模糊模态命题逻辑及其广义重言式

汪德刚[1], 谷云东[2], 李洪兴[1]
(1. 北京师范大学数学科学学院, 北京 100875; 2. 华北电力大学(北京)数理学院, 北京 102206)

摘 要: 首先讨论广义泛代数理论, 引入变维运算和广义型的概念, 并进而给出了广义泛代数的定义. 随后, 给出模糊模态命题逻辑的概念, 并定义了模糊模态命题运算. 最后, 以泛代数理论为基础给出 $M\overline{W}$ 系统的定义, 并讨论了相应系统中广义重言式的性质及其分类, 证明了系统 $M\overline{W}$ 只有三种广义重言式.

关键词: 模糊逻辑; 模糊模态命题逻辑; 广义重言式
中图分类号: O159 文献标识码: A 文章编号: 0372-2112(2007)02-0261-04

Generalized Tautology in Fuzzy Modal Propositional Logic

WANG De-gang[1], GU Yun-dong[2], LI Hong-xing[1]
(1. *School of Mathematical Sciences, Beijing Normal University, Beijing 100875, China;*
2. *School of Mathematics and Physics, North China Electric Power University, Beijing 102206, China*)

Abstract: The concepts of dimension-variable operation, generalized type and the generalized universal algebra are defined. Then, the concept of Fuzzy Modal Propositional Logic together with it's operations are proposed. The system of $M\overline{W}$ is introduced by the use of the concept of generalized universal algebra. At last, the properties and the classification of generalized tautologies are discussed. It is proved that there are only three generalized tautologies in system of $M\overline{W}$.

Key words: fuzzy logic; fuzzy modal propositional logic; generalized tautology

1 引言

在逻辑学的发展中, 经典逻辑在公理化, 形式化方面的研究取得了很大的成功. 但在现实世界中大量的事物是不确定的, 利用真值域为{0,1}的经典逻辑处理此类问题会丢失大量有价值的信息[1]. 因此, 学者们从不同角度推广经典逻辑, 建立了各种形式的非经典逻辑理论[2~5]. 例如, 对经典逻辑语义进行扩展的多值逻辑系统, 如多值逻辑, 无穷值逻辑, 模糊逻辑和格值逻辑以及对经典逻辑语构进行扩充的模态逻辑, 时态逻辑和动态逻辑等. 目前, 模糊逻辑等非经典逻辑在人工智能、模糊控制以及专家系统等领域取得了一系列的成功[6~9]. 特别地, 刻画含有"必然"和"可能"这两个模态词的逻辑推理规律的模态逻辑在知识表示及知识推理等领域的研究中有广泛的应用. 因此, 关于模态逻辑的研究越来越引起更多人的重视. 例如, 文[10,11]提出基于Pavelka形式的模糊模态逻辑公理系统 $S_5([0,1]_L)$, 并证明了它的可靠性和完备性. 文献[12]研究了格值逻辑中的模态逻辑问题, 文献[13]对克里普克语义进行了扩充, 给出模糊化的克里普克语义, 并讨论了模糊模态公式的归约问题.

本文首先对泛代数理论进行推广, 提出广义泛代数的定义. 然后, 将模态公式集 $F(S)$ 修改为 $F(S)\times U$, 即 $(A,x)\in F(S)\times U$ 表示在可能世界 x 下的模态公式 A, 进而给出了模糊模态命题逻辑代数的定义. 最后, 证明了系统 $M\overline{W}$ 只有三种广义重言式.

2 广义泛代数

定义 1.1 设 $A\times B$ 是非空集, 则

(1) $A\times B$ 上的0元运算是 $A\times B$ 上的一个元素;

(2) $A\times B$ 上的1元运算是 $A\times B$ 上的自映射 $f:(A\times B)\to A\times B$;

(3) $A\times B$ 上的2元运算是 $A\times B$ 上的2元函数 $f:(A\times B)\times(A\times B)\to A\times B$;

(4) $A\times B$ 上的 n 元运算是 $A\times B$ 上的 n 元函数 $f:(A\times B)^n\to A\times B \quad n\geqslant 1$;

(5) $A\times B$ 上的 $\aleph_0$ 元运算是 $A\times B$ 上的可列元函数 $f:(A\times B)^{\aleph_0}\to A\times B$;

(6) $A\times B$ 上的 c 元运算是 $A\times B$ 上的不可数元广义函数 $f:(A\times B)^c\to A\times B$.

定义 1.2 设 T 是非空集, N 是非负整数集 $ar:T\to N$, 则称 $T=(T,ar)$ 为型, 令 $T_n=\{t\in T\mid ar(t)=n\}$.

定义 1.3 设 T 是型, $A\times B$ 是非空集, 如果对每一个 $t\in T$, 有一个 $ar(t)$ 元函数 $f:(A\times B)^{ar(t)}\to A\times B$, 则称 $A\times B$ 是

收稿日期: 2005-12-26; 修回日期: 2006-06-10
基金项目: 国家973重点基础研究发展规划(No.2002CB312200); 教育部科学技术重点项目(No.03184); 教育部博士点基金(No.20020027013); 国家自然科学基金(No.60474023)

T 型泛代数或 T 代数.

定义 **1.4** 设 $t_{A\times B}$ 是 $A\times B$ 上的运算, $ar: t_{A\times B}\to N$ $\forall(a_1, b_1), (a_2, b_2)\in A\times B$, 若 $ar(t_{(a_1, b_1)})\neq ar(t_{(a_2, b_2)})$, 则称 $t_{A\times B}$ 是 $A\times B$ 上的变维运算. 此时简记 t 为 $A\times B$ 上的变维运算.

定义 **1.5** 设 T_1 是型, $A\times B$ 是 T_1 型泛代数, $T_2=\{t_1, t_2, \cdots\}$ 是非空集, $\forall t_i\in T_2$, t_i 是 $A\times B$ 上的变维运算, 记 $T=T_1\cup T_2$, 称 T 是广义型, 称 $A\times B$ 是 T 型广义泛代数或广义 T 代数.

3 模糊模态命题逻辑的语义理论

定义 **2.1** 设 $S=\{P_1, P_2, \cdots\}$ 是原子公式集, U 是非空有限集合, 称为宇宙, 其成员称为可能世界, 用 x, y, z 表示, 型 $T=\{\neg, \wedge, \vee, \to, \Box, \Diamond\}$, 其中 $\neg$ 是一元运算, $\wedge, \vee, \to$ 是二元运算, $\Box, \Diamond$ 是变维运算, 由 $S\times U$ 生成的广义 T 代数记作 $F(S\times U)$, 由以下形式组成,

(1) $S\times U$ 中的元素都属于 $F(S\times U)$;

(2) 如果 $(A, x), (B, y)$ 都属于 $F(S\times U)$, 则 $\neg(A, x)$, $(A, x)\wedge(B, y)$, $(A, x)\vee(B, y)$, $(A, x)\to(B, y)$, $\Box(A, x)=\bigwedge_{y\in\Delta_x}(A, y)$, $\Diamond(A, x)=\bigvee_{y\in\Delta_x}(A, y)$ 都属于 $F(S\times U)$;

(3) $F(S\times U)$ 不再含有其它元素.

定义 **2.2** 记 L 为赋值格, 设克里普克结构 $\kappa=\langle U, R, \overline{I}_\kappa\rangle$, 其中 U 是非空有限集合, 称为宇宙, 其成员称为可能世界, 用 x, y, z 表示; R 表示 U 上的连续的模糊等价关系; 映射 $\overline{I}_\kappa: S\times U\to L$ 称为克里普克结构 κ 中 $S\times U$ 的 L 赋值. 设 $(p, x)\in S\times U$, $\overline{I}_\kappa(p, x)=a$ 表示在克里普克结构 κ 中可能世界 x 下对 p 的赋值为 a, 全体克里普克结构组成的类记为 K.

$F(S\times U)$ 是由 $S\times U$ 生成的广义 T 代数, $\overline{I}_\kappa$ 可以唯一的扩张成映射 $\overline{v}_\kappa: F(S\times U)\to L$, 其中 $\overline{v}_\kappa$ 表示在克里普克结构 κ 中对 $F(S\times U)$ 的赋值, $\overline{v}_\kappa$ 在可能世界 x 对各个原子命题的赋值等于 $\overline{I}_\kappa$ 在可能世界 x 下对原子命题的赋值.

定义 **2.3** 在 L 中规定 $\neg, \wedge, \vee, \to, \Box, \Diamond$ 运算如下: $\forall p(x), q(y)\in L$, $\neg p(x)=1-p(x)$, $p(x)\vee q(y)=\max\{p(x), q(y)\}$, $p(x)\wedge q(y)=\min\{p(x), q(y)\}$, $p(x)\to q(x)=\begin{cases}1, & p(x)\leqslant q(x);\\ \neg p(x)\vee q(x), & p(x)>q(x).\end{cases}$, $\Box p(x)=\bigwedge_{y\in\Delta_x}p(y)$, $\Diamond p(x)=\bigvee_{y\in\Delta_x}p(y)$,

其中等号左边的 $\to$ 为 L 上的 R_0[4] 蕴涵算子, 则 L 是一个 $\{\neg, \wedge, \vee, \to, \Box, \Diamond\}$ 型广义泛代数.

注 1: $\overline{v}_\kappa: F(S\times U)\to L$ 是克里普克结构 κ 中的 T_κ 同态. 若 $\forall\kappa\in K$, $\overline{v}_\kappa$ 是 T_κ 同态, 则称 $\overline{v}: F(S\times U)\to L$ 是 T 同态, $\overline{v}_\kappa$ 看作是 $\overline{v}$ 在 κ 下的限制.

注 2: 在模态逻辑中必然算子 $\Box$ 和可能算子 $\Diamond$ 比较特殊, 它们依赖于给定的可能世界及与这个可能世界有关系的可能世界的全体. 在模糊模态逻辑中 $ar(\Box)=ar(\Diamond)=|\Delta_x|$, 其中 $\Delta_x=\{y\mid R(x, y)>0\}$. 在不同的克里普克结构下的不同的可能世界 x 中 $|\Delta_x|$ 未必相等. 由此可以看出 $\Box$, $\Diamond$ 算子确实是一个变维运算. 这也反映了模态逻辑的特点, 即运算与克里普克结构和可能世界有关. 随着克里普克结构及可能世界的不同, 它的型是不同的. 因此, 在建立逻辑代数时要能够体现 $\Box$ 和 $\Diamond$ 的这一性质, 这正是我们提出变维运算和广义泛代数理论的实际背景.

注 3: 当在具体的克里普克结构中的具体的可能世界下讨论时, 不妨设 $\kappa_0\in K$, $x_0\in U$, 此时的 $\Box_{\kappa_0, x_0}$, $\Diamond_{\kappa_0, x_0}$ 的型是确定的. 这里用 $\Box_{\kappa_0, x_0}$, $\Diamond_{\kappa_0, x_0}$ 表示在克里普克结构 κ_0 中可能世界 x_0 下的必然算子和可能算子. 但是在不引起混淆的情况下我们将不同克里普克结构中任意可能世界下的必然算子和可能算子都用 $\Box$, $\Diamond$ 表示.

由于模态逻辑的研究是以某个可能世界 x 作为参照可能世界来研究的, 其公式集只是 $F(S\times U)$ 的一个子集 $F(S)\times U$, 递归定义如下:

(1) $S\times U$ 中的元素都属于 $F(S)\times U$;

(2) 如果 $(A, x), (B, x)$ 都属于 $F(S)\times U$, 则 $\neg(A, x)$, $(A, x)\wedge(B, x)$, $(A, x)\vee(B, x)$, $(A, x)\to(B, x)$, $\Box(A, x)=\bigwedge_{y\in\Delta_x}(A, y)$, $\Diamond(A, x)=\bigvee_{y\in\Delta_x}(A, y)$ 都属于 $F(S)\times U$;

(3) $F(S)\times U$ 不再含有其它元素.

其中 $\neg(A, x)=(\neg A, x)$, $(A, x)\wedge(B, x)=(A\wedge B, x)$, $(A, x)\vee(B, x)=(A\vee B, x)$, $(A, x)\to(B, x)=(A\to B, x)$, $\Box(A, x)=\bigwedge_{y\in\Delta_x}(A, y)$, $\Diamond(A, x)=\bigvee_{y\in\Delta_x}(A, y)$

在约定参照可能世界为 x 的情况下, 将 (A, x) 简记为公式 A, 同时使用 $A\in F(S)$ 的习惯用法, 则 $F(S)\times U$ 可简记为 $F(S)$, $F(S)$ 由下列形式的元素组成:

(1) S 中的元素都属于 $F(S)$;

(2) 如果 A, B 都属于 $F(S)$, 则 $\neg A$, $A\wedge B$, $A\vee B$, $A\to B$, $\Box A$, $\Diamond A$ 都属于 $F(S)$;

(3) $F(S)$ 不再含有其它元素.

赋值 $v_\kappa: F(S)\times U\to L$ 可视为 $\overline{v}_\kappa$ 在 $F(S\times U)$ 上的限制, 同时将 $v_\kappa(A, x)=a$ 简记为 $A(x)=a$. 显然 v_κ 也是 T_κ 型同态.

定义 **2.4**[13] 设 S 是原子命题集, $F(S)$ 为由 S 生成的模糊模态公式的全体, $\overline{I}_\kappa$ 在 $F(S)$ 上的扩张, 即语义结构 $\kappa=\langle U, R, \overline{I}_\kappa\rangle$ 对命题公式的赋值定义如下:

$(\neg A)(x)=1-A(x)$, $(A\cap B)(x)=A(x)\wedge B(x)$, $(A\cup B)(x)=A(x)\vee B(x)$, $(A\to B)(x)=A(x)\to B(x)$, $(\Box A)(x)=\bigwedge_{y\in\Delta_x}A(y)$, $(\Diamond A)(x)=\bigvee_{y\in\Delta_x}A(y)$, 其中 $x, y\in U$, $A, B\in F(S)$, $\Delta_x=\{y\mid R(x, y)>0, y\in U\}$, 等号右边的 $\to$ 为 $[0, 1]$ 上的 R_0 蕴涵算子.

定义 **2.5**[13] 设 $A\in F(S)$, $\alpha\in L$, 若 $\forall\kappa\in K$, $\forall x\in U$, 均有 $A(x)\geqslant\alpha$, 则称 A 为 L 中的 α-重言式, 特别地, 当 $\alpha=1$ 时记为 $\vDash A$, 称 A 为 L 中的永真式.

定义 **2.6** 设 $A\in F(S)$, $\alpha\in L$, 若 $\forall\kappa\in K$, $\forall x\in U$, 均有 $A(x)>\alpha$, 则称 A 为 L 中的 α^+-重言式.

4 系统 $M\overline{W}$ 中的广义重言式

设赋值格 $L=[0, 1]$, 在 L 中采用与定义 2.3 相同的 $\neg$,

$\wedge, \vee, \rightarrow, \Box, \Diamond$运算, 可得到一个赋值格上的代数系统, 记为 $M\overline{W}$. 显然, $M\overline{W}$ 也是$\{\neg, \wedge, \vee, \rightarrow, \Box, \Diamond\}$型代数.

引理 3.1　设 $\varphi: ML_{2n+1} \rightarrow ML_3$, φ 在克里普克结构 κ 下的限制为 $\varphi_\kappa: ML_{2n+1} \rightarrow ML_3$,

$$\varphi_\kappa(p(x)) = \begin{cases} 1, & p(x) > \frac{1}{2}, \\ \frac{1}{2}, & p(x) = \frac{1}{2}, \\ 0, & p(x) < \frac{1}{2}, \end{cases}$$

则是$\{\neg, \wedge, \vee, \rightarrow, \Box, \Diamond\}$ 型同态.

证明: 与文[4]类似, 可证 $\forall \kappa \in K$, φ_κ 是保$\neg, \wedge, \vee, \rightarrow$ 运算. 下面证 φ_κ 保$\Box$, $\Diamond$运算. 因为$\Box(p(x)) > \frac{1}{2} \Leftrightarrow p(y) > \frac{1}{2}$, $\forall y \in \Delta_x$; $\Box(p(x)) = \frac{1}{2} \Leftrightarrow p(y) \geqslant \frac{1}{2}$, $\forall y \in \Delta_x$, 且存在 $y_0 \in \Delta_x$ 使$p(y_0) = \frac{1}{2}$; $\Box(p(x)) < \frac{1}{2} \Leftrightarrow \exists\, y \in \Delta_x, p(y) < \frac{1}{2}$, 所以我们有

$$\varphi_\kappa(\Box(p(x))) = \begin{cases} 1, p(y) > \frac{1}{2}, \forall y \in \Delta_x; \\ \frac{1}{2}, p(y) \geqslant \frac{1}{2}, \forall y \in \Delta_x, \text{且存在 } y_0 \in \Delta_x \text{ 使} p(y_0) = \frac{1}{2}; \\ 0, \exists\, y \in \Delta_x, p(y) < \frac{1}{2}. \end{cases}$$

$$\Box\varphi_\kappa(p(x)) = \bigwedge_{y \in \Delta_x} \varphi_\kappa(p(y)) = \begin{cases} 1, p(y) \geqslant \frac{1}{2}, \forall y \in \Delta_x; \\ \frac{1}{2}, p(y) \geqslant \frac{1}{2}, \forall y \in \Delta_x, \text{且存在 } y_0 \in \Delta_x \text{ 使} p(y_0) = \frac{1}{2}; \\ 0, \exists\, y \in \Delta_x, p(y) < \frac{1}{2}. \end{cases}$$

因此, $\Box\varphi_\kappa(p(x)) = \varphi_\kappa(\Box p(x))$, 即 φ_κ 保$\Box$运算. 由$\Diamond(p(x)) = \neg\Box\neg p(x)$, 同时 φ_κ 保$\Box$和$\neg$运算, 所以 $\varphi_\kappa(\Diamond(p(x))) = \varphi_\kappa(\neg\Box\neg p(x)) = (\neg\Box\neg)\varphi_\kappa(p(x)) = \Diamond\varphi_\kappa(p(x))$, 即 φ_κ保$\Diamond$运算. 综上所述 φ_κ 是$\{\neg, \wedge, \vee, \rightarrow, \Box, \Diamond\}$型同态, 由 κ 的任意性知 $\varphi: ML_{2n+1} \rightarrow ML_3$ 是同态映射.

设 $V_\alpha = [1-\alpha, \alpha]$, $E_\alpha = \{0\} \cup (1-\alpha, \alpha) \cup \{1\}$ 关于运算$\neg, \wedge, \vee, \rightarrow, \Box, \Diamond$与定义 2.3 相同, 则 V_α, E_α 都是$\{\neg, \wedge, \vee, \rightarrow, \Box, \Diamond\}$ 型代数.

引理 3.2　设 $g: \overline{W} \rightarrow V_\alpha$, $h: V_\alpha \rightarrow E_\alpha$, $g_\kappa(p(x)) = (2\alpha-1)p(x) + (1-\alpha)$,

$$h_\kappa(r(x)) = \begin{cases} r(x), & r(x) \in (1-\alpha, \alpha); \\ 1, & r(x) = \alpha; \\ 0, & r(x) = 1-\alpha. \end{cases}$$

则 g, h 分别是$\{\neg, \wedge, \vee, \rightarrow, \Box, \Diamond\}$ 型同构, 其中 $0 \leqslant p(x) \leqslant 1$, g_κ 和 h_κ 分别为g 和h 在克里普克结构 κ 中的限制.

证明: 对任意 $\kappa \in K$, 文[4] 已证明 g_κ, h_κ 保$\neg, \wedge, \vee, \rightarrow$ 运算且是双射, 所以只须证 g_κ, h_κ 保$\Box$, $\Diamond$运算. 事实上,

$$\begin{aligned} g_\kappa(\Box p(x)) &= (2\alpha-1)\Box p(x) + (1-\alpha) \\ &= (2\alpha-1)\bigwedge_{y \in \Delta_x} p(y) + (1-\alpha) \\ &= \bigwedge_{y \in \Delta_x}((2\alpha-1)p(y) + (1-\alpha)) \\ &= \bigwedge_{y \in \Delta_x} g_\kappa(p(y)) = \Box g_\kappa(p(x)). \end{aligned}$$

同理可证 g_κ 保$\Diamond$运算. 再证 h_κ 保$\Box$, $\Diamond$运算. 由$\Box p(x) \in (1-\alpha, \alpha) \Leftrightarrow \bigwedge_{y \in \Delta_x} p(y) \in (1-\alpha, \alpha)$, $\Box p(x) = \alpha \Leftrightarrow \bigwedge_{y \in \Delta_x} p(y) = \alpha$ 和 $\Box p(x) = 1-\alpha \Leftrightarrow \bigwedge_{y \in \Delta_x} p(y) = 1-\alpha$ 可得

$$h_\kappa(\Box p(x)) = \begin{cases} \bigwedge_{y \in \Delta_x} p(y), & \bigwedge_{y \in \Delta_x} p(y) \in (1-\alpha, \alpha); \\ 1, & \bigwedge_{y \in \Delta_x} p(y) = \alpha; \\ 0, & \bigwedge_{y \in \Delta_x} p(y) = 1-\alpha. \end{cases}$$

$$\Box(h_\kappa(p(x))) = \bigwedge_{y \in \Delta_x}(h_\kappa(p(y))) = \begin{cases} \bigwedge_{y \in \Delta_x} p(y), & \bigwedge_{y \in \Delta_x} p(y) \in (1-\alpha, \alpha); \\ 1, & \bigwedge_{y \in \Delta_x} p(y) = \alpha; \\ 0, & \bigwedge_{y \in \Delta_x} p(y) = 1-\alpha. \end{cases}$$

所以 $h_\kappa(\Box p(x)) = \Box(h_\kappa(p(x)))$, 即 h_κ 保$\Box$运算. 同理可证 h_κ 保$\Diamond$运算, 则 h_κ, g_κ 是$\{\neg, \wedge, \vee, \rightarrow, \Box, \Diamond\}_\kappa$ 型同构, 由 κ 的任意性知, h, g 是$\{\neg, \wedge, \vee, \rightarrow, \Box, \Diamond\}$型同构.

由引理 3.1 和引理 3.2 的结论, 类似文[4] 证法, 可得到如下关于模糊模态命题逻辑广义重言式的几个定理, 证略.

定理 3.3　设$(A, x) \in F(S) \times U$, $0 < \alpha \leqslant \frac{1}{2}$, 则 A 是 $M\overline{W}$ 中的α-重言式当且仅当A 是 $M\overline{W}$ 中的$\frac{1}{2}$-重言式.

定理 3.4　设$(A, x) \in F(S) \times U$, $\frac{1}{2} < \alpha \leqslant 1$, 则 A 是 $M\overline{W}$ 中的α-重言式当且仅当A 是 $M\overline{W}$ 中的重言式.

定理 3.5　关于 $M\overline{W}$ 而言, $F(S) \times U$ 只有三种不同的广义重言式, 即$\frac{1}{2}$-重言式, $\frac{1}{2}^+$-重言式与重言式.

定理 3.3—定理 3.5 与文[4] 结果是相同的, 但是将模糊逻辑的广义重言式理论推广到更为复杂的模糊模态逻辑中时, 必须要将命题逻辑代数进行扩充, 即建立一种与克里普克结构相适应的逻辑代数系统, 注 2 恰好说明了这种系统更加能够反映模态逻辑的特点, 因此这种推广是有意义的.

5　结束语

本文利用广义泛代数为理论基础将王国俊教授关于模糊逻辑广义重言式理论推广到了模糊模态逻辑中, 同时表明需要将命题逻辑代数进行适当的扩充才能将文[4] 中模糊命题逻辑的有关结果推广到更为复杂的模糊模态命题逻辑系统. 进一步可仿照文[14, 15]研究模糊模态逻辑的归结问题、数值分析及其在知识表示中的应用等问题.

参考文献:

[1] 汪培庄, 李洪兴. 模糊系统理论与模糊计算机[M]. 北京: 科学出版社, 1996.

[2] J Pavelka. On fuzzy logic(Ⅰ - Ⅲ) . Many-valued rules of inference[J] . Zeitschr f Math Logik und Grundlagen D Math, 1979, 25(1, 2, 5) : 45- 52, 119- 134, 447- 464.

[3] 徐扬, 秦克云. 模糊格蕴涵代数[J] . 西南交通大学学报, 1995, 30(2) : 1- 7.
Xu Yang, Qing Ke-yun. Fuzzy lattice implication algebras[J] . Journal of Southwest Jiaotong University, 1995, 30(2) : 1- 7. (in Chinese)

[4] 王国俊. 非经典数理逻辑与近似推理[M] . 北京: 科学出版社, 2000.

[5] 陈图云, 张宇卓, 廖士中. 区间值模糊命题逻辑的最大子代数及其广义重言式[J] . 模糊系统与数学, 2003, 17(2) : 106- 108.
Chen Tu-yun, Zhang Yu-zhuo , LIAO Shi-zhong. The largest subalgebra and its generalized tautology in interval valued fuzzy propositional logic[J] . Fuzzy Systems and Mathematics, 2003, 17(2) : 106- 108. (in Chinese)

[6] Hong-Xing Li, Zhi-Hong Miao, Jia-Yin Wang. Variable universe adaptive fuzzy control on the quadruple inverted pendulum[J] . Science in China(Series E) , 2002, 45(2) : 213- 224.

[7] 尤飞, 苗志宏, 李洪兴. 三值模糊逻辑函数实现静险态的检测[J] . 模糊系统与数学, 2004, 18(3) : 91- 94.
You Fei, Miao Zhihong, Li Hongxing The Examination of Stat - perilous-state by Using 3-valued Logic[J] . Fuzzy Systems and Mathematics, 2004, 18(3) : 91- 94. (in Chinese)

[8] Hong-Xing Li, You Fei, Peng Jia-yin. Fuzzy controllers based on some fuzzy implication operators and their response functions[J] . Progress in Nature Science, 2004, 14(1) : 15- 20.

[9] 汪培庄, 李洪兴. 知识表示的数学理论[M] . 天津: 天津科技出版社, 1994.

[10] Hájek P. Metamathematics of Fuzzy Logic[M] . Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 1998.

[11] Esteva F, Garcia P, Lluis Godo, Rodriguez R. A modal account of similarity-based reasoning[J] . International Journal of Approximate Reasoning. 1997, 16(3) : 235- 260.

[12] Wenjiang Li, Yang Xu. On semantics of L-valued modal propositional logic LMP(X) [J] . The Journal of Fuzzy Mathematics, 2002, 10(4) : 939- 947.

[13] 陈图云, 汪德刚. 模糊模态命题逻辑的语义[J] . 辽宁师范大学学报(自然科学版) , 2003, 26(4) : 341- 343.
Chen Tuyun, Wang Degang. The semantic of fuzzy modal propositional logic[J] . Journal of Liaoning Normal University (Natural Science Edition) , 2003, 26(4) : 341- 343. (in Chinese)

[14] Hong-Xing Li, E S Lee. Interpolation representations of fuzzy logic systems[J] . Computers & Mathematics with Applications, 2003, 45(10- 11) : 1683- 1693.

[15] VC Yen, Hong-Xing Li. Concept representation, factor space theory and information systems research[J] . Systems Research and Behavioral Science, 2000, 17(2) : 163- 172.

作者简介:

汪德刚 男, 1979 年生于辽宁大连, 现为京师范大学数学科学学院博士研究生, 主要研究方向为模糊逻辑、模糊系统和人工智能.
E-mail: wdg0621@ sina. com

谷云东 男, 1976 年生于山东聊城, 现为北京师范大学管理学院博士后, 主要研究方向为模糊系统、数据挖掘、智能控制、知识表示、综合决策和人工智能.

李洪兴 男, 1953 年生于天津, 博士, 现为北京师范大学数学科学学院教授, 博士生导师, 主要研究方向为模糊系统、智能控制、知识表示、综合决策和人工智能.