

# 一致性绕射理论的等效边缘电磁流法在抛物线方程中的应用

沈 玮, 吴先良

(安徽大学计算智能与信号处理教育部重点实验室, 安徽合肥, 230039)

**摘 要:** 将抛物线算法应用于目标的电磁散射特性分析中. 针对传统的抛物线算法在计算棱边散射体时误差较大这一问题, 本文引入了一致性绕射理论对其进行修正. 数值结果表明: 与传统方法相比, 该方法可以提高棱边散射体的计算精度.

**关键词:** 雷达散射截面; 抛物线方程; 完全匹配层; 等效边缘电磁流

**中图分类号:** TN011 **文献标识码:** A **文章编号:** 0372-2112 (2007) 03-0563-04

## Uniform Theory of Diffraction Equivalent Edge Currents Method and Its Application in Parabolic Equation

SHEN Wei, WU Xian-liang

(Key Lab. of Intelligent Computing & Signal Processing, Anhui University, Hefei, Anhui 230039, China)

**Abstract:** The parabolic equation (PE) method was applied to analyze the scattering characteristic of objects. To eliminate the obvious error resulted by the scattering analysis of scatterers with edges by traditional PE method, Uniform Theory of Diffraction was presented to solve the problem. Numerical results suggest that the method presented can improve the accuracy of computation for scatterers with edges.

**Key words:** radar cross section; parabolic equation; perfectly matched layers; equivalent edge currents

### 1 引言

近年来, 抛物线方程 (PE) 方法在许多领域都得到了广泛的应用, 如光学、声波或地震波的传播, 海平面和不规则地形上波的传播, 等等. 为解决无线电波的衍射问题, PE 方法首先是由 Lenontovich 在 1946 年提出<sup>[1]</sup>, 随后, Malyuzhiners 将 PE 方法和几何光学法结合, 提出了一种关于障碍物绕射的理论<sup>[2]</sup>; Hardin 提出了分裂步傅立叶方法, 用来解决水下声波的传播问题<sup>[3]</sup>; 再者, Claerbout 引入了有限差分, 将 PE 方法应用于地球物理学<sup>[4]</sup>.

最近, 抛物线方程方法逐渐被应用于电磁散射领域. 它是对标量波动方程作近似处理后得到的. 假设能量以近轴方向 (Paraxial direction) 为对称轴构成的锥形区域传播的. 因为抛物线方程可以通过递推方法求解, 这比直接求解椭圆型波动方程节约更多的计算机资源.

传统的 PE 方法在计算表面光滑物体时, 精度很高, 而在实际中许多物体是有棱边的, 这时 PE 方法求解的散射精度就很差. 因为在进行 PE 推导时, 利用了

一系列的近似展开, 而展开后的算子在棱边上不是可导的, 从而导致了误差. 本文引入了等效边缘电磁流方法 (ECM), 结合 PE 方法使得棱边散射体的散射精度得到了很大的提高. 该方法的主要思想是, 对棱边散射体的棱边做圆滑处理, 将棱边等效为线 (磁) 电流丝, 计算散射时, 将线 (磁) 电流丝的散射场计入 PE 所得的散射场中得到总散射场, 这样使得数值结果精度得到提高, 文中针对该思想推导了新的雷达散射截面计算公式, 并通过实验证明了新方法的有效性.

### 2 PE 算法

设时谐因子为  $\exp(-i\omega t)$ , 在 Cartesian 坐标系  $(x, z)$  下对场量  $u$  作变换后的简化函数为

$$u(x, z) = \exp(-ik_0 x) \cdot \tilde{u}(x, z) \quad (1)$$

函数  $\tilde{u}(x, z)$  是选取  $x$  正方向为轴向方向. 在文献 [5] 和 [6] 中对于外向型抛物线方程有详细的推导.

外向型抛物线方程如下:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = -ik_0(1 - \sqrt{1+X})u \quad (2)$$

其中  $k_0$  是空间波数,

$$X = \frac{1}{k_0^2} \frac{\partial^2}{\partial z^2} + n^2(x, z) - 1.$$

对于式(2), 结合合适的吸收边界条件(例如 PML), 我们可以由在空间步  $x$  的值得到  $x + \Delta x$  的值. 各种 PE 算法的区别就在于对(2)式中算符  $\sqrt{1+X}$  的处理. 最常用的处理方法就是用一阶 Taylor 展开  $\sqrt{1+X}$ , 代入(2)式有

$$\frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + 2ik_0 \frac{\partial u}{\partial x} + k_0^2(n^2(x, z) - 1)u = 0 \quad (3)$$

称上式为标准抛物线方程 SPE(Standard Parabolic Equation). 它是一个小角度近似, 它的解可以精确到  $15^\circ$ .

### 3 PML 在 PE 方程中的应用

为了模拟无限大空间的散射, 需要加入吸收边界条件, 在此引入完全匹配层 PML<sup>[7]</sup>. 用一种扩展的复坐标系  $\hat{z}$  (Stretched Coordinate) 来代替原有的坐标系  $z$

$$\hat{z} = z - i \int_0^z \kappa(z') dz' \quad (4)$$

其中  $\begin{cases} \kappa(z) = 0, & z < z_b \\ \kappa(z) > 0, & z > z_b \end{cases}$

标准抛物线方程改写为<sup>[5]</sup>

$$\frac{1}{1 - i\kappa(z)} \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{1}{1 - i\kappa(z)} \frac{\partial u}{\partial z} \right) + 2ik_0 \frac{\partial u}{\partial x} = 0 \quad (5)$$

在实际计算过程中, 取 PML 的厚度为  $L$ , PML 的最外层用 Dirichlet 边界条件截断:

$$\begin{cases} \frac{1}{1 - i\kappa(z)} \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{1}{1 - i\kappa(z)} \frac{\partial u}{\partial z} \right) + 2ik_0 \frac{\partial u}{\partial x} = 0, & z < L \\ u(x, z=L) = 0, & z = L \end{cases} \quad (6)$$

### 4 近场/ 远场方程

可以由近场求得远处的场值<sup>[5,6]</sup>, 近轴的远场方程如下

$$u(x, z) = \frac{ik_0 x}{2} e^{-ik_0(x-x_0)} u(x_0, z) \frac{H_1^{(1)}(k_0(z-z_0))}{(z-z_0)} dz \quad (7)$$

其中:  $(z) = \sqrt{(x-x_0)^2 + (z-z_0)^2}$

在此引入  $(x, z) = \frac{e^{ik_0 x}}{\sqrt{k_0 x}} u(x, z)$ .

则在方向  $\theta$  上的 RCS 为

$$RCS(\theta) = \lim_{r \rightarrow \infty} 2\pi r \frac{|s(r \cos \theta, r \sin \theta)|^2}{|i(r \cos \theta, r \sin \theta)|^2}$$

上式中的  $s, i$  分别是散射场和入射场.

如果入射波是单位幅度的平面波, 那么在  $\theta$  方向上的 RCS 就为:

$$RCS(\theta) = k_0 \cos^2 \theta \left| \int_{x_0}^L u(x_0, z) e^{-ik_0 z \sin \theta} dz \right|^2 \quad (8)$$

### 5 等效边缘电磁流

在进行 PE 推导时, 对算子  $\sqrt{1+X}$  采取了近似展开, 要求其具有可导性, 但是在棱边上其导数不存在, 所以一系列的近似展开对于棱边上的点不适用, 从而导致计算棱边的散射体时误差较大. 在此引入等效电磁流方法, 即将散射体棱边处做圆滑处理, 然后在棱边位置处加入线电(磁)流丝, 这样舍去了棱边上的不可导的点. 最后计算散射时, 将棱边的影响计入其中, 可以提高计算精度.

所谓的等效电磁流概念就是将边缘等效为电(磁)流源<sup>[8]</sup>. 此方法主要是用来求解聚焦处的场值. 在电极化时用等效线电流源  $I^e$  来代替; 在磁极化时用等效线磁流源  $I^m$  来代替. 然后调整  $I^m$  和  $I^e$  使它们产生的辐射场与相同边界条件下的边缘绕射场相同, 就可以得到  $I^e$  和  $I^m$  的值.

沿轴放以线电流, 其标量波动方程的解为<sup>[8]</sup>

$$I^e = \frac{I^e}{4j} H_0^{(2)}(k_0 r) \quad (9)$$

则其电场为:

$$E = -\frac{k^2 I^e}{4} H_0^{(2)}(k_0 r) \quad (10)$$

利用汉克尔函数的大自变量来近似, 可得远场的表达式:

$$E = I^e \frac{Z_0}{2 Z_0} \frac{\sqrt{j} e^{-jk_0 r}}{\sqrt{2 k_0}} \quad (11)$$

根据互易原理可得线磁流的远场表达式为:

$$H = I^m \frac{k_0}{2 Z_0} \frac{\sqrt{j} e^{-jk_0 r}}{\sqrt{2 k_0}} \quad (12)$$

另外再利用电极化和磁极化下的边缘绕射场,

$$E = D_s(L, \phi, \theta) E^i(Q) \frac{e^{-jk_0 r}}{\sqrt{r}} \quad (13)$$

$$H = D_h(L, \phi, \theta) H^i(Q) \frac{e^{-jk_0 r}}{\sqrt{r}} \quad (14)$$

式中的  $D_h(L, \phi, \theta)$  和  $D_s(L, \phi, \theta)$  分别为磁极化和电极化情况下的绕射系数<sup>[8]</sup>.

使式(11), (13)和式(12), (14)相等, 即可解得等效的电流  $I^e$  和磁流  $I^m$ .

$$I^e = \frac{\sqrt{8} k_0}{Z_0 k_0} e^{-j(\pi/4)} E^i(Q) D_s(L, \phi, \theta) \quad (15)$$

$$I^m = \frac{Z_0 \sqrt{8} k_0}{k_0} e^{-j(\pi/4)} H^i(Q) D_h(L, \phi, \theta) \quad (16)$$

当散射体是有限长时,  $I^e$  和  $I^m$  也是有限长的. 入射波垂直入射时, 电极化和磁极化情况下的远区绕射场为:

$$E^e = \frac{j \mu \sin}{4 r} e^{-jk_0 r} \int_{-l/2}^{l/2} I^e(z) e^{jk_0 z \cos \theta} dz \quad (17)$$

$$H^m = \frac{j \mu \sin}{4 r} e^{-jk_0 r} \int_{-l/2}^{l/2} I^m(z) e^{jk_0 z \cos \theta} dz \quad (18)$$

在进行散射计算时,在 PE 算法中按照式(17), (18) 加入等效电磁流的散射。

对于电极化波,由式(17)求得在  $(x_0, t)$  处的等效电磁流远区场值为:

$$E^m = \frac{j \mu \sin}{4 \sqrt{x_0^2 + z^2}} e^{-jk_0 \sqrt{x_0^2 + z^2}} \int_{-l/2}^{l/2} I^e(z) e^{jk_0 z \cos \theta} dz \quad (19)$$

假设由 PE 计算所得在  $(x_0, z)$  处的场值为  $u(x_0, z)$ ,我们将边缘绕射场计入其中可得下式:

$$u(x_0, z) = u(x_0, z) + \exp(-ik_0 x_0) \cdot E^e \quad (20)$$

同理可以得到磁极化下的  $u(x_0, z)$ ,如下式

$$u(x_0, z) = u(x_0, z) + \exp(-ik_0 x_0) \cdot E^e \quad (21)$$

将式(20)、(21)代入式(8)中得到新的雷达散射截面公式:

$$\sigma = k_0 \cos^2 \theta \left| \int_{-l/2}^{l/2} u(x_0, z) e^{-ik_0 z \sin \theta} dz \right|^2 \quad (22)$$

$$\sigma = k_0 \cos^2 \theta \left| \int_{-l/2}^{l/2} u(x_0, z) e^{-ik_0 z \sin \theta} dz \right|^2 \quad (23)$$

### 6 计算实例

为了验证本文提出的方法,首先对 TM 平面波垂直入射到真空中无限长理想导电圆柱的散射进行计算,圆柱的半径为 5 个波长,计算频率为 30GHz. 由标准抛物线方程 SPE 和矩量法 MOM 计算所得的 RCS 比较如图 1,从图中可以得到二者在 15° 以内吻合的很好。

下面针对不同半径的理想导电圆柱,分别利用 SPE 和 MOM 方法对 0 度到 15 度间的雷达散射截面进行计算.所有计算都是在奔腾 2.66G 512MB 的 PC 机上完成的。

表 1 CPU 时间比较(单位:秒)

算法	半径(米)		
	2	5	10
SPE	0.265	0.516	1.344
MOM	3.656	21.625	89.844

由表 1 可以看出, SPE 方法的计算效率要高于 MOM,尤其是对于电大的物体。

为了检验抛物线方法在计算棱边物体时的精度,我们对 TM 波垂直入射真空中的无限长导电方柱的散射进行了计算,方柱的边长为 2 个波长,计算频率为 30GHz. 分别采用 MOM, SPE, 抛物线加等效边缘电磁流方法(SPE + ECM) 计算其 RCS. 并对其进行比较(如图 2)。

最后,对 TM 波垂直入射真空中无限长导电凹槽(结构如图 3)的散射进行了计算,计算频率为 30GHz. 分

别采用 MOM、SPE、SPE + ECM 方法进行计算,数值结果如图 4。

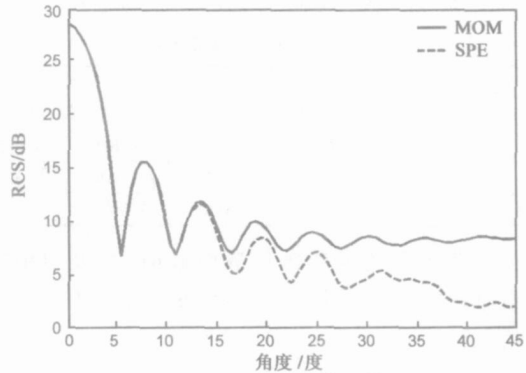


图 1 MOM 和 PE 的比较

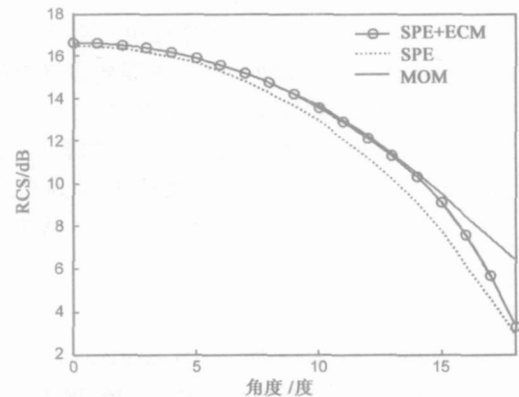


图 2 MOM 和 SPE, SPE+ECM 方法的比较

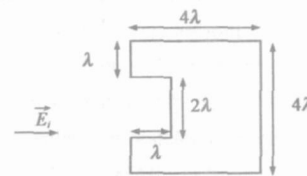


图 3 凹槽的结构及其尺寸

SPE, SPE + ECM 方法与 MOM 的计算时间比较和误差分析(15 度以内)如表 2 所列,所有计算均在奔腾 IV2.66G 512MB 的 PC 机上完成.由此可见:SPE + ECM 方法相对于 SPE 方法可以大大提高其数值结果的精

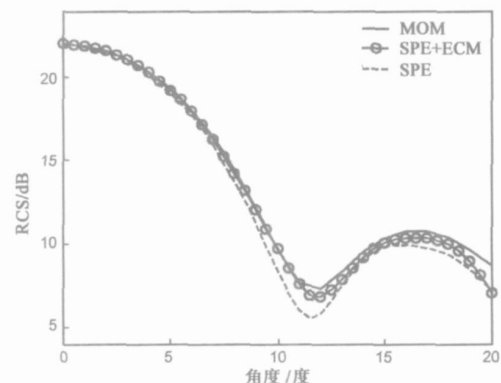


图 4 MOM 和 SPE, SPE+ECM 的结果比较

度,而且计算时间相差无几.误差计算公式如下:

$$= \left[ \frac{\sum_{i=0}^{15} (RCS_i - RCS_{MOMi})^2}{\sum_{i=0}^{15} (RCS_{MOMi})^2} \right]^{1/2} \times 100 \%$$

表 2 CPU 时间和误差分析

算 法	图 2		图 4	
	CPU 时间(s)		CPU 时间(s)	
MOM	15.6250	0.0%	19.4070	0.0%
SPE	0.8900	5.39%	1.5630	5.82%
SPE + ECM	1.1090	0.55%	1.9970	0.51%

为了获得全角度的雷达散射截面,可以利用旋转抛物线轴向的方法<sup>[5]</sup>来实现,SPE方法经过十二次旋转后可得到.

## 6 结论

本文针对传统 PE 算法在计算棱边散射体时精度较差的问题,提出了一种新的方法:将等效边缘电磁流方法和 PE 方法相结合,来计算带有棱边的物体的散射.数值结果表明 RCS 的精度得到了很大的提高,它的另一个优点是计算效率高,可以很快的得到精确的 RCS.这对于将抛物线方程方法广泛应用到生活中是很有理论意义的.

### 参考文献:

- [1] M A Leontovich, V A Fock. Solution of propagation of electromagnetic waves along the earth's surface by the method of parabolic equations[J]. J Phys USSR, 1946, 10(1): 13 - 23.
- [2] G D Malyuzhinets. Progress in understanding diffraction phenomena[J]. Sov Phys Usp, 1959, 69: 321 - 334.
- [3] R H Hardin, F D Tappert, Application of the split-step Fourier method to the numerical solution of nonlinear and variable coefficient wave equations[J]. SIAM Rev, 1973, 15: 423.

- [4] J F Claerbout, Fundamentals of Geophysical Data Processing with Application to Petroleum Prospect [M]. New York: McGraw-Hill, 1976.
- [5] M F Levy. Parabolic Equation Methods for Electromagnetic Wave Propagation [M]. London: The Institution of Electrical Engineers, 2000.
- [6] A A Zaporozhets, M F Levy, Bistatic RCS Calculations with the Vector Parabolic Equation Method [J]. IEEE Trans Ant Prop, 1999, 47(11): 1688 - 1696.
- [7] F Collino, Perfectly matched absorbing layers for the paraxial equations [J]. J Comp Phys, 1997, 131(1): 164 - 180.
- [8] 汪茂光. 几何绕射理论 [M]. 西安: 西安电子科技大学出版社, 1994.
- Wang Maoguang. Geometrical Theory of Diffraction [M]. Xi'an: Publishing company of XiDian university, 1994.

### 作者简介:



沈 玮 男, 1981 年出生于安徽, 2004 年毕业于安徽大学电子工程与信息科学系, 现为安徽大学电磁场与微波专业硕士研究生, 主要从事电磁散射与电磁计算研究.

吴先良 男, 1955 年出生于安徽亳州, 1982 年毕业于安徽大学无线电系, 1985 年成都电讯工程学院研究生班结业, 现为安徽大学教授、博士生导师、中国电子学会高级会员, 主要从事电磁场理论、电磁散射研究, 主持国家自然科学基金项目两项, 出版专著两部, 发表论文 50 多篇, 曾获得安徽省科学技术二等、三等、教育部科技进步三等奖各一项. E-mail: xlwu@ahu.edu.cn