

正弦波频率估计的牛顿迭代方法初始值研究

邓振淼, 刘渝

(南京航空航天大学信息科学与技术学院, 江苏南京 210016)

摘要: 本文分析了 Rife 算法的性能, 指出当信号频率位于量化频率点附近时它的精度降低, 以它为初始值进行牛顿迭代会导致不收敛. 针对此问题, 本文提出了一种修正 Rife (MRife) 算法, 通过对信号进行频移, 使新信号的频率位于两个相邻量化频率点的中心区域, 然后再利用 Rife 算法进行频率估计. 仿真结果表明修正 Rife 算法性能不随被估计信号的频率分布而产生波动, 以它为初始值进行一次迭代得到的频率估计值的方差在整个频段都接近克拉美-罗限, 具有稳定的性能.

关键词: 频率估计; 迭代; 最大似然; 克拉美-罗限

中图分类号: TN911.6 **文献标识码:** A **文章编号:** 0372-2112 (2007) 01-0104-04

The Starting Point Problem of Sinusoid Frequency Estimation Based on Newton's Method

DENG Zhen-miao, LIU Yu

(College of Information Science and Technology, Nanjing University of Aeronautics & Astronautics, Nanjing, Jiangsu 210016, China)

Abstract: In this paper we analysis the performance of Rife algorithm and point out when the true frequency is much close to quantized frequency of DFT (discrete Fourier transform) Newton's iteration will be disconvergent because of decreasing of Rife algorithm's precision. In order to solve the problem we present a modified Rife (MRife) algorithm by moving the signal frequency to the midpoint of two neighboring discrete frequencies and then estimate the frequency using the Rife algorithm. The simulation results show that the performance of MRife does not fluctuate with the distribution of signal frequency. The RMSE (root mean square error) of one iteration of Newton's method whose initialization is MRife is close to CRLB (Cramer-Rao Lower Bound) throughout the frequency band and the performance is steady.

Key words: frequency estimation; iteration; maximum likelihood; Cramer-Rao Lower Bound (CRLB)

1 引言

对淹没在噪声中的正弦波信号进行频率估计是信号处理的一个经典课题, 在雷达和通信等领域有广泛应用. 关于正弦波频率估计的文章很多. 文献[1]给出在高斯白噪声中对正弦波信号进行频率估计的最大似然估计 (ML) 算法, 该算法估计误差达到克拉美-罗限 (CRLB), 因此是最优估计. 但是 ML 算法需要进行一维搜索, 计算量太大, 无法进行实时处理. 文献[2, 3]利用信号频谱的最大两根谱线进行插值对频率进行估计. 文献[4]对噪声背景中的插值 FFT 方法估计正弦波频率的精度进行研究, 指出当信号真实频率与 DFT 量化频率差为某一范围时 Rife 算法精度不高. 文献[5]提出了基于 DFT 相位的正弦波频率和初相估计方法. 文献[6]利用牛顿迭代方法实现正弦波频率最大似然估计, 但计算量较大. 文献[7]利用半牛顿迭代方法 (Semi-Newton) 给出一个近似最大似然估计算法, 性能接近 CRLB, 计算量也较小, 获得广泛应用. 但该迭代算法

的收敛性与初始值选取有关. 作者以 Rife 估计作为初始值, 由于当信号真实频率较接近量化频率时 Rife 算法估计的偏差较大, 导致牛顿迭代算法存在不收敛情况. 本文分析了 Rife 算法的特点, 并以它为基础, 通过频谱的搬移, 对 Rife 算法进行修正, 得到修正 Rife (MRife) 算法, 然后以 MRife 算法得到的频率估计值作为初始值进行一次牛顿迭代. 仿真结果表明本算法性能稳定, 在整个频段上性能均接近 CRLB, 总体性能优于牛顿迭代法.

2 牛顿迭代算法的初始值问题

加性高斯白噪声污染的正弦波信号表示为:

$$x(n) = A \exp[j(2\pi f_c n + \theta_0)] + w(n), \quad n=0, 1, \dots, N-1 \quad (1)$$

其中 A 、 f_c 、 θ_0 分别为振幅、频率和初相, t 为采样间隔, N 为样本数. $w(t)$ 是实部和虚部相互独立的、方差为 $2\sigma^2$ 的零均值复高斯白噪声.

文献[1]给出了正弦波频率估计的最大似然估计算法

$$f_c = \max_f \left| \sum_{n=0}^{N-1} x_n \exp(-j2\pi n f) \right| \quad (2)$$

最大似然估计算法需要在整个频段作搜索,计算量太大,无法实时处理.文献[7]利用牛顿迭代算法给出一个准最大似然估计算法,在初始值选得比较合理的情况下,利用较少的迭代次数就可以得到比较好的性能,其迭代公式为:

$$\hat{f} = f - F(f)/F'(f) \quad (3)$$

其中 $F(f) = \left| \sum_{n=0}^{N-1} x_n \exp(-j2\pi n f) \right|$, f 是迭代的初始值,通常是用 Rife 算法[2]得到的估计值作为初始值.对 $x(n)$ 作 FFT,取其中的最大谱线值 $|X(k_0)|$.文献[2]给出利用两根谱线进行正弦波频率估计的计算公式(即 Rife 算法):

$$f_c = \frac{1}{T} \left[k_0 + r \frac{|X(k_0+r)|}{|X(k_0)| + |X(k_0+r)|} \right] \quad (4)$$

其中当 $|X(k_0+1)| > |X(k_0-1)|$ 时 $r = -1$, 当 $|X(k_0+1)| < |X(k_0-1)|$ 时 $r = 1$, $T = N \cdot t$.

表 2,3 给出了以 Rife 算法为初始值分别进行一次、两次和五次牛顿迭代的性能,仿真次数为 1000 次.从表中可以看出,当 Rife 算法估计的频率偏差较大时牛顿迭代将会不收敛,增加迭代次数也不能提高估计精度.如果牛顿迭代的初始值偏差较小,不收敛问题可以得到解决.为此我们提出了 MRife 算法,以它作为初始值进行牛顿迭代可以明显改善性能.

3 修正 Rife 算法(MRife)

计算机模拟的结果表明:在适度的信噪比条件下,当 f_c 位于两个离散频率的中心区域时,由式(4)定义的 f_c 性能是很好的,频率估计的误差远小于 DFT 算法;反之,当信噪比较低而且 f_c 十分接近 k_0/N 时,估计的误差将可能大于 DFT 算法. Rife 算法的这一特点也可以这样分析:如果 f_c 很接近两相邻离散频率的中点 $(k_0 + r/2) f_s/N$ (f_s 为采样频率),则 $|X(k_0+r)|$ 的幅度与 $|X(k_0)|$ 很接近,这时采用内插公式具有较高的精度.反之若 f_c 很接近于 $f_s k_0/N$, $|X(k_0+r)|$ 很小,在有噪声存在的情况下,噪声对 $|X(k_0+r)|$ 的影响比较大,这将导致估计误差较大.

利用当 f_c 位于两个离散采样频率的中心区域时 Rife 算法性能很好的特点,本文定义 $(k+1/3, k+2/3)$ 为离散频率点 k 与 $k+1$ 之间的中心区域. MRife 算法的基本思想是:先用式(4)进行频率估计得 f_c , 然后判断 f_c 是否位于两相邻量化频率点中心区域;如果是,则将 f_c 作为最后的频率估计值;否则对原信号进行适当的频移,使新信号的频率位于两个相邻离散频率点的中心区域,再用式(4)进行频率估计,这样就可以保证较高的估计精度.具体算法如下:

假设 $x(n)$ 经过 FFT 以后的频谱为 $X(k)$, 即

$$X(k) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n) \exp(-j2\pi nk/N), k=0,1,2, \dots, N-1 \quad (5)$$

求得最大谱线位置 k_0 , 根据式(4)得到 f_c 的估计值 f_c . 由于 $|X(k_0)| > |X(k_0+r)|$, f_c 满足 $|f_c - f_s k_0/N| < f/2$ (式中 f 为 DFT 量化频率间隔). 如果满足

$$f/3 < |f_c - f_s k_0/N| < f/2 \quad (6)$$

则认为 f_c 位于量化频率中心区域,作为最终估计值.反之,需要进行修正.

估计值 f_c 除可能满足式(6)外,可能还有两种情况:

$$(a) 0 < f_c - f_s k_0/N < f/3$$

$$(b) 0 < f_s k_0/N - f_c < f/3$$

为了使被估计信号频率尽量接近量化频率中点,将信号 $x(n)$ 向左或向右频移 k 量化频率单位, k 可以按下式确定:

$$k = \frac{1}{2} - \frac{|X(k_0+r)|}{|X(k_0)| + |X(k_0+r)|} \quad (7)$$

平移之后的信号为

$$x_1(n) = x(n) \exp(j2\pi nr_k/N) \quad (8)$$

频谱为 $X_1(k) = \sum_{n=0}^{N-1} x_1(n) \exp[-j2\pi n(k-r_k)/N] \quad (9)$

其中 $k=0,1,2, \dots, N-1$, 当 $|X_{k_0+1}| > |X_{k_0-1}|$ 时 $r=1$, 对应于(a), 谱线右移;反之对应于(b), $r=-1$, 谱线左移.

下面我们以 $r=1$ 为例来说明.假设 f_c 的位置如图 1 所示.平移后的信号 $x_1(n)$ 的频率位于两相邻量化频率中点附近.利用 Rife 算法求得 $x_1(n)$ 的频率估计值 f_{c1} , 将 f_{c1} 减去 $k f$ 就可以得到原信号的比较精确的频率估计值.

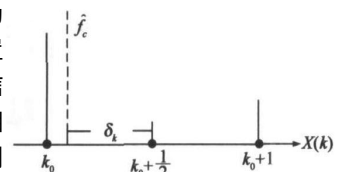


图 1 谱线示意图

下面我们以 $r=1$ 为例来说明.假设 f_c 的位置如图 1 所示.平移后的信号 $x_1(n)$ 的频率位于两相邻量化频率中点附近.利用 Rife 算法求得 $x_1(n)$ 的频率估计值 f_{c1} , 将 f_{c1} 减去 $k f$ 就可以得到原信号的比较精确的频率估计值.

Rife 算法仅利用 $x_1(n)$ 的最大两根谱线值.将原始信号的频谱平移 $k f$ 后,当 $r=1$ 时 $X_1(k)$ 的最大两根谱线一定位于 k_0 和 (k_0+1) 处,而当 $r=-1$ 时,最大两根谱线一定位于 (k_0-1) 和 k_0 处.于是仅需计算出相应的两根谱线,作简单的判断就可以确定 $X_1(k)$ 的最大值.最后再用式(4)估计频率.因此不需要对 $x_1(n)$ 作 FFT, 仅需计算 k_0 和 (k_0+r) 两点的 DFT 即可.

式(8)中的频移因子 k 是一个不确定的值,与初始估计值 f_c 有关.因此上述方法需要计算复指数 $\exp(j2\pi n k/N)$, 计算量较大.为了避免每次进行频率估计都计算复指数,考虑取一个固定值 $k=1/3$, 通过频移,新信号的频率将位于两个相邻量化频率点的中心区域,仍然可以保证得到较高的精度.对于固定的 k , 可以预先将 $\exp(j2\pi n k/N)$ 计算好存放在 RAM 里,极大地减少了计算量.

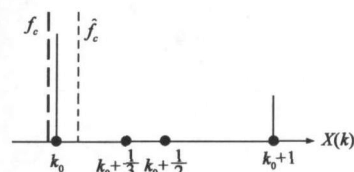


图 2 f_c 与 f_c 不在 k_0 同一侧时的谱线示意图

由于受噪声的影响,可能出现图 2 所示情况, f_c 与真实频率 f_c 不在 k_0 的同一侧(当信号频率接近量化频率点 k_0 处并且信噪比较低时,这种情况发生的概率较大),不能保证一次频移就将新信号的频率移到离散频率的中心区域.此时可以对原始信号作二次频移,然后再用式(4)进行估计,得到最终

估计值.

4 计算量与性能分析

4.1 计算量分析

Rife 算法需要作一次 FFT, 在所有复数指数 W_N^{kn} 全部算好的前提下, 作一次 N 点 FFT 需要 $N/2 \log_2 N$ 次复数乘法和 $N \cdot \log_2 N$ 次复数加法.

用 MRife 算法估计频率, 求 $x_1(n)$ 需 N 次复数乘法, 求 $x_1(n)$ 的最大两根谱线需 $2N$ 次复数乘法和 $2(N-1)$ 次复数加法. 假设被估计频率在整个频带上呈均匀分布, 用 Rife 算法

估计频率, 结果不需要进行修正的概率为 $1/3$, 需要通过左移或右移频谱进行修正的概率均为 $1/3$. 当 Rife 算法估计频率值 f_c 与真实频率 f_c 分布在量化频率点两侧时, 才需要作二次修正, 这种概率很小, 现以 p_2 表示. 从统计的角度看, 一次 MRife 算法附加的计算量为

$$\text{复数乘法: } \frac{2}{3}(N+2N) = 2N$$

$$\text{复数加法: } \frac{2}{3} \cdot 2(N-1) = \frac{4}{3}(N-1)$$

几种算法的计算量比较如下:

表 1 算法计算量比较

	复数乘法次数	复数加法次数
Rife 算法	$N/2 \log_2 N$	$N \log_2 N$
MRife 算法 (一次修正)	$N/2 \log_2 N + 2N$	$N \log_2 N + 4N/3$
MRife 算法 (两次修正)	$N/2 \log_2 N + 2N(1+p_2)$	$N \log_2 N + 4N(1+p_2)/3$
一次牛顿迭代 (以 Rife 算法为初始值)	$N/2 \log_2 N + 3N + 1$	$N \log_2 N + 2N - 2$
两次牛顿迭代 (以 Rife 算法为初始值)	$N/2 \log_2 N + 6N + 2$	$N \log_2 N + 4N - 4$
一次牛顿迭代 (以 MRife 算法为初始值)	$N/2 \log_2 N + 5N + 1 + 2Np_2$	$N \log_2 N + 10N/3 - 2 + 4Np_2/3$

表 2 SNR = 0dB 的牛顿迭代算法性能 (CRLB 为 19.0kHz)

被估计频率 f_i (MHz)	Rife 算法 (kHz)	MRife 算法 (kHz)	一次牛顿迭代 (kHz) (以 MRife 算法为初始值)	一次牛顿迭代 (kHz) (以 Rife 算法为初始值)	两次牛顿迭代 (kHz) (以 Rife 算法为初始值)	五次牛顿迭代 (kHz) (以 Rife 算法为初始值)
50.000	53.9	21.3	19.2	20.3	18.8	18.9
50.039	78.4	19.2	19.3	21.5	18.8	19.1
50.078	109.5	18.6	18.8	26.2	18.7	18.9
50.117	119.4	19.3	18.7	38.3	18.3	19.4
50.156	101.5	20.5	18.9	59.2	48.9	209.1
50.195	67.3	19.6	18.6	64.9	96.9	332.3
50.234	32.0	20.9	19.3	252.7	154.7	253.1
50.273	21.1	21.1	19.0	20.0	18.9	18.1
50.312	19.5	19.1	18.9	19.5	19.2	19.1
50.351	19.7	19.7	19.3	18.4	18.8	19.1
50.391	19.3	19.3	19.1	18.7	18.8	18.9
平均值	58.3	19.9	19.0	50.9	41.0	86.0

表 3 SNR = -3dB 的牛顿迭代算法性能 (CRLB 为 26.9kHz)

被估计频率 f_i (MHz)	Rife 算法 (kHz)	MRife 算法 (kHz)	一次牛顿迭代 (kHz) (以 MRife 算法为初始值)	一次牛顿迭代 (kHz) (以 Rife 算法为初始值)	两次牛顿迭代 (kHz) (以 Rife 算法为初始值)	五次牛顿迭代 (kHz) (以 Rife 算法为初始值)
50.000	76.1	40.3	28.1	30.0	27.8	26.5
50.039	93.5	37.9	26.6	30.9	27.1	26.6
50.078	118.6	27.1	27.1	39.0	25.9	25.3
50.117	145.4	26.9	26.8	56.7	26.8	195.6
50.156	142.6	25.6	27.8	91.3	58.6	672.9
50.195	121.3	28.5	26.8	1380.1	942.3	2938.4
50.234	80.2	42.9	28.4	2526.0	662.6	620.5
50.273	41.3	36.5	27.0	128.7	291.1	274.7
50.312	28.3	36.9	27.2	63.6	27.6	26.6
50.351	27.6	27.4	27.3	26.9	27.5	27.9
50.391	27.1	27.1	26.8	27.7	27.4	27.4
平均值	82.0	32.5	27.3	400.1	195.0	442.0

牛顿迭代算法每次迭代都需要计算 N 个复指数因子 $\exp(-2j\omega t)$, 这需要很大的计算量. 如复指数计算采用查表形式, 从表 1 可以看出, 以 MRife 算法为初始值进行一次迭代所需的计算量大于以 Rife 算法为初始值进行一次迭代所需的计算量, 与两次迭代的计算量相当.

4.2 仿真及性能分析

信噪比定义为: $SNR = A^2 / (2\sigma^2)$.

对正弦波信号, 在相位、幅度和频率三个参数均未知的情况下, 频率估计的方差下限^[1]为

$$\text{var}(\hat{f}) = 12 \sigma^2 / [A^2 T^2 N(N^2 - 1)] \quad (10)$$

在仿真中, 采样间隔 $t = 5 \times 10^{-9}$ s, 样本数为 $N = 256$, 因此 $f = 1/N \cdot t = 782$ kHz. 设 f_1 为某个量化频率, 现取 $f_1 = f_s/4 = 50$ MHz, 从 f_1 到 $f_1 + f/2$ 取 11 个离散的频率 $f_i = f_1 + (i-1) \cdot f/20$ ($i=1, 2, \dots, 11$), 对频率为 f_i 的正弦波, 按上述的方法进行频率估计.

对每一个频率 f_i 进行 1000 次 Monte Carlo 模拟, 计算均方根误差 (RMSE), 仿真结果列于表 2, 3.

表 2, 3 中横行表示某一频率点 f_i 上各种算法的 RMSE, 平均值表示每种算法在这个频段上 RMSE 的平均值.

从上面的仿真结果可以看出, 对于不存在收敛问题的仿真频率点, 以 MRife 算法为初始值进行一次牛顿迭代, 性能优于以 Rife 算法为初始值进行的一次牛顿迭代, 与两次的牛顿迭代接近; 对于原牛顿迭代算法在某些频率点存在的不收敛问题, 以 MRife 算法为初始值之后得到改善. 表 2, 3 中仿真频率为 50.351 MHz 和 50.391 MHz 时, 以 Rife 算法为初始值进行的一次牛顿迭代精度高于二次和五次迭代, 也高于以 MRife 算法为初始值进行的一次迭代. 这是由于这两个频率点离量化频率的中心区域很接近, Rife 算法在这个区域精度很高, 此时一次牛顿迭代的精度已足够高, 由于噪声的影响牛顿迭代不可能收敛于某点, 在这种情况下再进行迭代不会继续提高估计精度.

5 结论

本文提出了以 MRife 算法为初始值进行一次牛顿迭代估计正弦波信号的频率, 和传统的以 Rife 算法为初始值进行牛顿迭代的算法相比, 克服了某些频率点上的不收敛问题, 在整个频段上性能接近 CRLB, 具有应用价值.

参考文献:

- [1] Rife D C, Boorstyn R R. Single-tone parameter estimation from discrete-time observation^[1]. IEEE Trans Inform Theory, 1974,

IT-20(5):591 - 598.

- [2] Rife D C, Boorstyn R R. Multiple tone parameter estimation from discrete time observations [J]. Bell Syst Tech J, 1976, 55(9):1389 - 1410.
- [3] Rife D C, Vincent G A. Use of the discrete Fourier transform in the measurement of frequencies and levels of tones [J]. Bell Syst Tech J, 1970, 49(2):197 - 228.
- [4] 齐国清, 贾欣乐. 插值 FFT 估计正弦信号频率的精度分析 [J]. 电子学报, 2004, 32(4):625 - 629.
QI Gu-qing, JIA Xin-le. Accuracy analysis of frequency estimation of sinusoid based on interpolated FFT [J]. Acta Electronica Sinica, 2004, 32(4):625 - 629. (in Chinese)
- [5] 齐国清, 贾欣乐. 基于 DFT 相位的正弦波频率和初相的高精度估计方法 [J]. 电子学报, 2001, 29(9):1164 - 1167.
QI Gu-qing, JIA Xin-le. High-accuracy frequency and phase estimation of single-tone based on phase of DFT [J]. Acta Electronica Sinica, 2001, 29(9):1164 - 1167. (in Chinese)
- [6] Rife D C. Digital tone parameter estimation in the presence of Gaussian noise [D]. New York: Polytech. Inst. Brooklyn, 1973.
- [7] Abatzoglou T J. A fast maximum likelihood algorithm for the frequency estimation of a sinusoid based on Newton's method [J]. IEEE Trans ASSP, 1985, 33(1):77 - 89.

作者简介:



邓振森 男, 1977 年 6 月出生于福建漳平, 1999 年毕业于南京航空航天大学民航学院, 2002 年进入南京航空航天大学信息科学与技术学院攻读硕士学位, 现为博士研究生, 从事信号与信息处理方面的有关研究.
E-mail: dzm_dzb@21cn.com



刘渝 男, 教授, 博士生导师, 1945 年 6 月生于重庆市, 1968 年和 1981 年在中国科学技术大学获工学学士和工学硕士学位, 现为南京航空航天大学教授, 博士生导师. 研究方向: 信号处理, 电子智能.
E-mail: liuyu_nuaa@yahoo.com.cn