

最坏情况下的鲁棒自适应波束形成算法性能分析

林静然, 彭启琮, 邵怀宗, 居太亮

(电子科技大学通信与信息工程学院, 四川成都 610054)

摘 要: 研究了最坏情况下的鲁棒自适应波束形成算法, 它通过对角加载提高波束对方向矢量误差的鲁棒性. 给出了其最优对角加载因子的近似解析表达式, 揭示了各种因素如何影响最优加载因子. 在此基础上, 对该算法进行了性能分析, 推导出了关于目标功率估计和信号干扰噪声比的近似表达式. 计算机仿真验证了本文的分析.

关键词: 鲁棒自适应波束形成算法; 方向矢量误差; 最坏情况; 最优加载因子; 性能分析; 目标功率估计; 信号干扰噪声比

中图分类号: TN911 文献标识码: A 文章编号: 0372-2112 (2006) 12-2161-06

Performance Analysis of the Robust Adaptive Beamforming Based on Worst-Case Performance Optimization

LIN Jing-ran, PENG Qi-cong, SHAO Huai-zong, JU Tai-liang

(School of Communication and Information Engineering, University of Electronics Science and Technology of China, Chengdu, Sichuan 610054, China)

Abstract: The performance of adaptive beamforming degrades dramatically in practice due to steering vector mismatches. As a solution, diagonal loading is usually used to improve its robustness. However, how to select the loading level remains an open problem. In this paper, the robust adaptive beamforming (RABF) which determines the loading level based on worst case performance optimization is investigated and a simple closed form solution to the optimal loading is derived after some approximations, revealing how different factors affect the optimal loading. On the basis of this solution, a performance analysis is carried out, focusing mainly on the source power estimation and signal to interference plus noise ratio (SINR). The corresponding analytical results are presented for performance prediction. Finally, numerical examples demonstrate the correctness of the analysis in this paper.

Key words: robust adaptive beamforming (RABF); steering vector mismatches; worst case performance optimization; optimal loading; performance analysis; source power estimation; signal to interference plus noise ratio (SINR)

1 引言

自适应波束形成是常用的阵列信号增强方法, 广泛应用于雷达、声纳和通信等领域. 但在实际应用中, 由于阵元位置的细微偏差、阵元之间的幅度相位响应也不可能完全相同、以及有限采样效应等因素, 使得实际的方向矢量 (steering vector) 与其理想值之间存在误差, 严重影响了波束的性能^[1, 2].

目前, 人们已经提出了很多算法^[2~14]来解决该问题, 统称为鲁棒自适应波束形成算法 (Robust Adaptive Beamforming, RABF). 其中, 对角加载 (Diagonal Loading) 是最常用的方法之一^[2~11]. 但是, 如何选择对角加载因子仍是一个公开的难题. 最坏情况下的 RABF 算法通过定义方向矢量的不确定集和优化最坏情况下的性能来确定最优对角加载因子^[13~17]. 本文对该算法进行了进一步研究, 得到了其最优加载因子的近似解析表达式, 揭示了各种因素如何影响最优加载因子. 由于最优

加载因子可直接计算, 其运算量低于迭代求解的方法. 在此基础上, 本文还对该算法进行了性能分析, 得到了目标功率估计和信号干扰噪声比 (SINR, 简称信干比) 的解析表达式.

2 最坏情况下的鲁棒自适应波束形成算法

2.1 传统自适应波束形成算法

考虑一个 M 元的阵列. 设空间有 $K+1$ 个互不相关的信源 (一个目标信号和 K 个干扰); 另外, 空间还存在白噪声. 那么, 阵列接收信号的空间相关矩阵可写成:

$$R = \sigma_s^2 a a^H + \sum_{k=1}^K \sigma_{jk}^2 a_{jk} a_{jk}^H + \sigma_n^2 I = \sigma_s^2 a a^H + J \quad (1)$$

其中, a 和 $a_{jk} \in C^{M \times 1}$ 分别表示目标信号和 K 个干扰的方向矢量, $k=1, 2, \dots, K$; σ_s^2 , σ_{jk}^2 和 σ_n^2 分别表示目标信号, K 个干扰和空间白噪声的功率; J 为干扰噪声矩阵; $(\cdot)^H$ 表示复共轭转置.

自适应波束形成算法^[1,2]通常表述为:

$$\min_{\mathbf{w}} \mathbf{w}^H \mathbf{R} \mathbf{w} \quad \text{s.t.} \quad \mathbf{w}^H \mathbf{a} = 1 \quad (2)$$

由于实际的方向矢量和其理想值之间总存在误差,导致波束的性能下降。目前,人们常使用对角加载^[3~7,9]来提高波束的鲁棒性。但是,如何确定最优对角加载因子仍是一个公开的难题。最近提出的最坏情况下的 RABF 算法^[3~7]为解决该问题提供了新思路,受到了广泛关注。

2.2 最坏情况下的鲁棒自适应波束形成算法

最坏情况下的 RABF 算法通过定义方向矢量的不确定集和优化最坏情况下的性能来确定最优对角加载因子。方向矢量不确定集定义为:

$$\mathcal{A}(\varepsilon) \triangleq \{ \mathbf{c} | \mathbf{c} = \tilde{\mathbf{a}} + \mathbf{e}, \|\mathbf{e}\|^2 \leq \varepsilon^2 \} \quad (3)$$

其中, $\tilde{\mathbf{a}}$ 为预设的目标方向矢量, $\mathbf{e}$ 为方向矢量误差, ε 为方向矢量误差模的上限,满足 $\varepsilon^2 < \|\tilde{\mathbf{a}}\|^2$ 。

最坏情况下的 RABF 算法表示为^[3~7]:

$$\min_{\mathbf{w}} \mathbf{w}^H \mathbf{R} \mathbf{w} \quad \text{s.t.} \quad \min_{\mathbf{c} \in \mathcal{A}(\varepsilon)} |\mathbf{w}^H \mathbf{c}| \geq 1 \quad (4)$$

可以证明,式(4)等价于^[4]:

$$\min_{\mathbf{w}} \mathbf{w}^H \mathbf{R} \mathbf{w} \quad \text{s.t.} \quad \mathbf{w}^H \tilde{\mathbf{a}} = (\varepsilon \|\mathbf{w}\| + 1) \quad (5)$$

$$\text{Im}\{\mathbf{w}^H \tilde{\mathbf{a}}\} = 0$$

对应的最优权向量为:

$$\mathbf{w}_{\text{opt}} = \frac{\xi}{\xi^H (\mathbf{R} + \xi \mathbf{J})^{-1} \tilde{\mathbf{a}} - \varepsilon^2} (\mathbf{R} + \xi \mathbf{J})^{-1} \tilde{\mathbf{a}} \quad (6)$$

其中,下标 L 表示对角加载, ξ 为加载因子。在式(6)中,只有加载因子 ξ 是未知的,在下一节中将给出它的一个近似解析表达式。

3 最优对角加载因子

对角加载因子 ξ 可以通过将式(6)代入式(5)的限制条件中得到,即求解

$$(\mathbf{w}_{\text{opt}}^H \tilde{\mathbf{a}} - 1)^2 = \varepsilon^2 \|\mathbf{w}_{\text{opt}}\|^2 \quad (7)$$

注意到式(7)是 ξ 的复杂方程,目前还没有方法直接求解。现有方法^[4~6]大多通过迭代求解,如基于 SOCP(Second Order Cone Program)的方法^[4]和牛顿迭代^[5,9]的方法。但是,迭代的方法运算量较大,收敛较慢,且无法提供更多的关于最优解的信息,如哪些因素可以影响最优解,以及如何影响等等。本文给出了最优加载因子的近似表达式,解决了上述问题。

本节首先证明最优加载因子是唯一的,且符号为正;其次,推导出它的一个近似解;最后,根据求得的近似解对该问题进行讨论。

3.1 解的唯一性

对 $\mathbf{R}$ 进行特征值分解,得

$$\mathbf{R} = \sum_{m=1}^M \eta_m \mathbf{u}_m \mathbf{u}_m^H \quad (8)$$

其中, η_m 为 $\mathbf{R}$ 的特征值, $\mathbf{u}_m \in \mathbb{C}^{M \times 1}$ 为对应的特征向量, $m = 1, 2, \dots, M$ 。由于 $\mathbf{R}$ 几乎总是正定的,不妨设 $\eta_1 > \eta_2 > \dots > \eta_M > 0$ 。化简式(7)得

$$f(\xi) \triangleq \sum_{m=1}^M \frac{\xi^2 |\mathbf{u}_m|^2}{(\xi + \eta_m)^2} = \varepsilon^2 \quad (9)$$

其中, $\theta_m = \mathbf{u}_m^H \tilde{\mathbf{a}}$ 。

同时,如式(5)所示,加载因子还必须满足条件 $\mathbf{w}_{\text{opt}}^H \tilde{\mathbf{a}} > 1$, 其等价于

$$g(\xi) \triangleq \sum_{m=1}^M \frac{\xi |\theta_m|^2}{\xi + \eta_m} > \varepsilon^2 \quad (10)$$

考虑到

$$f(\xi) - g(\xi) = - \sum_{m=1}^M \frac{\xi \eta_m |\theta_m|^2}{(\xi + \eta_m)^2} \quad (11)$$

当 $\xi > 0$ 时, $f(\xi) < g(\xi)$; $\xi < 0$ 时, $f(\xi) > g(\xi)$ 。显然,式(9)的负实根(如果有的话)不满足 $\mathbf{w}_{\text{opt}}^H \tilde{\mathbf{a}} > 1$ 。另一方面, $\xi > 0$ 时, $f'(\xi) > 0$, $f(0) = 0 < \varepsilon^2$ 和 $f(\infty) = \|\tilde{\mathbf{a}}\|^2 > \varepsilon^2$, 故式(9)有唯一正实根 $\xi_0 > 0$, 且 $g(\xi_0) > f(\xi_0) = \varepsilon^2$, 即 ξ_0 满足 $\mathbf{w}_{\text{opt}}^H \tilde{\mathbf{a}} > 1$ 。因此,最优加载因子唯一,且符号为正。

3.2 最优加载因子的近似封闭解

参考式(1),使用矩阵求逆引理

$$(\mathbf{R} + \xi \mathbf{J})^{-1} = (\mathbf{J} + \xi \mathbf{J})^{-1} \left[\mathbf{I} - \frac{\sigma_n^2 \mathbf{a} \mathbf{a}^H (\mathbf{J} + \xi \mathbf{J})^{-1}}{1 + \sigma_n^2 \mathbf{a}^H (\mathbf{J} + \xi \mathbf{J})^{-1} \mathbf{a}} \right] \quad (12)$$

对干扰噪声矩阵 $\mathbf{J}$ 进行特征值分解,得

$$\mathbf{J} = \mathbf{V} \mathbf{\Gamma} \mathbf{V}^H = \mathbf{V}_J \mathbf{\Gamma}_J \mathbf{V}_J^H + \sigma_n^2 \mathbf{V}_n \mathbf{V}_n^H \quad (13)$$

其中, $\mathbf{\Gamma} = \text{diag}(\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_M)$ 是 $\mathbf{J}$ 的特征值矩阵,特征值按降序排列,即 $\gamma_1 > \gamma_2 > \dots > \gamma_K > \gamma_{(K+1)} = \gamma_{(K+2)} = \dots = \gamma_M = \sigma_n^2$; 特征向量矩阵 $\mathbf{V} = [\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_M]$, $\mathbf{v}_m \in \mathbb{C}^{M \times 1}$ 是对应 γ_m 的特征向量, $m = 1, 2, \dots, M$; $\mathbf{\Gamma}_J = \text{diag}(\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_K)$, $\mathbf{V}_J = [\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_K]$, $\mathbf{V}_n = [\mathbf{v}_{(K+1)}, \mathbf{v}_{(K+2)}, \dots, \mathbf{v}_M]$ 。

设干扰位于阵列对目标信号的主瓣之外,即目标方向矢量在 $\mathbf{J}$ 的干扰子空间上的投影很小;进一步假设干扰远强于空间白噪声,即 $\sigma_{Jk}^2 \gg \sigma_n^2$, $k = 1, 2, \dots, K$ 。在上述假设下,对于 $k = 1, 2, \dots, K$ 和 $t = (K+1), (K+2), \dots, M$, 可得^[12]:

$$\frac{|\mathbf{v}_k^H \mathbf{a}|^2}{\gamma_k} \ll \frac{|\mathbf{v}_k^H \mathbf{a}|^2}{\gamma_t}, \quad \frac{|\mathbf{v}_k^H \mathbf{a}|^2}{\gamma_k} \ll \frac{|\mathbf{v}_t^H \mathbf{a}|^2}{\gamma_t} \quad (14)$$

利用式(14),得

$$\mathbf{a}^H (\mathbf{J} + \xi \mathbf{J})^{-1} \mathbf{a} = \sum_{m=1}^M \frac{|\mathbf{v}_m^H \mathbf{a}|^2}{(\gamma_m + \xi)^p} \approx \sum_{m=K+1}^M \frac{|\mathbf{v}_m^H \mathbf{a}|^2}{(\gamma_m + \xi)^p} = \frac{\|\mathbf{a}_n\|^2}{(\sigma_n^2 + \xi)^p} \quad (15)$$

其中, $\mathbf{a}_n = [\mathbf{v}_{(K+1)}, \dots, \mathbf{v}_M]^H \mathbf{a} = \mathbf{V}_n^H \mathbf{a}$, $\|\mathbf{a}_n\|^2 = \mathbf{a}_n^H \mathbf{a}_n$, p 是正整数。同理,

$$\mathbf{a}^H (\mathbf{J} + \xi \mathbf{J})^{-1} \tilde{\mathbf{a}} \approx \frac{\tilde{\mathbf{a}}_n^H \mathbf{a}_n}{(\sigma_n^2 + \xi)^p} \quad (16)$$

其中, $\tilde{\mathbf{a}}_n = [\mathbf{v}_{(K+1)}, \dots, \mathbf{v}_M]^H \tilde{\mathbf{a}} = \mathbf{V}_n^H \tilde{\mathbf{a}}$ 。

将式(12), 式(15)和式(16)代入式(7), 经过简单的推导得

$$\|\tilde{\mathbf{a}}_n\|^2 - 2L \|\mathbf{a}_n\|^2 + L^2 \|\mathbf{a}_n\|^2 = \left(\frac{\xi + \sigma_n^2}{\xi \varepsilon^{-1}} \right)^2 \quad (17)$$

其中, 系数 $L = (\xi + \sigma_n^2 + \sigma_n^2 \|\mathbf{a}_n\|^2)^{-1} \sigma_n^2$, 令 $\mathbf{a}_n = \tilde{\mathbf{a}}_n + \Delta_n$ 。当 ε 很小时, 有 $\|\mathbf{a}_n\|^2 \approx \|\tilde{\mathbf{a}}_n\|^2$, $\|\Delta_n\|^2 \ll \|\mathbf{a}_n\|^2$, $\|\Delta_n\|^2 \ll \|\tilde{\mathbf{a}}_n\|^2$ 。注意到:

$$\begin{aligned} \|\mathbf{a}_n\|^2 &= \tilde{\mathbf{a}}_n^H \mathbf{a}_n \mathbf{a}_n^H \tilde{\mathbf{a}}_n = \tilde{\mathbf{a}}_n^H (\tilde{\mathbf{a}}_n + \Delta_n) \mathbf{a}_n^H (\mathbf{a}_n - \Delta_n) \\ &= \|\tilde{\mathbf{a}}_n\|^2 + \|\mathbf{a}_n\|^2 + \|\mathbf{a}_n\|^2 \tilde{\mathbf{a}}_n^H \Delta_n - \|\tilde{\mathbf{a}}_n\|^2 \mathbf{a}_n^H \Delta_n \end{aligned}$$

$$- \tilde{\mathbf{a}}_n^H \Delta_n \mathbf{a}_n^H \Delta_n \\ \approx \|\tilde{\mathbf{a}}_n\|^2 \|\mathbf{a}_n\|^2 - \|\mathbf{a}_n\|^2 \Delta_n^H \Delta_n - \tilde{\mathbf{a}}_n^H \Delta_n \mathbf{a}_n^H \Delta_n \quad (18)$$

忽略式(18)中 Δ_n 的二次项, 认为

$$|\mathbf{a}_n^H \tilde{\mathbf{a}}_n|^2 \approx \|\tilde{\mathbf{a}}_n\|^2 \|\mathbf{a}_n\|^2 \quad (19)$$

以上近似在实际中是成立的, 因为: 首先, 当 ε 超出一定界限后, 对角加载的方法就无法补偿方向矢量误差带来的性能下降了^[13]; 其次, ε 越大, 加载因子也越大。过大的加载因子将导致波束自适应抑制干扰的能力下降^[2]。因此, 只有在 ε 或方向矢量误差较小的场合, 基于对角加载的 RABF 才能发挥最佳的作用。

在式(17)中代入式(19), 得到一个更简单的结果:

$$\left(\frac{\|\tilde{\mathbf{a}}_n\|}{\xi + \sigma_n^2 + \sigma_s^2 \|\mathbf{a}_n\|^2} \right)^2 = \left(\frac{\varepsilon}{\xi} \right)^2 \quad (20)$$

解式(20)得到关于 ξ 的一正一负两个解, 负解无效, 故最优对角加载因子为

$$\xi_o \approx \frac{\varepsilon(\sigma_n^2 + \sigma_s^2 \|\mathbf{a}_n\|^2)}{\|\tilde{\mathbf{a}}_n\| - \varepsilon} \quad (21)$$

在此基础上, 最坏情况下的 RABF 算法的最优权向量为

$$\mathbf{w}_{oL} = \frac{\xi_o}{\xi_o^H (\mathbf{R} + \xi_o \mathbf{I})^{-1} \tilde{\mathbf{a}} - \varepsilon^2} (\mathbf{R} + \xi_o \mathbf{I})^{-1} \tilde{\mathbf{a}} \quad (22)$$

3.3 讨论

观察式(21), 有如下结论。(1) 最坏情况下的 RABF 的最优加载因子与下列因素有关: 空间白噪声功率 σ_n^2 、目标功率 σ_s^2 、方向矢量误差模上限 ε 以及目标方向矢量在 $\mathbf{J}$ 的噪声子空间上的投影的模 $\|\mathbf{a}_n\|^2$ 和 $\|\tilde{\mathbf{a}}_n\|^2$ 。(2) 方向矢量误差(或 ε)越大, 加载因子也越大。当 ε 趋近 $\|\tilde{\mathbf{a}}_n\|$ 时, ξ_o 趋近无穷大。此时, 该算法变成与数据无关的波束形成算法, 不再具有自适应抑制干扰的能力。当 ε 趋近 0 时, ξ_o 也趋近 0, 此时, 该算法变成标准自适应波束形成算法(Standard Adaptive Beamforming, SABF)。

注意到在实际中, $\|\mathbf{a}_n\|^2$ 未知。但当 ε 较小时, 可用 $\|\tilde{\mathbf{a}}_n\|^2$ 代替 $\|\mathbf{a}_n\|^2$ 。考虑到目标方向矢量在 $\mathbf{J}$ 的干扰子空间上的投影很小, 若方向矢量的误差主要是相位误差, 可进一步认为 $\|\mathbf{a}_n\|^2 \approx \|\tilde{\mathbf{a}}_n\|^2 \approx M$ 。化简式(21)得

$$\xi_o \approx \frac{\varepsilon(\sigma_n^2 + \sigma_s^2 M)}{\sqrt{M} - \varepsilon} \quad (23)$$

由于最优加载因子可直接计算, 其运算量与 SABF 大致相同, 为 $O(M^3)$ flops, 低于迭代求解的方法。例如, 基于 SOCP 的方法每轮迭代都需要 $O(M^3)$ flops^[4]。牛顿迭代的方法, 尽管运算量低于基于 SOCP 的方法, 和本文方法相比, 其迭代过程至少要多消耗 100M flops^[5~7]。

4 性能分析

目标功率估计和信干比(SINR) 常用来评估波束形成算法的性能, 本文对最坏情况下的 RABF 的这两项指标进行分析。实际应用中, 常用 $\mathbf{w}_{oL}^H \mathbf{R} \mathbf{w}_{oL}$ 估计目标功率, 利用式(22)的结果, 有:

$$\sigma_s^2 = \mathbf{w}_{oL}^H \mathbf{R} \mathbf{w}_{oL} = [\tilde{\mathbf{a}}^H (\mathbf{R} + \xi_o \mathbf{I})^{-1} \mathbf{R} (\mathbf{R} + \xi_o \mathbf{I})^{-1} \tilde{\mathbf{a}}]^{-1} \quad (24)$$

代入式(21), 经过简单的推导后, 得到

$$\sigma_s^2 = \frac{(\sigma_n^2 + \sigma_s^2 \|\mathbf{a}_n\|^2)}{(\|\tilde{\mathbf{a}}_n\| - \varepsilon)^2} \quad (25)$$

因为 $(\|\tilde{\mathbf{a}}_n\| - \varepsilon)^2 \approx (\|\mathbf{a}_n\| - \varepsilon)^2 \leq \|\mathbf{a}_n\|^2$, 有 $\sigma_s^2 > \sigma_s^2$, 即最坏情况下的 RABF 对目标功率的估计值高于真实值。若无方向矢量误差($\varepsilon = 0$), 在 $\sigma_s^2 \gg \sigma_n^2$ (高信噪比) 的条件下有 $\sigma_s^2 \approx \sigma_s^2$, 估计较准确。随着方向矢量误差(或 ε) 增大, 目标信号功率的估计偏差将越来越大。

另一个常用的评估波束性能的指标是信号干扰噪声比(SINR), 表示为:

$$\text{SINR} = \frac{\sigma_s^2 |\mathbf{w}_{oL}^H \mathbf{a}|^2}{\mathbf{w}_{oL}^H \mathbf{J} \mathbf{w}_{oL}} \quad (26)$$

应用式(22), 化简式(26)得到

$$\text{SINR} \approx \sigma_n^{-2} \sigma_s^2 \|\mathbf{a}_n\|^2 \quad (27)$$

F Vincent 等^[12] 证明了式(27) 是基于对角加载的 RABF 算法所能达到的最高输出 SINR, 对应的对角加载因子为负, $\xi_m = -(\sigma_n^2 + \sigma_s^2 \|\mathbf{a}_n\|^2)$ 。对比式(21)发现, 尽管二者在符号、量值上存在明显不同, 在方向矢量误差(或 ε) 较小时, 最坏情况下的 RABF 的 SINR 接近对角加载类算法所能达到的最大值。并且, 在 ε 较小时, SINR 保持恒定, 与 ε 无关。

5 计算机仿真

使用四种算法进行仿真: (1) SABF; (2) 固定加载的 RABF, 加载因子高于空间白噪声 10dB; (3) 最坏情况下的 RABF, 加载因子迭代求解; (4) 最坏情况下的 RABF, 加载因子由式(21)给出。

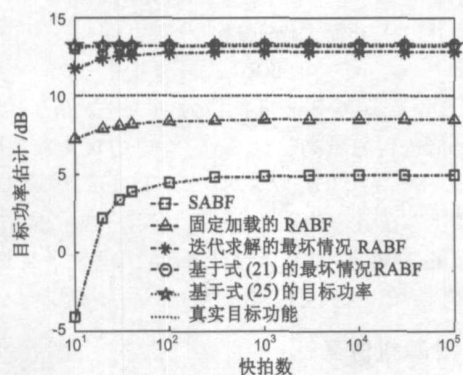
使用一个 $M = 10$ 元的均匀线阵, 阵元间距为二分之一信号波长。空间有三个信源(一个目标信号和两个干扰): 目标的 DOA 为 0° , 两个干扰的 DOA 分别为 -20° 和 40° 。此外, 空间存在 0dB 的白噪声, 即 $\sigma_n^2 = 1$ 。目标功率 $\sigma_s^2 = 10\text{dB}$, 两个干扰的功率分别为 20dB 和 30dB。设方向矢量误差主要由目标 DOA 的估计偏差造成, 估计偏差 $\hat{\theta}$, 相应的 $\varepsilon = 0.9194$ 。

在不同快拍数 N 下算法的性能对比如图 1 所示。图中结果经过 100 次蒙特卡罗(Monte Carlo) 实验平均而得。可以看出, 若目标方向矢量存在误差, SABF 的性能很差, 把目标当作干扰抑制。固定加载的 RABF 的性能有所提高, 具有一定的鲁棒性。但是, 由于设定的 10dB 加载因子不一定是最优的, 所以, 其性能提高并不令人满意。比较而言, 最坏情况下的 RABF 的性能最好, 尤其是在 SINR 方面。进一步观测图 1(a) 和图 1(b), 在最坏情况下的 RABF 算法仿真中, 使用式(21) 的加载因子所得的结果, 和迭代求解的结果几乎吻合, 表明式(21) 非常逼近最优加载因子的真实值。这在图 1(c) 中得到了验证, 迭代求解的加载因子为 15.88dB, 而使用式(21) 的结果为 16.14dB, 相差仅 0.26dB。同时, 迭代求解的方法在 $N > 100$ 以后才具有比较稳定的结果, 而本文的方法收敛更快, 即使在 $N = 10$ 时也能获得稳定解。另外, 式(25) 和式(27) 给出的结果也非常接近算法的实际性能: 当 $N > 1000$ 后, 在目标功率估计方面, 二者的误差为 0.08dB; 在 SINR 方面, 误差为 0.81dB。

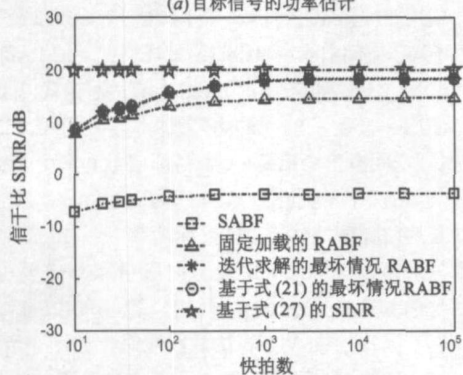
改变目标 DOA 的估计误差, 得到算法在不同的方向矢量

不确定度下的性能对比,如图2所示.其中,方向矢量的不确定度定义为 $Un(\text{dB}) = 20 \times \lg(\|a\|^{-1}\epsilon)$, 快拍数固定在 $N = 1000$. 观察图2可以得到如下结论. 第一, 即使方向矢量不确定度很小(如 -25dB), 和其他三种算法相比, SABF 的性能也很差. 第二, 固定加载的 RABF 在方向矢量不确定度较低时性能较好, 当不确定度超过 -15dB 后, 性能较差. 第三, 当不确定度较大时($-15\text{dB} \sim -2\text{dB}$), 最坏情况下的 RABF 具有更好的性能, 尤其是在 SINR 方面. 第四, 在不同的方向矢量不确定度下, 由式(25)和式(27)给出的结果都能很好的预测算法的实际性能. 需要说明的是, 尽管本文的推导是在方向矢量不确定度较小的假设下进行的, 在此基础上得到的结果, 在不确定度高达 -2dB 时仍然十分准确. 当不确定度超出这一界限后, 最

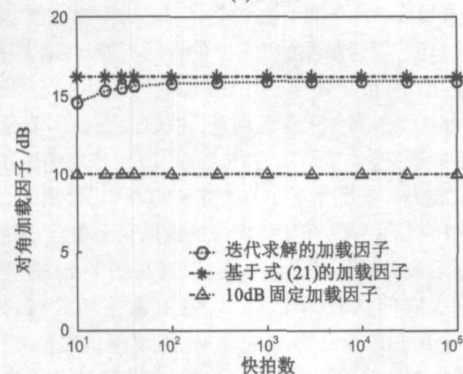
坏情况下的 RABF 的性能急剧下降. 因为此时过大的加载因子使最坏情况下的 RABF 更像一个与数据无关的波束, 失去了自适应抑制干扰的能力. 第五, 最坏情况下的 RABF 对目标功率的估计值大于其真实值, 当不确定度较小时, 估计较准确, 随着不确定度(或 ϵ) 增大, 估计偏差越来越大, 与前面的分析一致. 第六, 在不确定度小于 -2dB 时, 最坏情况下的 RABF 的 SINR 保持恒定, 与 ϵ 无关, 验证了式(27)的分析. 第七, 和图1一样, 迭代求解的最优加载因子和式(21)的结果非常吻合, 如图2(c)所示. 随着不确定度的增加, 最优加载因子也相应增大. 当不确定度为 -2dB 时, ξ_s 约为 10dB , 即此时 10dB 的固定加载是最优的. 反映在图2(a)和图2(b)中, 该点的固定加载的仿真结果和最坏情况下的仿真结果重合.



(a) 目标信号的功率估计



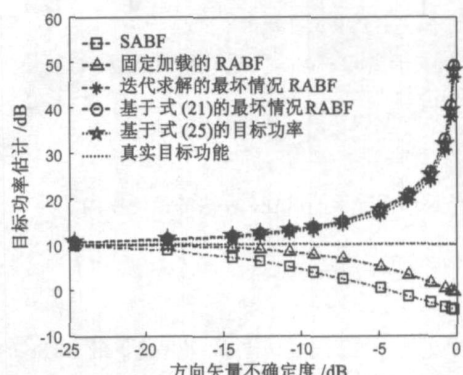
(b) SINR



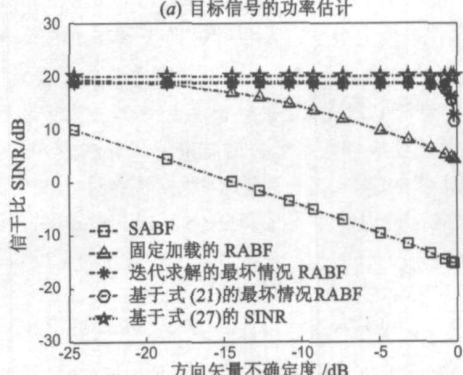
(c) 对角加载因子

图1 不同快拍数 N 时算法的性能比较, 目标的 DOA 误差为 1° , $\epsilon = 0.9194$

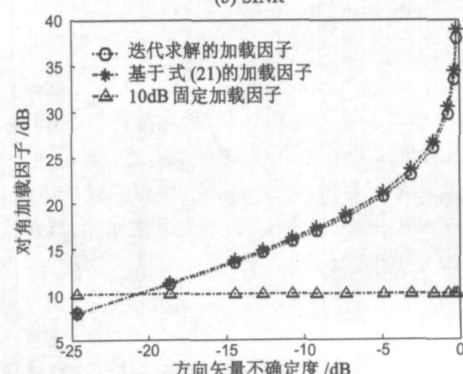
在不同的输入信噪比(SNR)下, 算法的性能对比如图3



(a) 目标信号的功率估计



(b) SINR



(c) 对角加载因子

图2 不同的方向矢量不确定度下的算法的性能比较, 快拍数 $N = 1000$

所示. 输入 SNR 的改变是通过改变目标的 σ_s^2 来实现的, σ_n^2 保

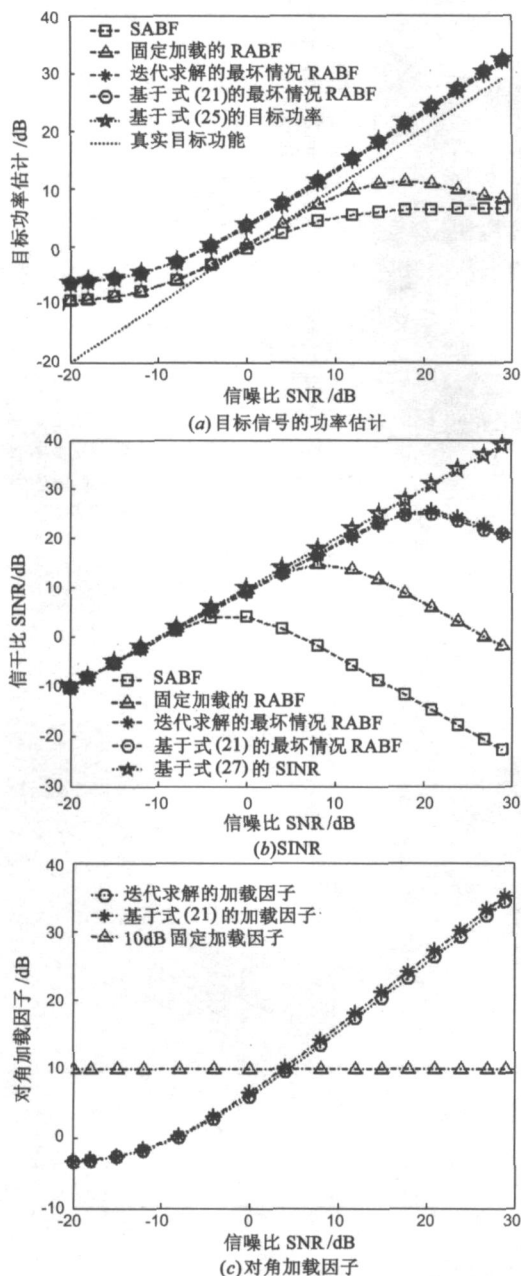


图 3 不同的 SNR 下算法的性能比较, 目标的 DOA 误差为 1° , $\varepsilon = 0.9194$, 快拍数 $N = 1000$

持不变, 快拍数固定为 $N = 1000$, 其它参数和第一个实验相同。和前面一样, 最坏情况下的 RABF 性能最好, 固定加载的 RABF 算法的性能并不稳定, 和 SNR 的值密切相关。图 3(c) 中, 输入 SNR (或 σ_s^2) 增大, 最优加载因子也相应增大, 与式 (21) 一致。同时, 在 SNR 变化范围内, 迭代求解的加载因子和式 (21) 的加载因子非常接近, 表明式 (21) 是最优加载因子的一个准确近似。当输入 SNR 为 4dB 时, $\xi_s \approx 10\text{dB}$, 此时固定加载的性能最好。当输入 SNR 变化时, ξ_s 迅速偏离 10dB, 固定加载的性能急剧下降。另一方面, 最坏情况下的 RABF 在更广泛的 SNR 变化范围内, 具有更优的性能, 体现出更好的鲁棒性, 如图 3(a) 和图 3(b) 所示。同样, 式 (25) 和式 (27) 准确地预测

了算法的性能。在图 3(a) 中, 注意到当 SNR 低于 -15dB 时, 最坏情况下的 RABF 对目标功率的估计值远大于其真实值, 并且大致恒定。这是因为在式 (25) 中, 如果 SNR 非常小, 即 $\sigma_s^2 \ll \sigma_n^2$, 目标信号功率的估计值 $\sigma_s^2 \approx (\|a_n\| - \varepsilon)^{-2} \sigma_n^2$ 与 σ_s^2 无关, 因而大致恒定。

6 结论

研究了最坏情况下的 RABF 算法, 更准确地说, 是研究了它的最优对角加载因子。本文首先证明最优加载因子唯一, 且符号为正。在引入一系列假设后, 推出了最优加载因子的近似封闭解。该封闭解揭示了最优加载因子与空间白噪声功率 σ_n^2 、目标功率 σ_s^2 、方向矢量误差的模上限 ε 以及目标方向矢量在 J 的噪声子空间上的投影的模 $\|a_n\|^2$ 和 $\|\tilde{a}_n\|^2$ 等因素有关。并且, 随着 σ_s^2 或 ε 增大, 最优加载因子也相应增大。在此基础上, 还对最坏情况下的 RABF 进行了性能分析, 得出了目标功率估计和 SINR 的近似封闭表达式。通过性能分析发现, 该算法对目标功率的估计值大于其真实值, 并且, 随着 ε 增大, 估计偏差将越来越大。另一方面, 在方向矢量误差较小时, 该算法的 SINR 非常接近对角加载类算法所能达到的最大值, 且保持恒定。最后, 仿真结果表明本文提供的近似解和实际情况非常吻合, 验证了本文的分析。

参考文献:

- [1] J Capon. High resolution for frequency wavenumber spectrum analysis[J]. Proc IEEE, 1969, 57(8): 1408–1418.
- [2] H L Van Trees. Detection, Estimation and Modulation Theory, Part IV, Optimum Array Processing[M]. New York: Wiley, 2002.
- [3] A B Gershman. Robust adaptive beamforming: an overview of recent trends and advances in the field[A]. International Conference on Antenna Theory and Techniques[C]. Sevastopol: IEEE Press, 2003, 30–35.
- [4] S A Vorobyov, A B Gershman, Z Luo. Robust adaptive beamforming using worst case performance optimization: A solution to the signal mismatch problem[J]. IEEE Trans Signal Processing, 2003, 51(2): 313–324.
- [5] R G Lorenz, S P Boyd. Robust minimum variance beamforming[J]. IEEE Trans Signal Processing, 2005, 53(5): 1684–1696.
- [6] J Li, P Stoica, Z-S Wang. On robust capon beamforming and diagonal loading[J]. IEEE Trans Signal Processing, 2003, 51(7): 1702–1715.
- [7] J Li, P Stoica, Z-S Wang. Doubly constrained robust capon beamformer[J]. IEEE Trans Signal Processing, 2003, 52(9): 2407–2423.
- [8] D D Feldman, L J Griffiths. A projection approach to robust adaptive beamforming[J]. IEEE Trans Signal Processing, 1994, 42(4): 867–876.
- [9] M H Er, A C Antonini. An alternative formulation for an optimum

beamformer with robustness capability[J]. Proc Int Elect Eng F, Commun, Radar, Signal Process, 1987, 132(6): 447- 460.

- [10] Z Tian, K L Bell, H L Van Trees. A recursive least squares implementation for LCMP beamformer under quadratic constraint[J]. IEEE Trans Signal Processing, 2001, 49(6): 1138- 1145.
- [11] B D Carlson. Covariance matrix estimation errors and diagonal loading in adaptive arrays[J]. IEEE Trans Aerospace and Electronic Systems, 1988, 24(4): 397- 401.
- [12] F Vincent, O Besson. Steering vector errors and diagonal loading [J]. IEE Proc - Radio, Sonar Navig, 2004, 151(6): 337- 343.
- [13] O Besson, F Vincent. Performance analysis of beamformers using generalized loading of covariance matrix in the presence of random steering vector errors[J]. IEEE Trans Signal Processing, 2005, 53(2): 452- 459.
- [14] P Stoica, Z - S Wang, J Li. Robust Capon beamforming[J]. IEEE Signal Processing Letters, 2003, 10(6): 172- 175.

作者简介:



林静然 男, 1978 年 11 月出生于四川省广元市. 现为电子科技大学通信与信息工程学院博士研究生, 主要研究方向为现代通信系统中的信号处理、阵列信号处理、自适应信号处理、实时信号处理. E-mail: jingranlin@163.com



彭启琮 男, 1946 年 5 月出生于四川省乐山市, 1968 年毕业于清华大学无线电电子学系. 现为电子科技大学信号与信息处理专业教授、博士生导师, 主要研究方向为现代通信系统中的信号处理、实时信号处理、DSP 技术. E-mail: qpeng@uestc.edu.cn