

# 分数阶傅里叶变换的快速计算新方法

赵兴浩,陶然,邓兵,王越

(北京理工大学信息科学技术学院电子工程系,北京 100081)

**摘要:** 本文提出了一种分数阶傅里叶变换(FRFT)高分辨(Zoomr FRFT)算法,通过设置谱区间和输出点数  $M$ ,可实现任意局部谱的高分辨计算.随后,针对  $M$  很小时 Zoomr FRFT 运算效率低的问题,提出了基于 Horner 的单点快速计算(SP-FRFT)方法,并针对零点计算做出进一步简化.利用 SP-FRFT 可提高少量点输出时的计算效率,也可用于非均匀采样点计算.仿真结果验证了算法的有效性.

**关键词:** 分数阶傅里叶变换(FRFT);分解型算法;高分辨计算;单点快速计算

**中图分类号:** TN911.76 **文献标识码:** A **文章编号:** 0372-2112(2007)06-1089-05

## New Methods for Fast Computation of Fractional Fourier Transform

ZHAO Xing-hao,TAO Ran,DENGBing,WANG Yue

(Department of Electronic Engineering, Beijing Institute of Technology, Beijing 100081, China)

**Abstract:** We present a FRFT high-resolution computation (zoomr FRFT) method, which can zoom in on any interested portion of fractional spectrum by setting spectrum range and output number  $M$ . In addition, for solving lower efficiency of zoomr FRFT for small  $M$ , a FRFT single-point fast computation (SP-FRFT) method based on Horner rule is presented and its further reduction is made for zero-point computation. It can be used to increase computational efficiency for small  $M$ , and compute uniform output samples. Finally, two methods are verified by the simulations.

**Key words:** fractional Fourier transform (FRFT); decomposition-type algorithm; high resolution computation; single-point fast computation

### 1 引言

分数阶傅里叶变换(FRFT)作为广义形式的傅里叶变换<sup>[1]</sup>,已发展为分析和处理非平稳信号与时变系统的强有力工具,在通信、雷达等领域获得广泛应用<sup>[4~6]</sup>. FRFT在数字信号处理中的推广应用很大程度上依赖于高效灵活的快速算法.近年来主要提出两种较好的FRFT数值算法,一种是 Ozaktas 等人提出的分解型算法<sup>[2]</sup>,其利用 FFT 来计算 FRFT,计算复杂度为  $O(M \log M)$ ,具有运算速度快,精度高的特点;另一种方法由贝苏章等人提出<sup>[3]</sup>,通过求解 DFT 矩阵的 Hermite 特征向量构造离散 FRFT 的核矩阵,计算复杂度为  $O(N^2)$ .从输出结果看,两种 FRFT 算法都是从信号的  $N$  个均匀采样出发,最后得到信号的 FRFT 在整个分数阶谱区间上的  $N$  点均匀采样值,因此它们所计算的是分数阶域上具有固定分辨率的全局谱.然而在许多 FRFT

的实际信号处理应用中,人们不仅要了解信号在 FRFT 全局谱上的分布情况,更对分数阶域上某段局部谱的细节感兴趣,或者仅仅需要计算分数阶谱上的一个或几个单采样点值.上述两种标准 FRFT 算法显然无法满足这种要求.

针对上述应用需求,本文分别提出了 FRFT 高分辨计算(Zoomr FRFT)和 FRFT 单点计算(SP-FRFT)两种灵活的快速算法.这两种算法是在 FRFT 分解型算法的基础上对其分别作了两项改进得到的.与标准 FRFT 分解型算法相比,这两种算法在应用中更具灵活性. Zoomr FRFT 的作用好像摄影中的变焦镜头,可根据需要灵活调整分数阶谱的显示区域和分辨率,当计算分辨率很高时可得到局部谱的精细结构;利用 SP-FRFT 算法可以快速计算分数阶域上的任意采样点值,它既可以提高少量点输出时的计算效率,也适合 FRFT 非均匀采样点计算.

## 2 分解型算法回顾<sup>[2]</sup>

本文所提 FRFT 高分辨算法和 FRFT 单点快速算法都是在分解型算法基础上改进得到的,先简要介绍分解型算法.该算法是将连续 FRFT 的复杂积分变换分解成几个简单计算步骤,然后经过离散化处理得到离散卷积表达式,从而利用 FFT 来计算 FRFT.具体来说,连续 FRFT 的定义式可改写为如下形式:

$$\{F^a f\}(x) = A_\phi e^{j\phi x^2} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-j2\phi xy} [e^{j\phi x^2} f(x)] dx \quad (1)$$

其中,  $\phi = \cot \phi$ ,  $\phi = \cos \phi$ ,  $\phi = a/2$ ,  $a$  为阶次.先做量纲归一化处理,使得式(1)中的变量无量纲化并且在所有分数阶域上的宽度都限定在区间  $[-x/2, x/2]$  内.当限定阶次  $0.5 < |a| < 1.5$  时,  $e^{j\phi x^2} f(x)$  的最高频率小于  $x$ .以  $1/(2x)$  为间隔采样,并利用香农内插公式可将其表示为

$$e^{j\phi x^2} f(x) = \sum_{n=-N}^N e^{j\phi \left(\frac{m}{2x}\right)^2} f\left(\frac{n}{2x}\right) \text{sinc}\left[2x\left(x - \frac{n}{2x}\right)\right] \quad (2)$$

其中  $N = x^2$ .将式(2)代入式(1),交换积分求和顺序并求解积分运算后得到

$$\{F^a f\}(x) = \frac{A_\phi}{2} \sum_{n=-N}^N e^{j\phi x^2} e^{-j2\phi x \left(\frac{m}{2x}\right)} e^{j\phi \left(\frac{m}{2x}\right)^2} f\left(\frac{n}{2x}\right) \quad (3)$$

上式中时域变量已经实现离散化,接下来对分数阶域变量离散化.以  $1/(2x)$  为采样间隔,在全程范围  $[-x/2, x/2]$  内对分数阶域变量采样,即令  $x = m/(2x)$ ,代入公式(3),经过整理得到

$$\{F^a f\}\left(\frac{m}{2x}\right) = \frac{A_\phi}{2} e^{j\phi \left(\frac{m}{2x}\right)^2} \sum_{n=-N}^N e^{j\phi \left(\frac{m-n}{2x}\right)^2} e^{j\phi \left(\frac{m}{2x}\right)^2} f\left(\frac{n}{2x}\right), \quad -m \leq N \quad (4)$$

上式的求和部分为离散卷积形式,可以通过 FFT 快速计算得到.

## 3 FRFT 高分辨计算(Zoomr FRFT)

可以看出,分解型算法包含了 2 个离散化步骤:第 1 步利用香农内插公式对时域变量离散化得到公式(3);第 2 步对分数阶域变量离散化得到公式(4).但是第 2 步离散化是以  $1/(2x)$  为采样间隔,在全程范围  $[-x/2, x/2]$  内对分数阶域变量采样.这种离散化方式只能计算 FRFT 在全局谱上的固定分辨样本值.本文采用了一种更加灵活的离散化方法,其允许在变换域的任意局部区间上作等间隔取样,并且取样间隔(或取样点数)可任意设定.这样可根据需要选择谱范围和取样间隔,当取样间隔选择很小时,就可实现对 FRFT 任意局部谱的高分辨计算.推导过程如下:假定要计算

FRFT 在局部谱区间  $[x_1, x_2]$  上的  $M$  点等间隔取样值,  $x_1, x_2$  和  $M$  的取值任意.将分数阶域变量离散化为  $x = x_i + m/I, -M/2 \leq m \leq M/2$ ,其中  $x_i = (x_2 + x_1)/2$  表示区间中点,  $I = (x_2 - x_1)/(M - 1)$  表示采样间隔.然后将其代入公式(3)中,得到

$$\{F^a f\}(x_i + m/I) = \frac{A_\phi}{2} e^{j\phi (x_i + m/I)^2} \sum_{n=-N}^N e^{j\phi \left(\frac{m-n}{2x}\right)^2} f\left(\frac{n}{2x}\right) \quad (5)$$

将恒等式  $-2mn = (m-n)^2 - m^2 - n^2$  代入上式,最后整理得到

$$\{F^a f\}(x_i + m/I) = \frac{A_\phi}{2} e^{j\phi (x_i + m/I)^2} e^{-j\phi \frac{1}{2Ix} (m/I)^2} \times \sum_{n=-N}^N e^{j2\phi Ix \left(\frac{m-n}{2x}\right)^2} \left[ e^{j\phi \left[-2x_i \left(\frac{m-n}{2x}\right) + (-2/Ix) \left(\frac{m-n}{2x}\right)\right]} f\left(\frac{n}{2x}\right) \right] \quad (6)$$

公式(6)的计算要求直接确定  $x_i$  和  $I$  两个参数的取值,这在编程实现时很不方便,我们更愿意使用它们的以  $x$  为基准的相对取值.为此引入了两个相对因子,一个是“平移因子”  $\alpha = x_i/x, -0.5 \leq \alpha \leq 0.5$ ,它表示局部谱中心  $x_i$  在整个谱范围  $[-x/2, x/2]$  中的相对位置;一个是“变焦因子”  $P = 1/(2Ix)$ ,它表示局部谱的分辨率  $I$  相对于标准分辨率  $1/(2x)$  的放大倍数,一般取  $P$  为大于 1 的自然数.将  $x_i = \alpha x$  和  $I = 1/(2Px)$  代入到公式(6)得到

$$\{F^a f\}\left(\alpha x + \frac{m}{2Px}\right) = \frac{A_\phi}{2} e^{j\phi \alpha^2 x^2} e^{j2\phi \alpha x \left(\frac{m}{2Px}\right)} e^{j\phi \left(-\frac{m}{2Px}\right)^2} \times \sum_{n=-N}^N e^{j\phi \frac{1}{P} \left(\frac{m-n}{2x}\right)^2} \left[ e^{j\phi \left[-\frac{1}{P} \left(\frac{m-n}{2x}\right) + (-2/Px) \left(\frac{m-n}{2x}\right)\right]} f\left(\frac{n}{2x}\right) \right] \quad (7)$$

若记  $\bar{f}[n] = f\left(\frac{n}{2x}\right)$ ,  $\bar{f}_{\alpha, P}[m] = \{F^a f\}\left(\alpha x + \frac{m}{2Px}\right)$ , 则公式(7)可简化为

$$\bar{f}_{\alpha, P}[m] = \frac{A_\phi e^{j\phi N^2}}{2\sqrt{N}} e^{j\phi \left(\frac{m}{P}\right)^2} e^{j\phi \left(\frac{m-n}{4PN}\right)^2} \sum_{n=-N}^N e^{j\phi \left(\frac{m-n}{4PN}\right)^2} \left[ e^{j\phi \left(\frac{m-n}{4PN}\right)^2} e^{-j\phi \left(\frac{m-n}{4PN}\right)^2} \bar{f}[n] \right] \quad (8)$$

上式中的求和部分为离散卷积形式,因此可以利用 FFT 来实现快速的数值计算.

## 4 FRFT 单点快速计算(SP-FRFT)

Zoomr FRFT 可实现任意局部谱的高分辨分析,但在应用中仍然有一些不足:(1) Zoomr FRFT 在输入输出点数相差不大时具有较高的运算效率,当输出点数很少时运算效率低;(2) Zoomr FRFT 计算的高分辨谱间隔只能是均匀的,若需要输出若干非均匀采样值,则 Zoomr

FRFT 无法实现. 针对上述问题, 本文又利用 Horner 运算提出了一种 FRFT 单点快速计算方法.

### 4.1 Horner 运算

Horner 运算是针对幂次多项式的求解而提出的一种基于循环叠代的计算方法, 它实际上可以理解为一种幂次多项式从后向前逐次累加运算的过程. 设一个幂次多项式表示为

$$B(z) = b_0 + b_1 z + b_2 z^2 + \dots + b_M z^M \quad (9)$$

则 Horner 运算的递推过程可以表示为

对于一个确定的 $z$ 值, 计算: $S = 0$ For $i = M, M - 1, \dots, 0$ do $S = b_i + S \cdot z$	(10)
---	------

可以看出 Horner 运算的运算效率较高. 因为运用直接计算的方法计算幂次多项式, 需要  $M(M - 1)/2$  次乘法和  $M - 1$  次加法运算; 而运用 Horner 方法计算多项式, 只需要  $M$  次乘法和  $M - 1$  次加法运算.

### 4.2 单点计算原理

先考虑一般的任意非零单点计算, 再考虑零点计算的特殊情况. 若计算 FRFT 在任意非零点  $x_0 \neq 0$  处的值, 将  $x = x_0$  代入式(3)得到

$$\{F^{\alpha}f\}(x_0) = \frac{A_{\phi}}{2} \frac{e^{j\phi}}{x} \sum_{n=-N}^{x_0^2} e^{-j2\phi \left(\frac{n}{2x}\right)^2} e^{j\phi \left(\frac{n}{2x}\right)^2} f\left(\frac{n}{2x}\right) \quad (11)$$

令  $b_n = e^{j\phi \left(\frac{n}{2x}\right)^2} f\left(\frac{n}{2x}\right)$ ,  $z_0 = \exp\left[-j\frac{\phi}{x}x_0\right]$ , 则式(11)的求和部分可表示为

$$B(z_0) = \sum_{n=-N}^{x_0^2} b_n z_0^n = z_0^{-N} (b_{-N} + b_{-N+1} z_0 + \dots + b_0 z_0^N + b_1 z_0^{N+1} + \dots + b_N z_0^{2N}) \quad (12)$$

利用 Horner 叠代运算过程(10)可快速计算出  $B(z_0)$ . 最后得到 FRFT 在分数阶域  $x_0$  点处的结果为:

$$\{F^{\alpha}f\}(x_0) = \frac{A_{\phi}}{2} \frac{e^{j\phi}}{x} z_0^{-N} B(z_0) = \frac{A_{\phi}}{2} \frac{e^{j\phi}}{x} z_0^{-N} B\left(e^{-j\frac{\phi}{x}x_0}\right) \quad (13)$$

但是还有一个重要问题需要考虑, 即在计算多项式系数  $b_n$  时需要先算出序列

$$g_n = \exp\left[j\phi \left(\frac{n}{2x}\right)^2\right], \quad -N \leq n \leq N \quad (14)$$

若按式(14)直接计算序列  $g_n$ , 对每个点都要进行复指数运算, 生成序列  $g_n$  的计算量很大, 并且因为  $g_n$  并非固定序列, 它会随着  $\phi = \cot \alpha$  改变, 因此无法将  $g_n$  事先计算好并预存在存储器中. 为减小计算量, 本文采用递推方法. 因为  $g_n$  是偶序列, 只需计算其在  $0 \leq n \leq N$  范围的取值即可. 生成序列  $g_n$  的递推公式推导如下: 若

$$\text{令 } D_n = \exp\left[j\frac{\phi}{4x^2}(2n+1)\right], \text{ 有递推公式}$$

$$g_{n+1} = \exp\left[j\frac{\phi}{4x^2}(n+1)^2\right] = g_n D_n \quad (15)$$

其中  $g_0 = 1$ . 再令  $W = \exp\left[j\frac{\phi}{2x^2}\right]$ , 有递推公式

$$D_{n+1} = \exp\left[j\frac{\phi}{4x^2}(2(n+1)+1)\right] = D_n W \quad (16)$$

其中  $D_0 = \exp\left[j\frac{\phi}{4x^2}\right]$ . 这样只要计算出  $D_0$  和  $W$  的值, 就可以先由递推公式(16)得到  $D_n$  序列, 再由递推公式(15)得到  $g_n$  序列. 以上为任意非零单点  $x_0 \neq 0$  的计算方法, 若计算 FRFT 在零点  $x_0 = 0$  的值, 则式(11)简化为

$$\{F^{\alpha}f\}(0) = \frac{A_{\phi}}{2} \frac{e^{j\phi}}{x} \sum_{n=-N}^N e^{j\phi \left(\frac{n}{2x}\right)^2} f\left(\frac{n}{2x}\right) = \frac{A_{\phi}}{2} \frac{e^{j\phi}}{x} g_N f\left(\frac{N}{2x}\right) \quad (17)$$

可见, 零点计算不需要 Horner 叠代运算, 只要利用递推方法计算出  $g_n$  序列, 代入式(17)即可.

## 5 运算量分析

下面对 Zoomr-FRFT 和 SP-FRFT 的运算量进行比较分析. 假定计算  $N$  点输入的  $M$  点输出, 由于 Zoomr-FRFT 和 SP-FRFT 在计算之前都需要执行 2 倍内插, 它们的内插运算量相同. 内插后利用 Zoomr-FRFT 计算  $M$  点输出的乘法运算量为  $3(2N + M) * \log_2(4N + 2M) + 8N$ . 内插后利用 SP-FRFT 计算单点输出的乘法运算量为  $4N$ , 因此, 利用 SP-FRFT 计算  $M$  点输出的运算量为  $4MN$ . 容易看出, 当输出点数  $M$  与输入点数  $N$  相差不大时, Zoomr-FRFT 的运算效率高, 但是, 当输出点数  $M$  很小 (只有几个点) 时, 利用 SP-FRFT 的运算效率高.

## 6 仿真实例

### 6.1 Zoomr-FRFT 仿真

为了直观地展示利用 Zoomr-FRFT 实现局部谱高分辨分析的效果, 选取一个多分量 LFM 信号作为仿真实例. 假定信号含有调频率相同, 而中心频率不同的 3 个 LFM 分量

$$f(x) = \sum_{i=1}^3 A_i \exp(j2 f_i x + j m x^2) \text{rect}(x/x) \quad (18)$$

其中信号幅度分别为  $A_1 = 2, A_2 = 1, A_3 = 1$ , 中心频率分别为  $f_1 = 2, f_2 = -1, f_3 = -0.8$ , 调频率为  $m = 0.3$ , 归一化宽度为  $x = 10$ , 以  $1/x = 0.1$  为间隔采样, 得到  $N = 100$  点信号样本. 由于 LFM 信号在与调频率相垂直的分数阶域上具有最好的能量聚集性, 因此可利用 FRFT 进行 LFM 信号的检测和参数估计. 对应的 FRFT 阶次应为  $\alpha = -0.8145$ . 为进行比较, 首先利用分解型算法计算出  $f_{\alpha}(x)$  在全局区间  $[-5, 5]$  内的  $N = 100$  点样本输出, 如图 1(a) 所示, 由于采样间隔较大, 显示的谱波形很粗糙. 为了仔细观察局部谱内的波形细节, 利用本文的

Zoonr-FRFT 将分辨率提高 10 倍来显示局部谱内波形, 如图 1(b)、(c) 所示, 图中的虚线表示图 1(a) 中的标准分辨率谱线, 实线为高分辨率谱线。

通过高分辨分析可以准确地观察到局部谱的每个细节, 如主瓣和旁瓣的幅度、位置、宽度和过零点位置等, 而标准谱线由于分辨率不够而损失掉很多细节信息。不仅如此, FRFT 高分辨计算还可以为 LFM 信号的参数估计带来好处。在基于 FRFT 的 LFM 信号检测与参数估计中, 一般通过检测谱线峰值点的位置来估计信号中心频率。由图 1(c)、(d) 看出, 标准谱线(虚线) 的间

隔较宽, 很难正好采到连续谱的峰值点, 这样, 当以低分辨率的谱线峰值位置来估计中心频率时会造成较大的误差。反之, 高分辨谱线(实线) 很密, 它的峰值点与连续谱的峰值位置误差很小, 这样可大大提高中心频率的估计精度。

## 6.2 SP-FRFT 仿真

仿真试验中, 利用 SP-FRFT 来计算一个矩形信号的分数阶谱。为了与分解型算法的计算结果比较, 对分解型算法所计算的  $N$  点中的每一点利用 SP-FRFT 进行计算, 仿真结果如图 2 所示。

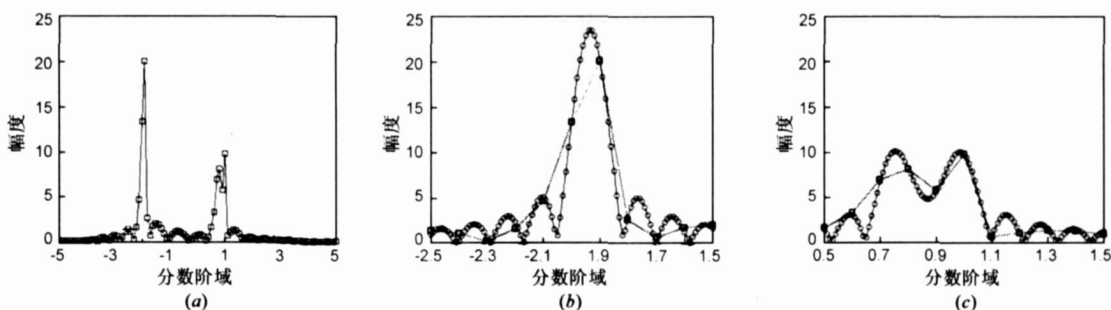


图 1 (a) 用分解型算法得到的全局谱; (b) 区间  $[-2.5, -1.5]$  的局部谱; (c) 区间  $[0.5, 1.5]$  的局部谱

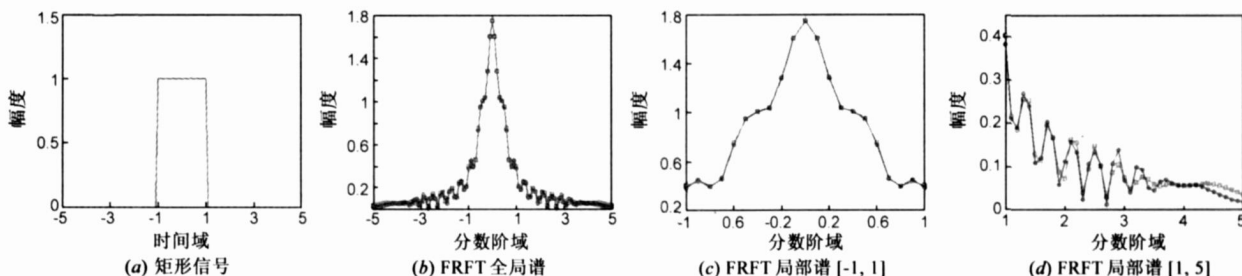


图 2 矩形信号的 FRFT, 阶次  $\alpha=0.6$ , 圆圈为 SP-FRFT 计算结果, 方形为分解型算法计算结果

可以看出, SP-FRFT 的计算结果在输出数值较大时, 与分解型算法所得到的结果的误差很小, 如图 2(c) 所示。当输出数值较小时, 单点计算的结果与分解型算法所得到的结果有一定误差, 如图 2(d) 所示。这主要是因为 SP-FRFT 应用了 Horner 叠代算法, 会产生一定的叠代误差积累, 当输出数值较小时, 积累误差比较明显。

## 7 结束语

FRFT 推广应用很大程度上依赖于高效灵活的快速算法。本文的主要贡献是在 FRFT 分解型算法的基础上, 提出 FRFT 高分辨计算 (Zoonr-FRFT) 和 FRFT 单点快速计算 (SP-FRFT) 两种新方法。最后, 作者认为有必要总结一下本文所采用的研究方法。由于分数阶傅里叶变换是傅里叶变换的推广形式, 因此在傅里叶变换中得出的一些定理、算法等, 都可以设法将其推广到分数阶傅里叶变换中。具体到数值计算方面, 傅里叶变换的标准快速算法是 FFT 算法, 但它是一种面向全局谱的计算方法, 为了满足对局部谱高分辨分析的需求, 人们

又相继提出了多种 Zoonr-FFT 算法, 以及傅里叶变换的单频点快速算法。同理, 分解型算法可以看作是 FRFT 的一种标准快速算法, 那么也可以设法对 FRFT 建立高分辨算法和单点计算方法。本文遵循这样一种思路, 借鉴和利用了傅里叶变换高分辨算法和单点算法中的一些技巧, 从而分别提出了 FRFT 高分辨算法和单点快速算法。

## 参考文献:

- [1] L B Almeida. The fractional Fourier transform and time-frequency representations[J]. IEEE Trans on SP, 1994, 42(11): 3084 - 3091.
- [2] Ozaktas H M, et al. Digital computation of the fractional Fourier transform[J]. IEEE Trans on SP, 1996, 44(9): 2141 - 2150.
- [3] S C Pei, M H Yeh. Discrete fractional Fourier transform based on orthogonal projections[J]. IEEE Transactions on SP, 1999, 47(5): 1335 - 1347.
- [4] M Martone. A Multicarrier system based on the fractional

Fourier transform for time-frequency selective channels [J]. IEEE Transactions on Communications, 2001, 49(6): 1011 - 1020.

- [5] 赵兴浩,陶然. 基于分数阶相关的无源雷达动目标检测方法[J]. 电子学报, 2005, 33(9): 1567 - 1570.

Zhao Xing-hao, Tao ran. A new method for passive radar MTD based on the fractional correlation[J]. Acta Electronica Sinica, 2005, 33(9): 1567 - 1570. (in Chinese)

- [6] 齐林,陶然,周思永,王越. DSSS 系统中基于分数阶傅立叶变换的扫频干扰抑制算法[J]. 电子学报, 2004, 32(5): 799 - 802.

Qi Lin, Tao Ran, Zhou Si-yong, Wang Yue. Frequency sweeping interference suppressing in DSSS system using fractional Fourier transform[J]. Acta Electronica Sinica, 2004, 32(5): 799 - 802. (in Chinese)

#### 作者简介:



赵兴浩 男, 1969 年 10 月生于河北石家庄, 北京理工大学电子工程系讲师, 1991 年毕业于华中理工大学, 获学士学位, 1999 年 9 月至 2005 年 3 月于北京理工大学硕博连读, 获通信与信息系统博士学位; 获部级科技进步二等奖 1 项, 以第一作者发表论文 10 余篇. 主要研究方向: 现代信号处理理论与应用、雷达电子对抗技术等. E-mail: Zhaoxinghao03@bit.edu.cn



陶然 男, 1964 年 11 月生于安徽南陵, 1993 年于哈尔滨工业大学获博士学位, 现任北京理工大学信息安全与对抗学科首席教授、博士生导师、国家杰出青年科学基金获得者、IEEE 高级会员. 获高校青年教师奖和中国兵工青年科技奖, 部级科技进步一、二等奖各 1 项. 以第一作者出版专著、教材 4 部. 在 IEEE 汇刊、Signal Processing、中国科学、电子学报、兵工学报上发表论文 70 余篇, 以第一申请人已获授权 2 项, 已申报发明专利 26 项. 研究方向: 分数阶傅里叶变换理论及应用、通信与信息系统、信息安全与对抗. E-mail: rantao@bit.edu.cn