基于广义特征值的病态混叠盲源分离算法

刘海林
(广东工业大学应用数学学院,广东广州 510006)

摘 要: 提出了一种新的病态混叠盲源分离算法.算法首先对观察信号进行预处理,把多余的观察信号剔除,使预处理后的混叠矩阵 $\boldsymbol{A}$ 是行满秩的;然后,通过把恢复信号的部分和的协方差与恢复信号的协方差之比的对数作为代价函数,使优化代价函数转化为求解一个广义特征值问题.在较弱的条件下,证明了该算法能够恢复出所有理论上能被分离出的源信号.数值仿真表明该算法非常有效.

关键词: 盲源分离; 病态混迭; 广义特征值; 可解性
中图分类号: TN911.7 文献标识码: A 文章编号: 0372-2112(2006)11-2072-04

Blind Separation of Ill-Condition Mixed Sources Based on Generalized Eigenvalue

LIU Hai-lin
(College of Applied Mathematics, Guangdong University of Technology, Guangzhou, Guangdong 510006, China)

Abstract: It is proposed a new blind separation algorithm of ill-condition mixed sources. Observed signals are pre-processed through eliminating redundancy signals so that mixed matrix $\boldsymbol{A}$ is row full rank. Further, we propose a cost function that is a logarithm of a ratio of the covariance of a part sum of recovered signals and the covariance of recovered signals so that optimizing this function transform to solve a generalized eigenvalue problem. Under a loose condition, it is proved that any source signals theoretically satisfying the condition can be separated. The computer simulation shows its outstanding performance on blind source separation approach.

Key words: blind source separation; ill-condition mixture; generalized eigenvalue; solvability

1 引言

在过去的十多年中,国内外已有许多基于不同方法和理论的盲源分离算法[1~3].所谓的盲信号分离是指在不知道源信号和传输信道的参数的情况下,仅利用一组已知的源信号的混合信号,来恢复或提取出独立的源信号的过程.其数学模型为:假设有 n 个未知的相互统计独立并且最多有一个高斯的源信号 $s_1(t), s_2(t), \cdots, s_n(t)$, m 个传感器接收到的可观察信号为 $x_1(t), x_2(t), \cdots, x_m(t)$, A 是一个未知的 $m\times n$ 矩阵,满足下列关系:

$$\boldsymbol{X}(t)=\boldsymbol{AS}(t) \tag{1}$$

其中, $\boldsymbol{X}(t)=(x_1(t), x_2(t), \cdots, x_m(t))^T$, $\boldsymbol{S}(t)=(s_1(t), s_2(t), \cdots, s_n(t))^T$.盲源分离的目标就是从观察到的向量信号 $\boldsymbol{X}(t)$ 中,恢复出源向量信号 $\boldsymbol{S}(t)$.由于该技术仅利用很少的先验信息就可对信号进行处理,所以它在许多领域如:生物医学、无线通讯、语音信号处理、图像恢复、地震勘探等,获得了重要应用.

在已有的算法中,绝大多数盲源分离都假定源信号的个数预先知道,传感器的个数 m 等于源信号的个数 n,并且要求混叠矩阵 $\boldsymbol{A}$ 是非奇异的.但是,实际上情况是源信号的个数 n 未必已知, m 和 n 不一定相等,即使相等 A 也有可能是奇异的.另外,也存在 $\boldsymbol{A}$ 是各种病态的情况.在文献[4]中,Cao 和 Liu 首先研究了源信号病态混叠时的盲信号的可解性及分离原理问题,提出了 m 行分解性的充要条件.但是,在混叠矩阵是病态情况下,并没有给出一种能有效分离出源信号的方法.Li、Wang 和 Zurada[5]利用神经网络模型提出了一种病态混叠情况下的序列盲信号提取算法,但是这种方法仅适用于混叠矩阵是方阵的情形,对其他形式的混叠矩阵无法分离出源信号.另外,正如这篇文献[5]中指出的该提取方法的收敛性依赖于算法初始点的选取,因而其稳定性较差.在源信号全是超 Gauss 信号或都是亚 Gauss 信号的情况下,Li 和 Wang[6]基于4阶累积量给出了一种盲信号提取算法.该方法除了对源信号的要求有局限外(源信号都是超 Gauss 或全为亚 Gauss),基于4阶累积量的算法实际上还存在一些缺点,当用样本来计算4阶累积量时,偏离均值远的少数样本点对其值的计算影响较大,这对4阶累积量的估值带来明显误差,因而也影响算法的实际运行效果.Ye、Zhu 和 Zhang[7]以互信息量作为代价函数提出了一种新的盲信号分离算法,该算法通过改进自

收稿日期: 2005-08-23; 修回日期: 2006-04-20
基金项目: 香港浸会大学广东工业大学联合项目(No. 2005227)

然梯度算法能在未知源信号个数的情况下分离出源信号. 但是, 上述方法必须在混叠矩阵 A 是列满秩的这一特殊条件下才能工作.

最近, Stone[8]提出了一种称之为时间预测的盲分离算法, 该分离方法的思想是基于一种猜测——"独立源信号的任何线性混叠合信号, 其时间预测性小于或等于其中的任一源信号的时间预测性", 该算法的分离矩阵能用广义特征值的方法直接求出, 因而算法速度快. 尽管 Stone 的盲分离算法对相当部分线性混叠独立源信号的提取有较好的效果, 可是对有些类型的源信号的恢复效果不佳或很差, 这是因为基于猜测的时间预测性盲源分离算法缺乏理论基础, 并且这个猜测不完全正确(见文献[9]). Xie, He 和 Fu[9]指出了基于时间预测的不足之处, 并给出了正确的代价函数. 文献[9]中的算法适用于源信号个数等于传感器个数, 并且混叠矩阵 A 是非奇异的情况. 但是, 对源信号一般病态混迭情形, 算法并不适用.

本文首先通过对观察信号进行预处理, 把多余的观察信号剔除, 使预处理后的混叠矩阵 A 是行满秩的. 进一步提出了一种新的代价函数: 恢复信号的部分和的协方差与恢复信号的协方差之比的对数. 对这种新的代价函数的优化可转化为求解一个广义特征值问题. 并且, 在较弱的条件下, 我们证明了利用这种新算法, 所有理论上可分离的源信号都能被同时恢复出来. 由于该算法不是用迭代方法运行, 而是通过求解一个广义特征值问题直接分离出源信号, 所以该算法的收敛速度非常快. 计算机仿真验证了文中提出的算法是正确的和非常有效的.

2　观察信号的预处理方法

从式(1)中, 我们可得到观察信号 $\boldsymbol{X}(t)$ 的协方差矩阵

$$\mathrm{cov}(\boldsymbol{X}(t)) = A\,\mathrm{cov}(\boldsymbol{S}(t))\,\boldsymbol{A}^T \tag{2}$$

这里 $\mathrm{cov}(\boldsymbol{X}(t))$ 是一个 $m\times m$ 方阵, $\mathrm{cov}(\boldsymbol{S}(t))$ 是一个 $n\times n$ 方阵. 根据源信号相互独立的假设, 知 $\mathrm{cov}(\boldsymbol{S}(t))$ 为非奇异的, 因此, $\mathrm{Rank}(\mathrm{cov}(\boldsymbol{X}(t))) = \mathrm{Rank}(\boldsymbol{A})$. 当 $\mathrm{Rank}(\boldsymbol{A}) < m$ 时, $\det(\mathrm{cov}(\boldsymbol{X}(t))) = 0$; 当 $\mathrm{Rank}(\boldsymbol{A}) = m$ 时, $\det(\mathrm{cov}(\boldsymbol{X}(t)))\neq 0$. 设 A_{ri} 是矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的第 i 行, 则 $x_i(t) = A_{ri}S(t)\ (i = 1, 2, \cdots, m)$. 当 $\mathrm{Rank}(\boldsymbol{A}) = k < m$ 时, 通过下列算法, 我们能够得到一组观察信号 $x_{i1}(t), x_{i2}(t), \cdots, x_{ik}(t)$. 并且, 这组观察信号对应的混叠矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的行向量 $A_{ri1}, A_{ri2}, \cdots, A_{rik}$ 是线性无关的, 即剔除了多余的观察信号. 算法步骤如下:

步 1. 初始化. 给定 m 和小正数 ε 的值, 令 $i = 1, \tilde{x}(t) = (x_1(t))$.

步 2. 如果 $i = m + 1$, 停止, 这时 $\tilde{x}(t)$ 就是所求得观察信号; 否则, 令 $\boldsymbol{Z}(t) = \begin{pmatrix} \tilde{x}(t) \\ x_{i+1}(t) \end{pmatrix}$.

步 3. 如果 $|\det(\mathrm{cov}(\boldsymbol{Z}(t)))| > \varepsilon$, 令 $\tilde{x}(t) = Z(t)$, $i = i + 1$, 转步 2; 否则, 令 $i = i + 1$, 转步 2.

对病态混叠盲源分离问题, 经过上述预处理后的观察信号, 其混叠矩阵 $\boldsymbol{A}$ 变成了行满秩的. 下面我们仅考虑 $\mathrm{Rank}(A) = m < n$ 的病态情况.

3　新的代价函数

在盲源分离模型式(1)中, 令

$$g(s_i(t)) = \begin{cases} \sum_{j=1}^{t} s_i(j),\ t\leq q; \\ \sum_{j=t-q+1}^{t} s_i(j),\ t > q. \end{cases} \quad i = 1, 2, \cdots, m \tag{3}$$

其中 q 为一个参数. 设 $\boldsymbol{W}$ 是 $m\times m$ 的解混矩阵, $\boldsymbol{Y}(t) = (y_1(t), y_2(t), \cdots, y_m(t))^T$ 是恢复信号向量, 即

$$\boldsymbol{Y}(t) = \boldsymbol{W}\boldsymbol{X}(t) \tag{4}$$

令 $g(\boldsymbol{S}(t)) = (g(s_1(t)), g(s_2(t)), \cdots, g(s_n(t)))^T$, $g(\boldsymbol{X}(t)) = (g(x_1(t)), g(x_2(t)), \cdots, g(x_n(t)))^T$, $g(\boldsymbol{Y}(t)) = (g(y_1(t)), g(y_2(t)), \cdots, g(y_n(t)))^T$. 根据式(3)中 g 的定义, 我们有

$$\mathrm{cov}(g(\boldsymbol{X}(t))) = \boldsymbol{A}\,\mathrm{cov}(g(\boldsymbol{S}(t)))\,\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}} \tag{5}$$

$$\mathrm{cov}(g(\boldsymbol{Y}(t))) = \boldsymbol{W}\mathrm{cov}(g(\boldsymbol{X}(t)))\,\boldsymbol{W}^{\mathrm{T}} \tag{6}$$

由于 $\boldsymbol{A}$ 是一个行满秩的矩阵, 从式(2)和(5), 可看出 $\mathrm{cov}(g(\boldsymbol{X}(t)))$ 和 $\mathrm{cov}(\boldsymbol{X}(t))$ 是实对称正定矩阵. 因而, 下列关系式

$$\mathrm{cov}(g(\boldsymbol{X}(t)))\,w = \lambda\mathrm{cov}(\boldsymbol{X}(t))\,w \tag{7}$$

为广义特征值问题.

我们定义新的代价函数为

$$Q(\boldsymbol{W}) = \log\frac{\mathrm{cov}(g(\boldsymbol{Y}(t)))}{\mathrm{cov}(\boldsymbol{Y}(t))} \tag{8}$$

对上述代价函数, 我们有如下定理:

定理 1　设广义特征值问题式(7)存在 m 个不相同的特征值, 式(1)中源信号 $s_i(t)$ 理论上能被恢复, 即存在一个行向量 $\boldsymbol{W}_i$ 使得 $\boldsymbol{W}_iAS(t) = k_is_i(t)$, 则 $\mathrm{cov}(g(s_i(t)))/\mathrm{cov}(s_i(t))$ 是广义特征值问题式(7)的特征值, 并且属于这个特征值的任意特征向量 $\bar{\boldsymbol{W}}_i$, 有 $\bar{\boldsymbol{W}}_iAs(t) = \bar{k}_is_i(t)$. 这里 k_i 和 $\bar{k}_i$ 是两个非零常数.

证明: 设存在一个向量 $\boldsymbol{W}_i$ 使得 $\boldsymbol{W}_iAS(t) = k_is_i(t)$, 由于 $s_1(t), s_2(t), \cdots, s_n(t)$ 相互独立, 所以我们有 $\boldsymbol{W}_i\boldsymbol{A} = (0, \cdots, 0, k_i, 0, \cdots, 0)$. 进一步, 有

$$\begin{aligned} &\mathrm{cov}(g(\boldsymbol{X}(t)))\,\boldsymbol{W}_i^{\mathrm{T}} \\ &= \boldsymbol{A}\,\mathrm{cov}(g(\boldsymbol{S}(t)))\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\,\boldsymbol{W}_i^{\mathrm{T}} \\ &= \boldsymbol{A}\mathrm{diag}([\mathrm{cov}(g(s_1(t))), \cdots, \mathrm{cov}(g(s_n(t)))])\,\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\,\boldsymbol{W}_i^{\mathrm{T}} \\ &= A(0, \cdots, 0, \mathrm{cov}(g(s_1(t))k_i, 0, \cdots, 0))^{\mathrm{T}} \end{aligned} \tag{9}$$

$$\begin{aligned} &\frac{\mathrm{cov}(g(s_i(t)))}{\mathrm{cov}(s_i(t))}\mathrm{cov}(x(t))\,\boldsymbol{W}_i^{\mathrm{T}} \\ &= \frac{\mathrm{cov}(g(s_i(t)))}{\mathrm{cov}(s_i(t))}\boldsymbol{A}\mathrm{diag}([\mathrm{cov}(s_1(t)), \cdots, \mathrm{cov}(s_n(t))])\,\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\,\boldsymbol{W}_i^{\mathrm{T}} \\ &= \frac{\mathrm{cov}(g(s_i(t)))}{\mathrm{cov}(s_i(t))}A(0, \cdots, 0, \mathrm{cov}(s_i(t))\,k_i, 0, \cdots, 0) \end{aligned} \tag{10}$$

由式(9)和(10), 我们得

$$\mathrm{cov}(g(\boldsymbol{X}(t)))\,\boldsymbol{W}_i^{\mathrm{T}} = \frac{\mathrm{cov}(g(s_i(t)))}{\mathrm{cov}(s_i(t))}\mathrm{cov}(\boldsymbol{X}(t))\,\boldsymbol{W}_i^{\mathrm{T}}$$

即 $\mathrm{cov}(g(s_i(t)))/\mathrm{cov}(s_i(t))$ 为广义特征值问题式(7)的特征值. 设 $\bar{\boldsymbol{W}}_i$ 是一个属于这个特征值的特征向量. 根据式(7)存在 m 个不同特征值的假设, 则存在一个非零常数 $\bar{k}_i$, 使得 $\bar{\boldsymbol{W}}_i = \bar{k}_i\boldsymbol{W}_i = \bar{k}_ik_is_i(t)$. 令 $\bar{k}_i = \bar{k}k_i$, 则 $\bar{\boldsymbol{W}}_i\boldsymbol{AS}(t) = \bar{k}_is_i(t)$. 证毕.

从定理 1 可以看出, 在定理 1 的条件下, 任何理论上可分离出的源信号, 都能通过求解广义特征值式(7) 得到. 算法步骤如下:

步 1. 计算 $g(\boldsymbol{X}(t))$;

步 2. 用 Matlab 广义特征值函数 $\boldsymbol{W}=\mathrm{eig}(g(\boldsymbol{X}(t)),\boldsymbol{X}(t))$ 求出广义特征值问题(7) 的解混矩阵;

步 3. 计算 $\boldsymbol{WX}(t)$.

根据定理 1, 在模型(1) 中, 所有理论上可分的源信号都包含在 $\boldsymbol{WX}(t)$中.

4 数值仿真

在下列数值仿真中, 参数 q 取为 5000, $\varepsilon=0.1$, 样本个数也取 5000. 解混矩阵通过求解广义特征值问题式(7) 得到, 具体使用 Matlab 中的广义特征值函数 $\boldsymbol{W}=\mathrm{eig}(g(\boldsymbol{X}(t)),X(t))$ 求出.

为了评价算法的分离效果和性能, 我们引入了下列指标:

$$ISI=\frac{\sum_{i=1}^{n}c_{1i}^{2}+\sum c_{ji_0}^{2}-\max_i\{c_{1i}^{2}\}}{\max_i\{c_{1i}^{2}\}}$$

这里, $(c_{ij})_{r\times n}=\boldsymbol{WA}$, $r=\mathrm{Rank}(A)$, $i_0=\arg\max_i\{c_{1i}^{2}\}$.

在下列仿真中, 我们举了两个病态混叠盲源分离问题. 例中的源信号即有超 Gauss 信号, 又有亚 Gauss 信号. 这两个问题用文献[5, 6]中的方法是不能解决的.

例 1. 在这个仿真中, 我们使用了来自 3 个男人和 1 个女人的声音做为源信号, 这 4 个源信号都是超高斯信号. 第 5 个源信号是 $s_5(t)=5\sin(n(t)-0.5)$, 其中 $n(t)$ 是[0, 1] 区间上的均匀分布的白噪声. 显然, 它是亚高斯信号. 混叠矩阵为

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}0.4&-0.1&0.2&0.1&0.3\\-0.7&0.3&-0.6&-0.3&-0.9\\-0.3&0.2&-0.4&1.0&-0.6\\0.1&0.1&-0.2&1.1&-0.3\end{pmatrix}$$

通过预处理观察信号, 混叠矩阵可变为:

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}0.4&-0.1&0.2&0.1&0.3\\-0.7&0.3&-0.6&-0.3&-0.9\\-0.3&0.2&-0.4&1.0&-0.6\end{pmatrix}$$

用本文的算法, 求出的恢复信号和源信号之间的相关性绝对值矩阵为

$$\mathrm{Corr}(\boldsymbol{S}(t),\boldsymbol{Y}(t))=\begin{pmatrix}0.0238&0.0338&0.0075&0.9996&0.0329\\0.9997&0.0080&0.0146&0.0240&0.0118\\0.0048&0.2663&0.5242&0.0124&0.7965\end{pmatrix}$$

对解混矩阵 $\boldsymbol{W}$, 我们有

$$\boldsymbol{WA}=\begin{pmatrix}-0.0240&0.0033&-0.0066&-0.9995&-0.0100\\0.9997&0.0014&-0.0028&0.0237&-0.0042\\-0.0000&0.2699&-0.5398&0.0202&-0.8097\end{pmatrix}$$

性能指标 $ISI=(0.0017, 0.0012, 0.5564)$.

在图 1 中, 我们显示了所有源信号(用实线表示) 和恢复信号(用虚线表示) 从 1000 到 2000 个样本的图形.

在奔腾Ⅳ微机上, 求解这个病态混叠盲源分离问题仅用 10.36 秒.

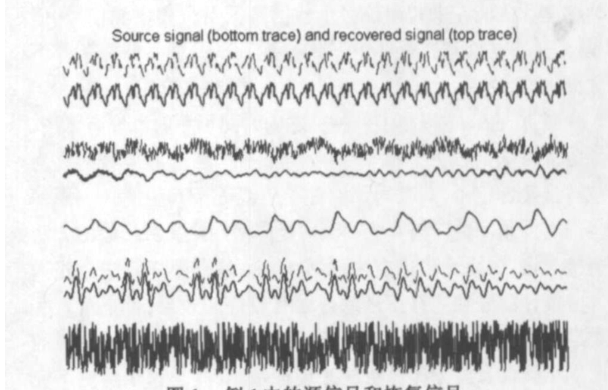

图 1 例 1 中的源信号和恢复信号

例 2. 在这个例子中, 源信号分别是 $s_1(t)=\cos(t)$, 另外 2 个源信号 $s_2(t)$, $s_3(t)$ 分别是不同的语音信号乘上 $\sin(37t)$ 和 $\exp(\sin(53t))$ 构成的, 第 4 个源信号 $s_4(t)$ 是个语音信号. 显然, 第 1 源信号是亚 Gauss 的, 其他源信号均是超 Gauss 的. 混叠矩阵为

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}0.1&0.3&0.9&-0.2\\-0.1&-0.3&-0.9&0.2\\0.2&0.6&0.5&-0.4\\0.7&-0.3&0.4&0.2\\0.3&-0.3&0.4&0.2\\0.3&0.6&-0.5&0.4\end{pmatrix}$$

预处理后的混叠矩阵为

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}0.1&0.3&0.9&-0.2\\0.2&0.6&0.5&-0.4\\0.7&-0.3&0.4&0.2\end{pmatrix}$$

用本文的方法得到的恢复信号和源信号之间的相关系数绝对值矩阵为

$$\mathrm{Corr}(\boldsymbol{S}(t),\boldsymbol{Y}(t))=\begin{pmatrix}0.0000&0.0049&1.0000&0.0007\\1.0000&0.0193&0.0005&0.0156\\0.0000&0.8369&0.0012&0.5715\end{pmatrix}$$

解混矩阵 $\boldsymbol{W}$ 和混叠矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的乘积为

$$\boldsymbol{WA}=\begin{pmatrix}-0.0006&0.0010&1.0000&-0.0007\\-1.0000&-0.0000&0.0000&0.0000\\-0.0244&0.8211&0.0037&-0.5474\end{pmatrix}$$

性能指标 $ISI=(0.0000, 0.0006, 0.4453)$.

图 2 显示了源信号(用实线表示) 和恢复信号(用虚线表

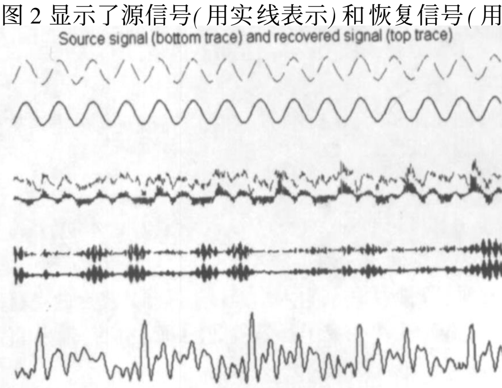

图 2 例 2 中的源信号和恢复信号

示)的 1000~2000 个样本的图形.

在奔腾Ⅳ微机上,求解这个病态混叠盲源分离问题仅用 6.78秒.

5 结论

这篇论文提出了一种新的病态混迭盲源分离算法,该算法类似 Stone[8] 的工作,能把盲源分离转化为求解广义特征值问题,因而算法收敛速度非常快.文中探讨了盲源分离的可分性,提出了最多被分离出源信号的个数.利用该算法,我们能保证快速恢复出所有理论上可分离的源信号.计算机仿真说明了算法的有效性.该文提出的算法也适用于非病态混迭盲源分离问题.

参考文献:

[1] A Hyvarinem, E Oja. Independent component analysis: Algorithms and applications [J]. Neural Networks, 2000, 13: 411-430.

[2] 张贤达,保铮. 盲信号分离[J]. 电子学报. 2001, 29 (12A): 1766-1771.

ZHANG Xian-da, BAO Zheng. Blind source separation [J]. Acta Electronica Sinica, 2001, 29(12A): 1766-1771. (In Chinese)

[3] 刘琚,何振亚. 盲源分离和盲反卷积[J]. 电子学报, 2002, 30(4): 570-576.

LIU Ju, HE Zheng-ya. A survey of blind source spparation and blind deconvolution [J]. Acta Electronica Sinica, 2002, 30(4): 570-576. (In Chinese)

[4] X R Cao, R W Liu. General approach to blind source separation [J]. IEEE Trans, Signal Processing, 1996, 44: 562-571.

[5] Y Q Li, J Wang, J M Zurada. Blind extraction of singular mixed source signals [J]. IEEE Trans, Neural Networks, 2000, 11(6): 1413-1422.

[6] Y Q Li, J Wang. Sequential blind extraction of instantaneously mixed sources [J]. IEEE Trans. Signal Processing, 2002, 50 (5): 997-1006.

[7] J M Ye, X L Zhu, X D Zhang. Adaptive blind separation with an unknown number of sources [J]. Neural Computation, 2004, 16: 1641-1660.

[8] J V Stone. Blind source separation using temporal predictability [J]. Neural Computation, 2001, 13(7): 1559-1574.

[9] S L Xie, Z H He, Y L Fu. A note on Stone's conjecture of blind signal separation [J]. Neural Computation, 2005, 17: 321-330.

作者简介:

刘海林 男, 1963 年生于河南安阳市, 博士后, 广东工业大学应用数学学院教授, 广州市工业与应用数学学会副理事长, 广东省"千、百、十"工程培养对象, 主要研究方向: 盲源分离, 进化计算. 已发表学术论文30 多篇.

E-mail: lhl@scnu.edu.cn