &\quad - |\nabla u| \cdot g(x) A^* (Au - I) \end{aligned}$$

$$u^n = u^{n+1}, \quad m = m + 1$$

else  $u^{n+1} = u^n$

如此交替最小化, 最终得到  $u$  和  $h$ .

### 5 实验结果

首先以一幅  $1024 \times 768$  的城市卫星遥感图像为例, 给出新模型的图像恢复的效果, 并进行比较, 如图 1 中是所示先将图像进行散焦模糊. 再添加高斯噪声, 模拟出一个既被模糊又被噪声污染的图像. 图 2 中所示的是我们分别利用 You-Kaveh 和 Chan-Wong 及本文提出的新模型进行恢复而得到的结果.

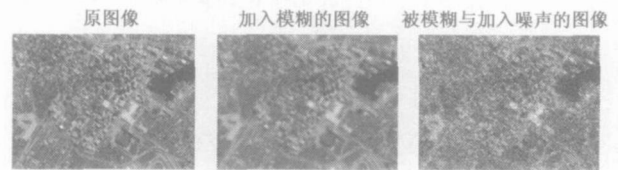


图 1



图 2

下面我们以一幅由多个不同的几何图形组成的  $320 \times 320$  图像进行模拟恢复效果, 在图 3 中我们先对其进行以运动模糊, 然后再在模糊图像的基础上加入椒盐噪声. 图 4 中是分别用 You-Kaveh 和 Chan-Wong 及本文提出的新模型进行恢复而得到的结果.

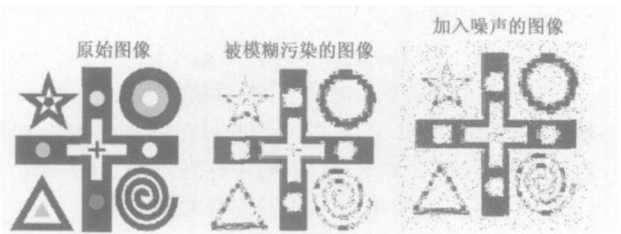


图 3

下面我们给出上述两幅图像在 Genuine Intel Pentium 处理器上, 对于给定的相同的参数条件下, 三种算法对两

幅图像进行迭代所需要的时间:



图 4

表 1

试验图像	城市卫星图像	几何图像
退化方式	散焦 $11 \times 11$ SNR 1: 2.72	运动模糊 $9 \times 1$ , SNR 1: 2.72
参数	$s = h = 1$ , $\alpha_1 = \alpha_2 = 2 \times 10^3$ , $dt = 0.23$ 迭代次数 = 50	
You kaveh 算法所需时间	127.020000s	3.312000s
Chan 算法所需时间	112.211000s	3.157000s
本文算法所需时间	107.158000s	3.094000s

## 6 结论

本文在 You-Kaveh 和 Chan-Wong 的复原模型的基础, 改进了其交替最小的思想, 考虑了图像的局部信息, 使得参数相对具有自适应性, 并且有对其数值计算时, 对迭代格式进行了改进, 通过对上述不同模型的复原效果可以看出, 本文提出的新的模型在复原图像上有相对较好的效果.

## 参考文献:

[ 1 ] T Chan, C Wong Convergence of the alternating minimization algorithm for blind deconvolution[ J]. ELSEVIER, Linear Algebra and its Application, 2000, 316( 3): 259-285.

[ 2 ] T Chan, C Wong Convergence of the alternating minimization algorithm for blind deconvolution[ J]. ELSEVIER, Linear and its Application, 2000, 316( 3): 259-285.

[ 3 ] Y You, M Kaveh A regularization approach to joint blur identification and image restoration [ J ]. IEEE Trans,

Image Process 1996, 5( 3): 416- 428

[ 4 ] L Rudin, S Osher, E Fatemi Nonlinear total variation based noise removal algorithms[ J]. ELSEVIER, Physica 1992, 60(4): 259- 268

[ 5 ] L Alvarez, P Lions, J Morel Image selective smoothing and edge detection by nonlinear diffusion II [ J]. SIAM. Numerical Analysis 1992, 29( 3): 845- 866

[ 6 ] C A Z Bareclo, Y Chen Heat flows and related minimization problem in image restoration [ J]. Computers and Mathematics with Applications 2000, 39( 7): 81- 97.

[ 7 ] C R Vogel, M E Oman Iterative methods for total variation denoising[ J]. SIAM, Sci Statist Comput 1996, 17( 1): 227- 238

[ 8 ] M G Crandall, H Ishii, P L Lions Users' guide to viscosity solutions of second partial differential equations[ J]. Bulletin of the American Mathematical Society 1992, 27( 1): 1- 67.

[ 9 ] O A Ladyzhenskaya, V A Solonnikov, N N Ural'tseva Linear and quasilinear equation of parabolic type[ J]. Mathematical Imaging and Vision, 1992, 6( 6): 269- 289.

## 作者简介:



朱江兵 男, 1980年出生于湖南娄底, 北京理工大学硕士研究生, 主要研究方向为利用偏微分方程进行图像处理.  
E-mail: bitzhu@163.com



许天周 男, 1963年出生于陕西合阳, 博士, 北京理工大学副教授, 主要研究的方向为泛函分析、图像处理与分析、机器视觉与模式识别.