

非奇异多通道滤波器组合及其优化设计

吴敏金, 张良仪

(华东师范大学华贸学院, 上海 200062)

摘要: 本文将系统地考察多通道滤波器组合, 定义一大类非奇异多通道滤波器组合, 导出正规型多通道滤波器组合的分析、合成与传递方程; 讨论其归一化、平滑度与对称性的优化约束; 特别地提出基于零谱矩阶数的优化方法以提高滤波器在通带与阻带的平滑度, 即所谓零谱矩滤波器; 给出对称多通道滤波器组合及其设计示例, 供信号处理各领域使用。

关键词: 多通道滤波器组合; 完全重构方程; 零谱矩滤波器。

中图分类号: TP309.7 TN 011.73 文献标识码: A 文章编号: 0372-2112 (2006) 08-1492-05

Nonsingular Multi-Channel Filter Bank and Its Optimizing Design

WU Min-jin, ZHANG Liang-yi

(Huamiao College East China Normal University, Shanghai 200062 China)

Abstract Multi-channel filter bank (MFB) is investigated systematically. A kind of nonsingular multi-channel filter banks (NMFB) is defined. The analysis equations, synthesis equations and transfer equations of NMFB are introduced. And the optimizing restrictions for normalizing, smoothing and symmetry of filters are discussed. Particularly, the concept of zero spectrum moment filters to optimize filters' character is proposed. At last, the design procedure and example of symmetric multi-channel filter bank are given.

Key words multi-channel filter bank; perfect reconstruction equation; zero spectrum moment filters

1 引言

双通道滤波器组合已成功地与小波变换结合, 应用于语音编码和图像压缩等诸多方面^[1-3]。然而双通道滤波器组合仅可实现信号的 2 幂次方分解, 而对于非 2 幂次方分解则无能为力。因此, 多通道滤波器组合引起人们的关注与重视, 如文献 [4] 设计了多通道 FR 滤波器组合; 但是由于系统的时延与相移而限制其应用范围。本文将系统地考察多通道滤波器组合, 定义一大类非奇异多通道滤波器组合, 导出正规型多通道滤波器组合的分析、合成与传递方程; 讨论其归一化、平滑度与对称性的优化约束, 特别地提出基于零谱矩阶数的优化方法以提高滤波器在通带与阻带的平滑度, 即所谓零谱矩滤波器; 给出对称多通道滤波器组合及其设计示例, 供信号处理各领域使用。而 3 通道滤波器组合在图像分解中的应用已在文献 [7] 中阐述。

2 非奇异多通道滤波器组合 (MFB)

M 通道滤波器组合 (MFB) 如图 1 所示, 由分析部分

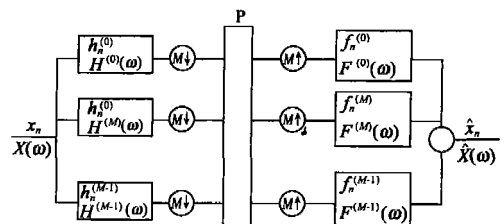


图 1 M 通道滤波器组合

与合成部分构成, P 为传输 (或处理)。

为了实现系统的完全重构 (PR), 不出现混叠, $\hat{X}(Z) = \alpha Z^{n_0} X(Z)$, (α 为放大系数, n_0 为延时)。系统应满足完全重构方程,

$$\begin{cases} \sum_m H^{(m)}(Z) F^{(m)}(Z) = M \alpha Z^{n_0} \\ \sum_m H^{(m)}(ZW^i) F^{(m)}(Z) = 0, i = 1, \dots, M-1 \end{cases} \quad (1)$$

其中, $W = e^{j\frac{2\pi}{M}}$

在式 (1) 中, 对于 $F^{(m)}(Z)$ 而言, 其系数构成一个 M 阶行列式, 记为

$\Delta(Z) = \det[H^{(m)}(ZW^t)], i=0, \dots, M-1; m=0, \dots, M-1$ (2)
 称为滤波器组合的特性函数. 可验证, $\Delta(Z)$ 的罗朗展开式仅包含方次 $n = -M_c + Mk$ (k 为任意整数) 的项, 即

$$\Delta(Z) = Z^{M_c} f(Z^M), \text{ 其中 } M_c = \frac{1}{2}M(M-1) \quad (3)$$

而 $f(Z)$ 为 $|Z|=1$ 上的解析函数.

定义 1 如果特性函数 $\Delta(Z)$ 在 $|Z|=1$ 上解析且无零点, 那么称此 MFB 为非奇异多通道滤波器组合. 由线性方程组解的克莱姆法则可得,

定理 1 对于非奇异多通道滤波器组合, 合成滤波器 $F^{(m)}(Z)$ 可由分析滤波器 $H^{(m)}(Z)$ 加以表示:

$$F^{(m)}(Z) = \frac{(-1)^m \Delta_{-i,m}(Z)}{\Delta(Z)} M \alpha Z^{n_0} \quad (4)$$

其中, $\Delta_{-i,m}(Z)$ 表示从 M 阶行列式 $\Delta(Z)$ 中删去第 i 行第 m 列余下的 $M-1$ 阶行列式. 进而, 由式(1)可得系统的传递函数为

$$T(Z) = \frac{1}{M} \sum_m H^{(m)}(Z) F^{(m)}(Z) = \alpha Z^{n_0} \quad (5)$$

定义 2 令

$$q_n^{(m)} = h_n^{(m)} * f_n^{(m)}, Q^{(m)}(Z) = H^{(m)}(Z) F^{(m)}(Z) \quad (6)$$

分别称之为 MFB 第 m 通道滤波器的卷积序列及组合谱. $Q^{(m)}(Z)$ (在 $|Z|=1$ 上) 为 $q_n^{(m)}$ 的富里埃变换. 由此可得,

$$T(Z) = \frac{1}{M} \sum_{m=0}^{M-1} Q^{(m)}(Z), \text{ 即} \quad (7)$$

$$\frac{1}{M} \sum_m q_n^{(m)} = \alpha \delta_{n-n_0}$$

定理 2 对于非奇异多通道滤波器组合, 有

$$T(Z) = \frac{1}{M} \sum_{i=0}^{M-1} Q^{(m)}(ZW^t), \quad \forall m=0, \dots, M-1 \quad (8)$$

$$\text{推论 } q_{Mk}^{(m)} = \alpha \delta_{Mk-n_0}, \quad \forall m=0, \dots, M-1 \quad (9)$$

此推论对于设计求解非奇异 MFB 有重要意义.

3 正规型多通道滤波器组合 (NMFB)

为了求解 MFB 的完全重构方程, 对特性函数 $\Delta(Z)$ 加以约束是必要的. 从式(3)出发, 可定义如下:

定义 3 如果非奇异多通道滤波器组合在 $|Z|=1$ 上有 $|\Delta(Z)|=M$, 那么称此 MFB 为正规型. 进而, 如果 $\Delta(Z)$ 为 Z 的单项式, 即存在复常数 c 与整数 M_0 及 k_0 , 使得

$$\Delta(Z) = cZ^{M_0}, |c|=M, \text{ 其中 } M_0 = M_c + Mk_0 \quad (10)$$

那么称之为正规型多通道滤波器组合 (NMFB). 本文将讨论正规型非奇异且能完全精确重构 ($\alpha=1, n_0=0$) 的多通道滤波器组合, 其完全重构方程如下:

$$\begin{cases} \Delta(Z) = cZ^{M_0} \\ F^{(m)}(Z) = (-1)^m \Delta_{-i,m}(Z) \cdot c^{-1} Z^{M_0} \cdot M \end{cases} \quad (11)$$

为了求解 NMFB 的分析滤波器 $h_n^{(m)}$ 和合成滤波器 $f_n^{(m)}$, 需导出 NMFB 的完全重构方程和传递方程的时域形式. 适当选取 c 的值, 可得

定理 3 对于正规型多通道滤波器组合, 满足下列时域方程:

(1) 分析方程:

$$\sum_{n_0}^{M-1} \left(\prod_{i=0}^{M-1} h_{n_i}^{(i)} (-1)^{(M-1)(k-k_0)} \prod_{0 \leq i < j \leq M-1} \sin \frac{\pi}{M} (n_i - n_j) \right) = \frac{M}{2^{M_c}} \delta_k \quad (12)$$

(2) 合成方程:

$$f_n^{(m)} = (-1)^{m+n+(M-1)+Mk_0} 2^{\frac{1}{2}(M-1)(M-2)} \sum_{\substack{m-1 \\ i=0 \\ n_i = n+M_0 \\ i \neq m}} \left(\prod_{i=0}^{M-1} h_{n_i}^{(i)} \right) \cdot \prod_{\substack{0 \leq i < j \leq M-1 \\ i, j \neq m}} \sin \frac{\pi}{M} (n_i - n_j) \quad (13)$$

(3) 传递方程:

$$\begin{aligned} \forall m=0, \dots, M-1, q_{Mk}^{(m)} &= \delta_k = \begin{cases} 1, k=0 \\ 0, k \neq 0 \end{cases} \quad (14) \\ q_n^{(m)} &= (-1)^{m+(M-1)+Mk_0} 2^{\frac{1}{2}(M-1)(M-2)} \\ &\cdot \sum_{\substack{m-1 \\ n_i = n+M_0 \\ i \neq m}} \left(\prod_{i=0}^{M-1} h_{n_i}^{(i)} (-1)^{n-n_m} \prod_{\substack{0 \leq i < j \leq M-1 \\ i, j \neq m}} \sin \frac{\pi}{M} (n_i - n_j) \right) \end{aligned} \quad (15)$$

其中, $M_0 = M_c + Mk_0, M_c = \frac{1}{2}M(M-1)$.

定理的证明较为复杂, 从略. $M=2, 3$ 的特例可分别见文献[6,5]与文献[7].

NMFB 设计的基本步骤是: 利用传递方程 $q_{Mk}^{(0)} = \delta_k$ 求解分析滤波器 $h_n^{(m)}$, 再利用合成方程计算合成滤波器 $f_n^{(m)}$, 而分析方程可用于检验解的正确性.

4 有限基上 NMFB 设计的优化约束

设分析滤波器 $h_n^{(m)}$ 的有限基为 $[N_b^{(m)}, N_e^{(m)}]$, 令

$$\tilde{N}_b^{(m)} = \sum_{i \neq m} N_b^{(i)} - M_0, \tilde{N}_e^{(m)} = \sum_{i \neq m} N_e^{(i)} - M_0 \quad (16)$$

由合成方程式(13), 可知合成滤波器 $f_n^{(m)}$ 的基必在 $[\tilde{N}_b^{(m)}, \tilde{N}_e^{(m)}]$ 之内. 为计算方便, 不妨允许 $f_n^{(m)}$ 在基的两端上取零值; 因此可以认定合成滤波器 $f_n^{(m)}$ 的基为 $[\tilde{N}_b^{(m)}, \tilde{N}_e^{(m)}]$.

为了获得滤波器的良好性能, 在设计 NMFB 时应加以优化约束.

4.1 归一化

通常要求 $h_n^{(0)}, h_n^{(M-1)}$ 与 $h_n^{(m)} (m=1, \dots, M-2)$ 分别呈低通、高通与带通属性. 因此, NMFB 的归一化约束为

$$\begin{aligned} H^{(0)}(0) &= \sqrt{MM}, H^{(0)}(\pi) = 0; \\ H^{(M-1)}(0) &= 0, H^{(M-1)}(\pi) = \sqrt{M}; \\ \forall m \neq 0, M-1, H^{(m)}(0) &= H^{(m)}(\pi) = 0 \end{aligned} \quad (17)$$

也即,

$$\begin{aligned} \sum h_n^{(0)} &= \sqrt{M}, \sum h_n^{(0)} (-1)^n = 0; \\ \sum h_n^{(M-1)} (-1)^n &= 0, \sum h_n^{(M-1)} (-1)^n = \sqrt{M}; \\ \forall m = 1, \dots, M-2, \sum h_n^{(m)} &= 0, \sum h_n^{(m)} (-1)^n = 0 \end{aligned} \quad (18)$$

式(17)与式(18)均称为 MFB 的归一化约束方程。(对于带通, $H^{(m)}(\omega)$, ($m=1, \dots, M-2$) 的峰点及峰值可按实际要求确定。)

4.2 平滑度

为了提高 NMFB 滤波器在通带与阻带的平滑度, 下面介绍基于零谱矩阶数的优化方法, 即所谓零谱矩滤波器^[8]。

设滤波器响应序列 h_n , 频响 $H(\omega)$, 其 i 阶谱矩定义为

$$H_i(\omega) = \sum_n h_n e^{jn\omega} n^i, \quad j = \sqrt{-1} \quad (19)$$

谱矩具有谱与矩双重特性($i=0$ 时为频响 $H(\tilde{\omega})$; $\tilde{\omega}=0$ 时为 h_n 的 i 阶矩)。

如果 h_n 在 $\omega = \omega_0$ 处满足

$$H_i(\omega_0) = 0, \quad i = 1, \dots, l, \text{ 而 } H_{l+1}(\omega_0) \neq 0 \quad (20)$$

则称 h_n 在 $\omega = \omega_0$ 处具有 l 阶零谱矩, 记为 I_{ω_0} 。因为频响 $h(\omega)$ 的 i 阶导数 $(H(\omega))^{(i)} = (-j)^i H_i(\omega)$, 所以零谱矩阶数等价于零导数阶数。故零谱矩反映了滤波器频响 $H(\omega)$ 在 ω_0 近旁的平滑程度。

定义 4 设 NMFB 第 m 通道滤波器的响应序列 $h_n^{(m)}$ 。

如果在 $\omega = \omega_0$ 处具有 l 阶零谱矩, 那么称 NMFB 第 m 通道在 $\omega = \omega_0$ 处具有 l 阶零谱矩。此时, 如果 ω_0 为 $|H^{(m)}(\omega)|$ 的零点(或峰点), 则 ω_0 即为 l 重零点(或 l 重峰点); 记为 $I_{\omega_0}^{(m)}$ 。特别重要的是在 $\omega_0 = 0, \pi$ 处的 $I_0^{(m)}$ 和 $I_{\pi}^{(m)}$ 。

NMFB 滤波器平滑度优化就在于尽可能地提高零谱矩阶数 $I_0^{(m)}$ 和 $I_{\pi}^{(m)}$ 。(注: 零谱矩阶数 $I_0^{(m)}$ 和 $I_{\pi}^{(m)}$ 包含了人们熟知的消失距^[4,5]之特例, 消失距仅反映滤波器在阻带的衰减程度, 无法体现在通带峰顶的平滑度。)然而, 提高零谱矩阶数 $I_0^{(m)}$ 和 $I_{\pi}^{(m)}$ 受到 $h_n^{(m)}$ 及 $f_n^{(m)}$ 基长的约束。零谱矩阶数 $I_0^{(m)}$ 和 $I_{\pi}^{(m)}$ 越高, 则要求 $h_n^{(m)}$ 及 $f_n^{(m)}$ 的基长越长, 反之亦然。在设计 NMFB 时, 可根据需要来加以确定。

NMFB 滤波器可在各类零谱矩滤波器选择: 单边或双边零谱矩滤波器^[7]。例如, 可以验证, $M=2$ 时, 长度为 N 的 Daubechies 共轭小波滤波器是单边零谱矩滤波器 ($I_0^{(m)} = 0$ 和 $I_{\pi}^{(m)} = \frac{N}{2} - 1$)。

4.3 对称性

为了获得各通道的线性相位, 要求通道的卷积序列关于原点对称: $q_n^{(m)} = q_{-n}^{(m)}$ 。此对称性要求可通过 $h_n^{(m)}$ 和 $f_n^{(m)}$ 的对称、反对称来实现。对此有

(1) 设 $h_n^{(m)}$ 和 $f_n^{(m)}$ 的基中心为 $c^{(m)}$ 和 $d^{(m)}$, 它们应满足:

$$\sum c^{(m)} = M_0, \quad \sum d^{(m)} = -M_0 \quad (21)$$

(2) $h_n^{(m)}$ 和 $f_n^{(m)}$ 具有相同的奇偶性(即同奇长或同偶长)。

(3) $h_n^{(m)}$ 和 $f_n^{(m)}$ 具有相同的对称性(即同对称或同反对称)。

下述定理对于设计对称型的 MFB 有重要作用。

定理 4 如果 $h_n^{(m)}$ ($m=0, \dots, M-1$) 为对称或反对称, 且它们的对称中心是相容的:

$$\forall i, l, c^{(i)} - c^{(l)} = \frac{M}{2} c_{il}, \quad c_{il} \text{ 为整数} \quad (22)$$

那么, 对于任意的 $m, f_n^{(m)}$ 必为对称或反对称, 且

$$f_{N/2 + \tilde{n} - n}^{(m)} = (-1)^{e(m)} f_n^{(m)} \quad (23)$$

其中, $e(m) = -2c^{(m)} + \frac{1}{2}(M-1)(M-2)$

$$+ \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq m}}^M c_{il} + a(m), \quad \text{mod}(2) \quad (24)$$

而 $a(m)$ 表示在 $\{f_n^{(i)}, i \neq m\}$ 中反对称序列的个数。(证略)

(4) 为了 $q_n^{(m)}$ 关于原点对称, 如 $h_n^{(m)}$ 为对称, 则要求 $e(m)$ 为偶数, 以使 $f_n^{(m)}$ 为对称; 如 $h_n^{(m)}$ 为反对称, 则要求 $e(m)$ 为奇数, 以使 $f_n^{(m)}$ 也为反对称。

由此可见, $h_n^{(m)}$ 对称性的选择不仅与通道数 M 、对称中心 $c^{(m)}$ 有关, 而且也与 $\{f_n^{(i)}, i \neq m\}$ 中反对称序列个数 $a(m)$ 的奇偶性有关。

此外, 有限基上的对称(或反对称)序列的谱特性与序列长度有关。 $h_n^{(m)}$ 的奇偶长、对称性与高低通服从如下约束: 对称偶长在 $\omega = \pi$ 处有零点, 不可用于高通; 反对称偶长在 $\omega = 0$ 处有零点, 不可用于低通; 反对称奇长在 $\omega = 0, \pi$ 处有零点, 不可用于高通与低通; 而对称奇长则无此限制^[6,7]。

5 对称型滤波器组合设计及其典型示例

有限基上对称的正规型多通道滤波器组合(SMFB)的设计包括两个步骤: 参数设置与迭代优化。参数设置有:

(1) 确定通道数 M 。

(2) 确定滤波中心 $c^{(0)}, \dots, c^{(M-1)}$ (整点或半整点)使之满足一致性条件:

$$\begin{cases} c^{(0)} + \dots + c^{(M-1)} = M_0 \\ c^{(i)} - c^{(l)} = \frac{1}{2} M c_{il}, \quad (\forall i, l) \end{cases} \quad (25)$$

其中, M_0 为 NMFB 定义中特性函数 $\Delta(Z)$ 的方次, 也为滤波对称中心之和。 M_0 的一种合宜的选取(滤波中心尽可能取在零点)是

$$M_0 = \begin{cases} 0, & \text{当 } M \text{ 为奇数} (k_0 = -\frac{M-1}{2}) \\ \frac{M}{2}, & \text{当 } M \text{ 为偶数} (k_0 = -\frac{M}{2} + 1) \end{cases} \quad (26)$$

由此可引出三类典型的 SMFB:

(a) $c^{(0)} = c^{(1)} = \dots = c^{(M-1)} = 0$, M 为奇数(记为类 W_0)。此时, $M_0 = 0$ 。 $h_n^{(m)}$ 均为奇长同对称中心。

(b) $c^{(0)} = c^{(1)} = \dots = c^{(M-1)} = \frac{1}{2}$, M 为偶数(记为类

W_1)。此时, $M_0 = \frac{M}{2} \cdot h_n^{(m)}$ 。均为偶长同对称中心。(如 $M =$

2 时的 Haar 小波^[1]).

$$(c) c^{(0)} = c^{(1)} = \dots = c^{(M-1)} = \frac{M}{2}, M \text{ 为偶数 (记为类 } W_2);$$

或者在 $c^{(1)}, \dots, c^{(M-1)}$ 中某一个 $c^{(m)} = \frac{M}{2}$, 其余的都为 0. 此时, $M_0 = \frac{M}{2} \cdot h_n^{(m)}$ 均为奇长, 但对称中心不同. (如 $M=2$ 时的不等长对称双正交小波^[3]).

(3) 根据 $c^{(m)}$ 决定 $h_n^{(m)}$ 基长的奇偶性: $c^{(m)}$ 整点, 则 $h_n^{(m)}$ 奇长; $c^{(m)}$ 半整点, 则 $h_n^{(m)}$ 偶长. 由式(25)可知, $h_n^{(m)}$ 中偶长的个数必为偶数.

(4) 确定对称性: 低通 $h_n^{(0)}$ 为对称. 而高通 $h_n^{(M-1)}$ 奇长时为对称; 偶长时为反对称. 对于带通 $h_n^{(m)}$ 的选择应按式(24), 以保证 $h_n^{(m)}$ 和 $f_n^{(m)}$, ($m=1, \dots, M-2$) 是相同的奇偶性.

特别地, 对于同对称中心的 SMFB, 可以验证, 在类 W_0 且 $M=4n+3$ 中及在类 W_1 且 $M=4n$ 中, 带通中应有奇数个反对称; 否则, 在类 W_0 且 $M=4n+1$ 中及在类 W_1 且 $M=4n+2$ 中, 带通中应有偶数个反对称. 一种简单的选择方法是: 在类 W_0 及类 W_1 中, 带通 $h_n^{(m)}$ 的对称与反对称交替出现: 当 $m=2k$ 时为对称; 当 $m=2k+1$ 时为反对称. 对于不是同对称中心的 SMFB, 可以验证, 在类 W_2 中, 有如下结论: 当 $M=4n$ 时, 带通中应有奇数个反对称; 当 $M=4n+2$ 时, 带通中应有偶数个反对称.

(5) 根据实际需要, 决定 $h_n^{(m)}$ 的零谱矩阶数 $I_0^{(m)}$ 和 $I_n^{(m)}$, 选择零谱矩滤波器类别, 进而结合其中心 $c^{(m)}$, 确定其基 $[N_b^{(m)}, N_c^{(m)}]$.

参数设置后, 即可进行基于最小二乘法迭代优化, 可采用作者文献[6]中的迭代算法, 或文献[3]中介绍的专用软件(SQP). 以求解多通道滤波器系数.

下面给出具有同一对称中心的多通道滤波器组合(SMFB)设计之示例.

在类 W_0 中, 取通道数 $M=3, h_n^{(m)}$ 的基奇长 $L=11, n \in [-5, 5]$. 则 $f_n^{(m)}, n \in [-9, 9]$. $h_n^{(0)}, h_n^{(2)}$ 和 $f_n^{(0)}, f_n^{(2)}$ 为对称, 具有单边 3 阶零谱矩; 而 $h_n^{(1)}$ 和 $f_n^{(1)}$ 为反对称, 具有双边 2 阶零谱矩. 图 2 为 $h_n^{(m)}$ 的功率谱 $|H^{(m)}(\omega)|^2$. 表 2 列出 SMFB 滤波器 $h_n^{(m)}$ 和 $f_n^{(m)}$ 的系数. 滤波器 $h_n^{(m)}$ 和 $f_n^{(m)}$ 都关于原点对称, 这是共轭正交小波^[1]与对称的双正交小波^[3]所不能比拟的.

类 W_0 有较多的优点, 是一种值得推荐的多通道滤波器组合

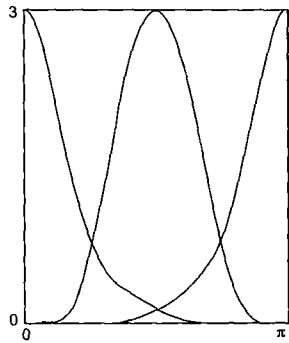


图 2 分析滤波器 $h_n^{(m)}(m=0,1,2)$ 的功率谱

此滤波器组合 $h_n^{(m)}$ 和 $f_n^{(m)}$ 可实现信号与图像的完全重构, 其在图像分解中的应用参见文献[7]. 此外, 为了进一步改善上述滤波器 $h_n^{(m)}$ 和 $f_n^{(m)}$ 在通带与阻带的平滑度, 可加大基长, 提高零谱矩阶数 $I_0^{(m)}$ 和 $I_n^{(m)}$ 越高(限于篇幅, 对于不同零谱矩阶数与不同基长的滤波器 $h_n^{(m)}$ 和 $f_n^{(m)}$ 的系数数据此不详述).

表 1 SMFB 滤波器 $h_n^{(m)}$ 和 $f_n^{(m)}$ 的系数 ($m=0, 1, 2$)

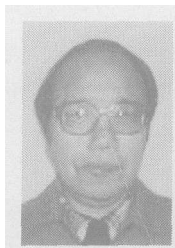
n	$h_n^{(0)}$	$h_n^{(1)}$	$h_n^{(2)}$
-5	0.011714940328	0.036589533195	-0.011714940328
-4	0.037813282353	0.000000000000	0.037813282353
-3	0.049452079672	0.179877438079	-0.049452079672
-2	0.126193847373	-0.000000000000	0.126193847373
-1	0.371845681892	-0.722579980214	-0.371845681892
0	0.538011144332	-0.000000000000	0.538011144332
1	0.371845681892	0.722579980214	-0.371845681892
2	0.126193847373	0.000000000000	0.126193847373
3	0.049452079672	-0.179877438079	-0.049452079672
4	0.037813282353	-0.000000000000	0.037813282353
5	0.011714940328	-0.036589533195	-0.011714940328
n	$f_n^{(0)}$	$f_n^{(1)}$	$f_n^{(2)}$
-9	-0.00239641412	0.001534528933	0.00239641412
-8	0.00515847933	-0.000000000000	0.00515847933
-7	0.011780987588	-0.006477681059	-0.011780987588
-6	0.038227472038	-0.000000000000	0.038227472038
-5	-0.005220140187	-0.00215537294	0.005220140187
-4	-0.177742588593	-0.000000000000	-0.177742588593
-3	-0.213259868559	-0.10872831699	0.213259868559
-2	0.047175666763	-0.000000000000	0.047175666763
-1	0.700880857310	0.664922621248	-0.700880857310
0	0.932248252140	-0.000000000000	0.932248252140
1	0.700880857310	-0.664922621248	-0.700880857310
2	0.047175666763	-0.000000000000	0.047175666763
3	-0.213259868559	0.10872831699	0.213259868559
4	-0.177742588593	-0.000000000000	-0.177742588593
5	-0.005220140187	0.00215537294	0.005220140187
6	0.038227472038	-0.000000000000	0.038227472038
7	0.011780987588	0.006477681059	-0.011780987588
8	0.00515847933	-0.000000000000	0.00515847933
9	-0.00239641412	-0.001534528933	0.00239641412

参考文献:

[1] Daubechies I The wavelet transform, time-frequency localization and signal analysis[J]. IEEE Trans IT, 1990, 36(5): 961-1006
[2] Mallat S A theory for multiresolution signal decomposition the wavelet representation[J]. IEEE Trans PAM I 1989, 11(7): 674-694
[3] Antonini M. Image coding using wavelet transform [J]. IEEE Trans Image Proc, 1992, 1(2): 68-87.
[4] Saghizadeh P, Willson A N. A new approach to the design of critically sampled M-Channel uniform band perfectre

- construction linear-phase FIR filter banks[J]. IEEE Trans SP, 1996, 46(6): 1544- 1557
- [5] 吴敏金. 匹配滤波器组合与子带分割 [J]. 华东师范大学学报, 1992(2): 41- 48
W u M in-jin Matched filter bank and decomposition of sub-bands[J]. Journal of ECNU, 1992(2): 41- 48 (in Chinese)
- [6] 张良仪, 吴敏金. 滤波器组合设计参数优化 [J]. 自动化学报, 2002, 28(4): 513- 519.
Zhang Liang-yi W u M in-jin Design of filter bank and parameter optimization[J]. Acta Automatica Sinica 2002, 28(4): 513- 519 (in Chinese)
- [7] 吴敏金, 沈霄凤, 金升俊. 图像分解中的多通道滤波器组合 [J]. 中国图像图形学报, 2005 10(11): 1423- 1426
W u M in-jin Shen Xiao-feng Jin Sheng-jun Multichannel filter banks and its application of image decomposition[J]. Journal of Image and Graphics 2005, 11(11): 1423 - 1426 (in Chinese)
- [8] 张良仪, 吴敏金. 零谱矩滤波器系列 [J]. 中国图像图形学报, 2005 11(11): 1462- 1465
Zhang Liang-yi W u M in-jin A series of zero spectral moment filters[J]. Journal of Image and Graphics 2005 11(11): 1462- 1465 (in Chinese)

作者简介:



吴敏金 男, 1940年生于福建惠安, 1964年毕业于复旦大学数学系, 1980年获得华东师范大学计算机学硕士学位. 华东师范大学教授, 上海图像图形学会常务理事, 图像处理与模式识别专业委员会主任. 专著有《图像形态学》与《分形信息导论》. 主要研究领域为图像形态学与非线性科学. E-mail m jwu@mail.ecnu.edu.cn

张良仪 男, 1953年 12月生, 1978年毕业于华东师范大学物理系. 高级工程师, 华东师范大学电气总公司总经理. 主要研究领域为语音信号处理, 计算机信息技术开发与应用.