

一种多层快速多极子的高效并行方案

潘小敏, 盛新庆

(北京理工大学信息科学技术学院电磁仿真中心, 北京 100081)

摘 要: 基于多层快速多极子中不同层间数据分布和计算时间不同的特点, 提出一种按不同方式并行处理不同层平面波和转移矩阵的高效并行方案. 从理论分析和数值试验出发, 给出了在不同层间高效使用不同并行方式的原则及具体公式. 在北京理工大学信息科学技术学院电磁仿真中心的高性能计算机集群上成功计算了直径为 144 个波长、超过 1000 万未知数模拟的金属球散射; 与美国伊利诺伊大学计算电磁中心的报道进行了比较, 展示了本方案的高效精确. 还计算了飞机模型的散射, 显示本方案对电大复杂目标散射问题的求解能力.

关键词: 多层快速多极子; 并行技术; 电磁散射

中图分类号: O441 **文献标识码:** A **文章编号:** 0372-2112 (2007) 03-0567-05

A Highly Efficient Parallel Approach of Multi-Level Fast Multipole Algorithm

PAN Xiao-min, SHENG Xin-qing

(Central for Electromagnetic Simulation, Beijing Institute of Technology, Beijing 100081, China)

Abstract: Based on the different characteristics of memory requirement and CPU time at different levels in the multi-level fast multipole algorithm (MLFMA), a highly efficient parallel approach is proposed, which employs different techniques to parallelize the plane waves and translation matrixes at different levels. The formulae for efficiently implementing this proposed approach are presented by theoretical analysis and numerical experiments. The radar cross-section (RCS) of a conducting sphere with a diameter of 144 (wavelength), simulated by over 10 millions unknowns, is successfully computed in the center for electromagnetic simulation (CEMS) in Beijing Institute of Technology (BIT). The comparison of numerical performance between center for computation electromagnetics (CCEM) in University of Illinois at Urbana-Champaign (UIUC) and our CEMS is presented, demonstrating the strong computation power of our proposed approach. The RCS of a plane model are also calculated to show our capacities to solve large complex electromagnetic problems.

Key words: multi-level fast multipole algorithm; parallelization; electromagnetic scattering

1 引言

多层快速多极子算法在电磁领域的成功开发, 是计算电磁学领域的一大突破, 极大地提高了电磁仿真的能力. 算法本身较为复杂, 开发不易. 其开发水准, 从某种意义上说, 是一个国家计算电磁学发展水平的标志之一. 因而继美国在九十年代中期首先开发成功之后^[1], 中国、法国等多个国家也都投入很大精力, 相继初步掌握了此项技术^[2,3]. 美国在开发成功之后, 没有停步, 一直在优化、提高此项技术, 并保持着此项技术的领先地位. 其突出表现是成功计算了需 1000 多万个未知数模拟的, 超过 100 个波长的电大金属目标的电磁散射^[4,5]. 达到这种计算能力的关键是多层快速多极子算法的并行. 本文正是在文献[4,5]的基础上, 提出一种更为高效

的并行方案, 并具体实现它, 分析其数值性能.

多层快速多极子并行算法与串行算法有根本不同. 其开发并非只是在原有串行算法上的简单调整, 而是要从算法原理到数据结构等方面做出根本改变, 才能实现高效的并行算法. 多层快速多极子并行算法首先在美国开发成功, 文献[4,5]给出了并行多层快速多极子算法的一些要点, 国内也在摸索、开发高效多层快速多极子并行算法^[6]. 负载均衡和转移矩阵是并行化的难点. 文献[4,5]组合了两种并行策略以解决负载均衡问题, 并实时计算转移矩阵以减少内存需求. 但计算发现, 即使利用快速算法, 实时计算转移矩阵时间消耗依然巨大. 为此本文优化组合平面波的两种并行处理方式, 并提出对转移矩阵分布存储和实时计算相结合的并行策略. 即对多极子技术中的平面波, 在高层, 由于用于分组的盒

子尺寸大,数目少,按平面波方向来并行它们,在低层,盒子尺寸小,数目多,按盒子来并行处理;对转移矩阵,原则上在按平面波方向并行的层,直接存储它们,在按盒子并行的层,用类似多极子方法实时计算.在高层按平面波方向并行处理可多个方面优化算法,例如负载均衡,减少通信等;而直接存储转移矩阵,使算法在兼顾了内存需求的同时,从根本上提高计算效率.但是在插值过程中,平面波方向的并行处理方式会带来额外的通信,因此两种并行方式的选择非常关键.为此本文从理论分析出发,结合数值试验,基于这两种并行处理方式的特点,提出在不同层间优化使用它们的原则策略,并推导出具体公式.在投资只有六万多人民币构建的并行计算平台上,本文验证了并行方案效率,并在北京理工大学信息科学技术学院电磁仿真中心的高性能计算机集群上成功计算了1000多万未知数模拟的直径为144个波长的金属球散射,充分证实了本并行方案的精确、高效.本文第二部分给出并行处理方案的要点,第三部分给出并行算法的数值实验数据及其结果分析,最后给出结论.

2 并行处理方案要点

2.1 两种并行处理方式及转移矩阵的计算和存储

次相邻相互作用是MLFMA快速算法的关键,也是并行处理的难点.问题的根本在于保存转移矩阵的内存和计算它们的时间是一对棘手的矛盾.虽然转移矩阵是对角阵,但如果并行处理时每个计算结点都完全存储它,其内存消耗依然是计算瓶颈.文献[4]指出,计算转移矩阵问题可转化为 $L-1$ 阶多项式的求值问题,并提出实时计算转移矩阵的方案.但数值实验发现,计算转移矩阵依然耗时很多,如表1所示.表中列出了用8个节点计算不同尺寸金属球散射时,对第2和3层的平面波方向并行处理后,一次矩阵向量相乘及计算转移矩阵时资源使用的详细情况.从表中可看到,计算转移矩阵的时间甚至占去整个矩阵向量相乘时间的一半以上.而且在高层盒子尺寸大,所需平面波多,计算其转移矩阵所需时间尤其多.

表1 计算不同尺寸金属球散射时完成一次矩阵向量相乘和计算各层的转移矩阵所用资源(其中 D 为散射球直径, N 为未知数个数, T_2 , T_3 和 T_r 分别为计算第二、三层和所有层的转移矩阵所需时间, T_{M-v} 为一次矩阵向量相乘的时间, M_r 为直接保存全部转移矩阵所需内存(应用了对称性^[7]), M_p 为并行处理时,每个计算结点直接存储第2和3层的部分转移矩阵的内存需求.)

$D(\lambda)$	N	$T_2(s)$	$T_3(s)$	$T_r(s)$	$T_{M-v}(s)$	$M_r(\text{MB})$	$M_p(\text{MB})$
30.0	480000	5.025	0.825	6.49	16.32	26.39	6.20
80.0	4036800	16.964	2.700	21.71	46.04	172.08	40.74
100.0	5070000	71.717	10.393	89.55	158.92	273.82	62.66

为此我们提出兼顾计算效率和内存需求的新方案:

(a) 对于多极子中的平面波:在盒子尺寸大的一层或者几层按平面波方向并行处理,其他层则对盒子并行处理;

(b) 对于转移矩阵:与文献[5]不同,在按平面波并行处理的层,本文直接存储它们;其他层则实时计算.

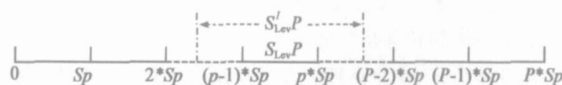


图1 在对平面波方向并行处理的层,为各个处理器分配平面波方向的示意图

按平面波方向做并行处理就是将每个盒子的平面波平均分配给各个计算结点,也就是说各个计算结点要保存每个盒子的部分平面波.假定平面波标号连续,且以几何分布按某种顺序排列,那么各处理器也可分配到顺序排列的平面波(如按 x 和 y 轴的先后顺序).假设某层有 q 个盒子,每个盒子需要 $S=2(L+1)^2$ 个方向平面波来表达它的场.那么每个处理器上应分配 $S_p=S/P$ (P 为计算结点的个数)个平面波,第一个处理器保存该层 q 个盒子、方向标号为 $(0 \sim S_p)$ 的平面波,第二个处理器保存该层 q 个盒子、方向标号为 $((S_p+1) \sim 2S_p)$ 的平面波……如图1所示,处理器 p ($p>1$)中第 $Lev P$ 层的平面波标号最小为 $(p-1)*S_p$,最大为 $p*S_p$;而标号为 $((p-1)*S_p-1)$ 的平面波位于处理器 $(p-1)$,标号为 $(p*S_p+1)$ 的平面波位于处理器 $(p+1)$.与此类似对盒子作并行是将不同盒子分配到各计算结点.

计算高层转移矩阵所需时间远大于底层所需时间,本文方案不重复计算它们,从而显著提高算法的时间效率.而按平面波方向并行处理后,每个计算结点只需保存部分转移矩阵,也即与平面波方向对应的部分,可较好解决内存瓶颈问题.表1的最后两列分别给出了按平面波方向作并行处理,并直接存储其转移矩阵前后,各处理器的内存使用情况.

2.2 两种并行处理方式的选择策略

数值试验表明并行方案中,不同层间两种并行处理方式的选择特别重要.文献[5]结合使用了这两种方式来并行处理平面波,但没有提出使用它们的具体策略.为此本文以理论分析和数值试验为基础,比较两种并行处理方式的性能,给出选择使用它们的原则策略,并推导出具体公式.

与对盒子并行处理相比,对平面波方向并行处理并保存转移矩阵除了能在消耗很少内存的条件下节省计算转移矩阵的时间,还有三个好处:一是能极大提高算法的负载均衡能力;二是能避免次相邻相互作用时的通信操作;三是可以分布存储中心转移矩阵和插值

矩阵. 但对平面波并行处理的层不是越多越好. 此时各个处理器的平面波个数为 S_p , 插值(反插值)所需要的平面波不一定都在本地, 从而需要通信以完成插值. 与此相反, 在对盒子做并行处理的层, 只要满足父子关系的盒子都位于本地, 插值就不需要通信. 当额外引入的通信开销超过平面波方向并行处理带来的好处时并行效率就会下降, 本文的数值试验也证实了这一点.

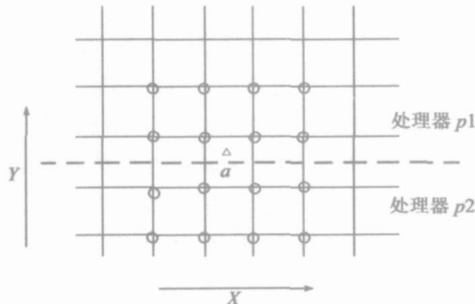


图 2 双立方插值算法中插值点的选择示意图

分析多极子技术知道, 在对平面波方向做并行处理的层, 其插值(反插值)的通信量与每个处理器上的平面波方向的个数 S_p 和使用的插值算法有关. 为了减少插值时的通信量本文选用局域方法——双立方插值. 在这种插值方式下, 要得到细网格上 a 点的值由其邻近粗网格的 16 个方向的平面波确定, 如图 2 所示. 插值算法选定后, 每个点的插值方式就已经确定, 通信量只和 S_p 有关. 而 S_p 由模式数 L 和处理器个数 P 确定. 所以下面着重讨论并行处理方式的选择原则与模式数 L 及 P 的关系.

假定在 $Lev P$ 以上的层(包括该层)对平面波方向并行处理. 令 p 为某个处理器的标号(处理器的标号从 1 开始), $S_{Lev P}$ 为 $Lev P$ 层中在处理器 p 中保存的平面波标号的集合, $S_{Lev P}^l$ 要完成插值所需要的平面波标号的集合. 显然 $S_{Lev P}^l$ 包含 $S_{Lev P}$. 由于局域插值算法局域性的特点以及上面提到的平面波方向的分配方式, 每个处理器只和邻近处理器通信即可. 再由于插值算法的对称性, 显然能找到一个整数 $n > 0$, 使 $S_{Lev P}^l$ 中的平面波分别位于标号为 $(p - n), (p - n + 1), \dots, p, \dots, (p - n - 1)$ 和 $(p + n)$ 这 $2n + 1$ 个处理器(如果 $(p - n) = 0$, 则相应的处理器标号为 $(P - n + 1)$, 其他处理器标号小于零的情况依次类推). 也就是说插值操作最多需要与 $2n$ 个处理器通信. 由于平面波方向是顺序标号, 所以:

$$n = \lceil (S_{Lev P}^{Max} - S_{Lev P}^{min}) / S_p \rceil \quad (1)$$

其中 $S_{Lev P}^{Max}$ 为 $S_{Lev P}^l$ 中最大的标号. 根据图 1 分配平面波方向的方案和图 2 所示双立方插值的规则可知 x 和 y 方向上分别有 $(L + 1)$ 和 $2(L + 1)$ 个点, 因此:

$$S_{Lev P}^{Max} = 2 * 2(L + 1) + S_{Lev P}^{Max} \quad (2)$$

将式(2)代入式(1), 有:

$$n = 4(L + 1) / S_p \quad (3)$$

将 $S = 2(L + 1)^2$ 和 $S_p = S / P$ 代入式(4)

$$n(L + 1) = 2P \quad (4)$$

式(4)给出了通信量 n , 处理器个数 P 和层数 $Lev P$ (L 和 $Lev P$ 一一对应) 之间的关系. 在本文并行环境下, n 越大, 插值的通信开销越大, 并行效率会下降(从图 5 的计算结果可看出), 所以本文一般取之为 1. 上面的公式就简化为:

$$(L + 1) = 2P \quad (5)$$

它表明了要保证插值式通信最小时选择并行处理方式应满足的条件.

3 计算结果和分析

算法设计和实现过程中, 本文组建了两套并行计算系统, 其一是用百兆交换机和以太网连接而成的 8 个结点的 PC 集群——每个结点有一个 P4 3.0GHz 处理器、2.0GB 内存. 代码的大部分调试和效率测试在这个平台上完成. 随后建设好另一并行平台——北京理工大学信息科学技术学院电磁仿真中心的 32-结点 IBM 刀片式 Linux 高性能计算机集群, 每个刀片配置了一个 P4 3.0GHz 处理器和 4.0GB 内存, 用 Myrinet 网络连接. 程序采用并行 GMRES 作为线性方程组的迭代求解器^[8], 并使用了块对角预处理器加速迭代. 求解出等效电流后, 平均地从 0 到 180 度选取 1801 个散射角度计算 RCS. 如无特别提示, 本文计算的 RCS 均为 VV 极化.

表 2 本文的并行算法计算能力与美国伊利诺伊大学计算电磁中心的计算能力比较

	美国伊利诺伊大学 计算电磁中心(CCEM)	北京理工大学信息科学技 术学院电磁仿真中心(CEMS)
电尺寸(波长)	100	144
未知数	10,002,828	10,156,800
计算平台	128-处理器 SGI Origin 2000	32 结点 IBM 刀片式自组集群
所用内存(GB)	27.67	31.31
计算时间(s)	7500	3198
计算精度	—	0.7dB

使用并行代码, 本文在北京理工大学信息科学技术学院电磁仿真中心的计算机集群上成功计算了超过 1000 万未知数模拟的 144 个波长的金属球散射. 计算中使用 9 层盒子, 对第 2, 3 和 4 三层按平面波方向并行处理, 并直接存储相应转移矩阵. 图 3 给出的散射系数充分显示了算法的精确和高效. 目前国际上只有美国伊利诺伊大学计算电磁中心报道了如此强大的计算能力^[5], 表 2 具体比较了本文方案与文献[5]中方案的计算能力. 表中看到本文方案在较短的时间完成了较大目标的散射, 而文献[5]的方案使用的内存较少. 有两

个原因会使本文内存需求大,一是计算目标尺寸大,在使用相同层数的情况下,本文各层使用的模式数肯定比文献[5]的大,所以内存消耗要大很多;二是本文保存了三个层的转移矩阵,总共消耗大约 1GB 内存。

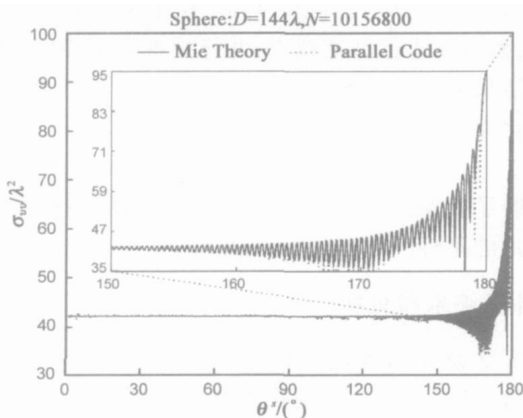


图3 直径为 144λ的金属球双站散射系数

下面分析算法的时间并行效率.由于迭代过程是算法最耗时的部分,而迭代中主要耗时操作是矩阵向量相乘,所以这里只分析矩阵向量相乘的并行效率.假设串行处理时完成一次矩阵向量相乘需时 T_1 ,而 T_p 为并行处理时完成相同操作每个处理器所需时间,那么并行加速比定义为: $s = \frac{T_1}{T_p}$,而并行效率定义为: $\eta = \frac{s}{p} \times 100 = \frac{T_1}{pT_p} \times 100$.下面本文以直径为 30 的金属球为散射体,变化并行节点个数,考察并行算法的效率.计算中使用了 7 层盒子.这里需要说明的是,串行算法中实时计算所有层的转移矩阵.

首先看看对高层的平面波方向并行处理后,直接保存对应的转移矩阵对算法效率的影响.图 4 中的两条曲线描述了变化计算节点个数,不同并行策略的效率.两种方案都对第 2 和 3 层的平面波方向作并行,但其中一种是实时计算转移矩阵,而另外一种则直接保存对应的转移矩阵.从图中看到完全实时计算转移矩阵时,算法并行效率不高.这是因为计算转移矩阵(尤其在高层)耗时很多(见表 1),导致该方案的并行效率下降.而直接保存某些层(按平面波方向并行处理的层)的转移矩阵时,在额外使用较少的内存(8 个节点总共使用内存 1300MB 左右,而保存转移矩阵总共需要 50MB 左右)的情况下,并行效率得到极大提高,甚至达到实时计算转移矩阵方案的两倍.而且当使用 8 个处理器时并行效率能达到 85% 以上.这充分说明了本文方案可大幅度提高算法效率.从图中还可以看到计算节点个数对算法效率的影响.总体来讲,随着处理器个数增加,并行效率呈下降趋势,但当处理器个数为 2 的幂次时,并行效率优于其它情况.同时由于串行方案和并行方案中

对转移矩阵的处理方式不同,算法的并行效率可以大于 1.

为验证 2.2 节中讨论的并行处理方式选择原则,在不同层间对平面波和转移矩阵选择不同并行处理方式,考察并行效率随计算节点个数的变化.考虑四种情形:对第 2 层,对第 2 和 3 层,对第 2、3 和 4 层以及对第 2、3、4 和 5 层的平面波方向做并行处理.图 5 给出了这四种情形对应的并行效率变化曲线.前面三种情形 $n = 1$,总体看来并行处理平面波方向的层数越多,并行效率越高.当并行处理平面波方向额外通信的开销与其带来的好处相当时,并行效率就不会增长.图 5 清晰的反应了这一点.而当对第 2、3、4 和 5 层的平面波方向做并行处理,并且处理器个数大于 6 时,根据式(4)知道 $n = 2$,即需要与 4 个处理器通信.图中看到,此时由于通信量大大增加,并行效率大大将低.这组试验充分验证了文中 2.2 节的分析.

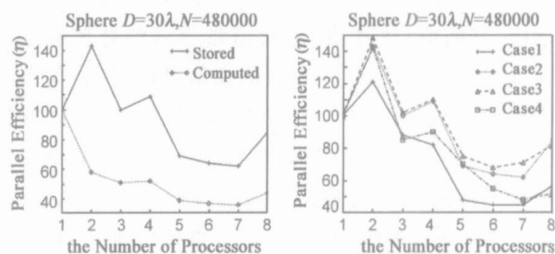


图4 对转移矩阵不同处理方图5 选择不同层按平面波方向并行处理时并行效率的变化

最后,本文计算了飞机模型的散射以验证并行方案对电大尺寸复杂目标散射的求解能力.飞机的建模与剖分如图 6 所示.飞机主体长为 24m,沿 Z 轴放置;最大翼展为 13.4m,沿 X 轴放置.选择入射波频率为 1GHz,计算了当入射波方向为 $(0^\circ, 0^\circ)$ 时模型的双站雷达散射截面.计算中所用资源如下表 3 所示,所得雷达散射截面如图 7 所示.

表3 计算飞机模型的散射时资源使用情况

长(波长)	未知数(万)	计算节点数	内存(CB)	迭代次数	时间(s)
80.0	114.5	8	2.41	125	1999.6

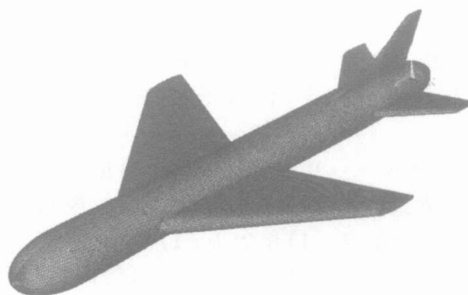


图6 飞机模型示意图

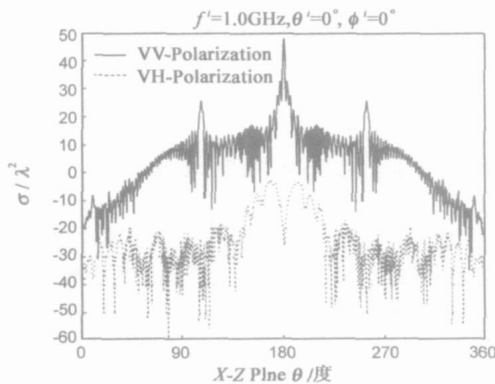


图 7 飞机模型的双站雷达散射截面

4 结论

根据多层快速多极子中不同层间数据分布和计算量大小不同的特点,提出一种按不同方式并行处理不同层平面波和转移矩阵的高效并行算法。即对多极子技术中的平面波,在高层按平面波方向来并行,并直接保存转移矩阵;在低层按盒子来并行,实时计算转移矩阵。结合理论分析和数值试验提出了并行方案的优化原则及相关公式。实验表明该算法精确高效,有求解未知数超过 1000 万、电尺寸超过 100 个波长的电大尺寸复杂形状目标散射问题的强大计算能力。

参考文献:

- [1] J Song, W C Chew. Multilevel fast multipole algorithm for solving combined field integral equations of electromagnetic scattering[J]. *Micro Opt Tech Let*, 1995, 10(1): 14 - 19.
- [2] 聂在平,胡俊,等.用于复杂目标三维矢量散射分析的快速多极子方法[J]. *电子学报*, 1999, 27(6): 104 - 109.
Z P Nie, J Hu, et al The fast multipole methods for vector analysis of scattering from 3-dimensions objects with complex structure[J]. *Acta Electronica Sinica*, 1999, 27(6): 104 - 109. (in Chinese)

- [3] Pascal H A. Parallel implementation of the fast multipole method for Maxwell's equations[J]. *Int J Numer Meth* 2003 (43): 839 - 864.
- [4] S Velamparambil, W C Chew. Analysis and performance of a distributed memory multilevel fast multipole algorithm [J]. *IEEE Trans Antennas Propagat*, 2005, 53(8): 2719 - 2727.
- [5] S Velamparambil, W C Chew, J Song. 10 million unknowns: Is it that big[J]. *IEEE Antennas Propagat Mag*, 2003, 45(2): 43 - 58.
- [6] 卢光辉,孙世新,等.并行处理技术在电大尺寸复杂目标电磁散射中的应用[J]. *电子学报*, 2003, 32(6): 882 - 885.
G H Lu, S X Sun, et al. Application of the parallel processing technology to electromagnetic scattering from electrically large complex objects[J]. *Acta Electronica Sinica*, 2003, 32(6): 882 - 885. (in chinese)
- [7] 王浩刚,聂在平,王刚.对三维多层快速多极子方法中不变项计算的优化[J]. *电子学报*, 2000, 28(9): 105 - 107.
H G Wang, Z P Nie, Wang G. Optimization of the invariant terms' calculation in three dimensional MLFMA [J]. *Acta Electronica Sinica*, 2000, 28(9): 105 - 107. (in chinese)
- [8] V Frayssé, L Giraud, S Gratton, J Langou. A set of GMRES routines for real and complex arithmetics on high performance computer[R]. France: CERFACS, 2003.

作者简介:

潘小敏 男,1978 年 7 月出生于湖北省大悟县。分别于 2000 和 2003 年在武汉大学电子与信息学院获得学士和硕士学位,2006 年在中国科学院电子学研究所获得博士学位,主要从事计算电磁学,电磁散射特性以及高性能算法的研究。E-mail: xspan@bit.edu.cn

盛新庆 男,1968 年 8 月出生于安徽省黄山市,北京理工大学教授,博士生导师,2001 年度中国科学院“百人计划”入选者,2004 年度教育部长江学者特聘教授。主要从事计算电磁学、目标电磁特性、微波成像及遥感、电磁兼容、天线理论及设计等方面的研究。专著一本《计算电磁学要论》,列入当代杰出青年科学文库。共发表论文 90 余篇,其中 SCI 论文 30 余篇,EI 论文 40 余篇。E-mail: xsheng@bit.edu.cn