

# 一种改进的 IC 互连线 3D 电容提取快速层级算法

丁文<sup>1,2</sup>, 王高峰<sup>2</sup>, 陈 曦<sup>2</sup>

(1. 武汉大学物理科学与技术学院, 湖北武汉 430072; 2. 武汉大学微电子信息信息技术研究院, 湖北武汉 430072)

**摘要:** 快速层级算法(FHM)是边界元法求解 3D 电容积分方程的一种加速方法,该方法基于分层近似对电势系数矩阵隐式表示,使求解的时间复杂度降低到  $O(n)$ .改进算法对 FHM 做了两点改进:(1)给出了分层近似的理论依据,这种分层依据适用于所有导体结构而无需重复试验.(2)利用层级关系,直接计算面电荷,避免了迭代过程,加速了电荷求解.一系列典型 3D 互连线结构的测试显示:改进后的算法不仅提高了求解精度,而且计算时间也减少到改进前的 1/3.

**关键词:** IC 互连线; 快速层级算法; 电容参数提取; 边界元法

**中图分类号:** TN391.72 **文献标识码:** A **文章编号:** 0372-2112(2007)08-1495-04

## An Improved Fast Hierarchical Method for Three-Dimensional Capacitance Extraction of IC Interconnects

DING Wen<sup>1,2</sup>, WANG Gao-feng<sup>2</sup>, CHEN Xi<sup>2</sup>

(1. Physics Department, Wuhan University, Wuhan, Hubei 430072, China;

2. Institute of Microelectronics and Information Technology, Wuhan University, Wuhan, Hubei 430072, China)

**Abstract:** An improved fast hierarchical method (IFHM) for three dimensional (3-D) capacitance extraction of IC Interconnects is presented. The fast hierarchical method (FHM) has been utilized for acceleration of the boundary element method (BEM) in solving the integral equations associated with the 3-D capacitance extraction problem. However, there is a shortcoming of the original FHM method: the criterion for hierarchical approximation is not explained and lack of theoretical support. The criterion plays a key role in the tradeoff between acceleration and precision. In the original FHM method the hierarchical approximation criterion was gained by a trial and error scheme. Here, specific and quantitative criterion is proposed in this improved FHM method. In addition, a new effective hierarchical scheme for charge evaluations is also proposed. The IFHM results in higher accuracy with about 1/3 computational time than the original FHM. Numerical examples are included to demonstrate the efficiency of this proposed IFHM.

**Key words:** IC interconnects; fast hierarchical method; capacitance extraction; boundary element method

### 1 引言

芯片上互连线(our chip interconnects)的电性能已成为大规模集成电路(IC)发展的瓶颈.随着 IC 工艺尺寸的缩小,新一代芯片上连接线的数量正在急剧增加,与此同时连接线更加细小也分布得更更为密集.不断增加的互连线电容使 RC 时延成为限制集成电路性能的主要因素,此外电容性耦合引起的串扰已经成为集成电路芯片重要的噪声来源之一.基于上述原因,在集成电路的时序分析和噪声分析中,必须建立互连线 RC 网络模型<sup>[1]</sup>.因此在深亚微米集成电路的设计和封装中,电容参数的提取成为一项必不可少的关键工作.

边界元方法求解 3D 电容矩阵的主要问题是:在求解电势积分方程的过程中生成稠密的系数矩阵.针对这一问题快速层级算法<sup>[2]</sup>通过分层近似对电势系数的隐式求解达到电容矩阵加速提取.然而快速层级算法在 3D 电容参数求解中存在以下缺点:(1)分层近似条件不

好确定,反复试验的方法操作不便;(2)层级关系在线性方程组的求解中应用不充分,没有使层级加速性能得到充分发挥.

本文针对以上问题,通过对层级近似和分层原理的深入研究,改进了快速层级算法的关键步骤,提出了精度更高、加速性能更优越的改进型层级加速算法(IFHM),并开发出基于 IFHM 算法的软件包,该软件包集成在武汉大学微电子信息信息技术研究院自行研制的 IC 互连线 3D 电容提取软件 QXI 中.

### 2 快速层级算法(FHM)的基本原理

#### 2.1 互连线 3D 电容的求解

对于一个由  $m$  个导体组成的结构,电容矩阵是一个  $m \times m$  矩阵,用  $C$  表示.其中每一元素  $C_{ij}(i, j = 1, 2, \dots, m)$  代表导体  $j$  与导体  $i$  之间的耦合电容(如果  $i = j$  则为导体  $i$  的自电容).矢量  $Q = [q_1, q_2, \dots, q_m]$  和矢量  $V = [v_1, v_2, \dots, v_m]$  分别代表导体结构的电荷矢量和电

势矢量.

$$\text{由} \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ \vdots \\ q_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & \dots & C_{1m} \\ C_{21} & C_{22} & & C_{2m} \\ \vdots & & & \vdots \\ C_{m1} & C_{m2} & \dots & C_{mm} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_m \end{bmatrix} \quad (1)$$

设定  $v_i = 1, v_j = 0, j = 1, 2, \dots, m$  且  $j \neq i$ , 则对应电荷矢量等于电容矩阵第  $i$  列. 于是当  $i$  分别取值  $1, 2, \dots, m$  时, 求解对应电荷矢量  $Q$ , 就可以得到  $m \times m$  的电容矩阵.

静电场电势积分方程如下:

$$\Psi(\mathbf{r}) = \int_{\text{surface}} \sigma(\mathbf{r}') G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') da' \quad (2)$$

其中  $\Psi(\mathbf{r})$  是已知场点电势,  $G(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$  是格林函数,  $\mathbf{r}'$  和  $\mathbf{r}$  分别代表源点和场点,  $\sigma$  是导体表面电荷密度,  $da'$  是面元微分. 根据以上分析, 只要求出  $\sigma(\mathbf{r}')$  问题就得到解决.

采用矩量法<sup>[3]</sup>对式(2)数值求解, 将导体结构(由  $m$  个导体组成)表面划分成  $n$  个小面元, 假定小面元内部电荷均匀分布. 按照式(2)对各小面元建立方程, 得到线性方程组如下

$$Pq = V \quad (3)$$

其中  $q \in R^n, q_i$  代表小面元  $i$  内电荷.  $V \in R^n, v_i$  代表小面元  $i$  电势. 系数矩阵  $P \in R^{n \times n}$ , 电势系数:

$$P_{ij} = \frac{1}{\text{area}(A_i)} \times \int_{r \in A_i} \frac{1}{\text{area}(A_j)} \int_{r' \in A_j} G(\mathbf{r}_i, \mathbf{r}_j) da_j da_i \quad (4)$$

$P_{ij}$  表示单位电荷小面元  $j$  对小面元  $i$  的电势, 称为电势系数,  $P$  称作电势系数矩阵. 求解方程组(3)得到各小面元电荷, 同一导体上的小面元相加得到导体表面电荷, 将这个过程进行  $m$  次就可以解出电容矩阵  $C$ .

### 2.2 快速分层算法简介

对电势系数直接求解, 获得的电势系数矩阵  $P$  将是  $n \times n$  的满矩阵, 此时式(3)求解的时间、空间复杂度至少为  $O(n^2)$ . 而采用快速分层算法(FHM), 可以使时间复杂度降低到  $O(n)$ . 下面分别对层级近似和分层加速原理进行简单介绍.

#### 2.2.1 层级近似

以真空中面电荷  $A$  对空间某一点电势为例. 设包含  $A$  的最小球半径  $R$ , 场点  $x$  距球心为  $r, r > R$ . 首先将  $A$  划分成两相等小面元  $A_1$  和  $A_2$ , 假定  $A_1, A_2$  各自电荷均匀分布, 电荷密度分别是  $\sigma_1$  和  $\sigma_2$ , 则场点电势:

$$\int_{x' \in A_1} \frac{\sigma_1}{4\pi\epsilon_0 \|x - x'\|} da' + \int_{x' \in A_2} \frac{\sigma_2}{4\pi\epsilon_0 \|x - x'\|} da' \quad (5)$$

然后假设  $A$  电荷总量不变, 整体上均匀分布, 这时电荷密度为  $(\sigma_1 + \sigma_2)/2$ , 场点电势

$$\int_{x' \in A} \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2} \frac{1}{4\pi\epsilon_0 \|x - x'\|} da' \quad (6)$$

不失一般性, 假设  $\sigma_2 \geq \sigma_1$ , 式(6)和(5)的差

$$\begin{aligned} & \frac{\sigma_2 - \sigma_1}{2} \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left( \int_{A_1} \frac{1}{\|x' - x\|} da' - \int_{A_2} \frac{1}{\|x' - x\|} da' \right) \\ & \leq \frac{\sigma_2 - \sigma_1}{2} \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{A_1} \left( \frac{1}{\|x' - x\|} - \frac{1}{\|x' - x\| + R} \right) da' \\ & \leq \frac{\sigma_2 - \sigma_1}{2} \frac{R}{r} \int_{A_1} \frac{1}{4\pi\epsilon_0 \|x' - x\|} da' \end{aligned} \quad (7)$$

可以看出式(6)和(5)相对误差至多是  $R/r$  的常数倍. 当  $R/r \rightarrow 0$  (或  $R/r \ll 1$ ) 时, 层级近似误差可以得到很好控制.

#### 2.2.2 分层加速原理

快速层级算法是通过将分层近似应用到面元的划分和电势系数的隐式表示从而实现 3D 电容加速求解. 采用了分层加速算法后获得的电势系数矩阵  $P$  是一个高度稀疏的矩阵. 下面以面元  $A$  和面元  $H$  相互作用为例介绍层级近似在电势系数矩阵中的应用, 从而揭示分层加速的原理.

图 1<sup>[2]</sup> (a)  $A, H$  为初始面电荷元, 由于  $A$  和  $H$  不满足层级近似条件:  $R/r \ll 1$ , 即  $A, H$  上电荷不能视为均匀分布, 需将  $A, H$  划分如图 1(b) 所示. 图 1(b) 中  $BJ, CJ, CI$  相互之间满足层级近似条件, 因此可以对  $P_{BJ}, P_{CJ}$  和  $P_{CI}$  按照式(4)进行计算和保存; 剩下  $B$  和  $I$  之间尚不满足层级近似条件, 这时对  $B, I$  进一步划分, 如图 1(c) 所示. 图 1(c)、(d) 依次类推, 到图 1(e) 时刻划分结束. 图 2<sup>[2]</sup> 是对电势系数的记录, 每一条双箭头线表示记录的一个电势系数. 从图 2 可以看出, 一共只需记录 24 个电势系数就可以完整表示电势系数矩阵  $P$ . 图 1

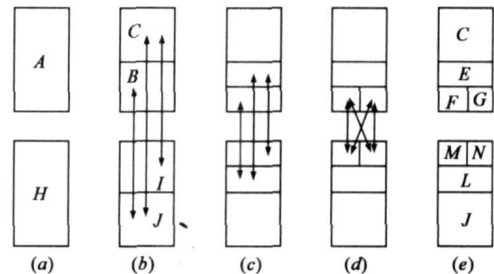


图 1 根据层级近似原理对面元划分

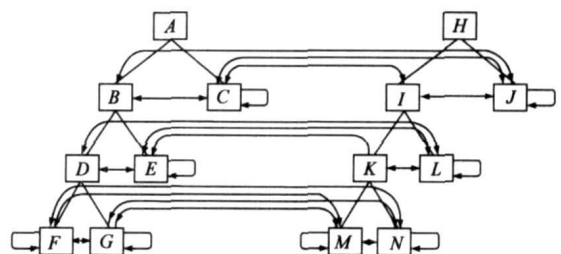


图 2 电势系数分层存储结构

(e) 显示划分结束时最终有 8 个小面元, 如果直接计算电势系数, 将会得到一个  $8 \times 8$  的电势系数矩阵, 电势系数需要计算 64 次. 从图 2 可以看出, 采用分层近似, 同一面元的两子面元可以共享其父面元的电势系数, 如  $F, G$  有公共父面元  $D$ , 则  $P_{FL} = P_{GL} = P_{DL}$ ,  $P_{FE} = P_{GE} = P_{DE}$ , 这样节省了大量计算时间. 此外在求解式(3)时还可以利用电势系数的层级关系实现进一步的加速, 后面有详细介绍.

### 3 改进的层级加速算法

#### 3.1 分层划分条件

从 2.2.1 对层级近似的分析知道: 层级近似相对误差至多是  $R/r$  的常数倍, 即

$$|\Psi - \psi| \leq K * \frac{R}{r} < P_{eps} \quad (8)$$

其中  $\Psi$  和  $\psi$  分别是划分前后的电势,  $K$  为常数. 要在 3D 电容参数提取中合理应用层级近似就必须对  $K$  和  $R/r$  的取值进行研究. FHM<sup>[2]</sup> 对此采取不断试验、比较的方法, 即: 通过对  $K$  和  $R/r$  取不同值, 应用快速分层算法对 3D 电容进行求解, 并将电容求解的结果与商业软件 FastCap 的计算结果进行比较. 通过误差分析, 确定  $K$  和  $R/r$  与电容提取计算误差的对应关系. 这样, 对于不同导体结构需进行重复试验, 操作十分不便. 本论文通过对 3D 导体结构表面层级划分的大量试验和电势系数级数展开, 提出了更为科学的分层划分依据.

观察电势误差多级展开公式<sup>[4]</sup>

$$\left| \Psi(r_i, \phi_i, \theta_i) - \sum_{m=0}^l \sum_{n=-m}^m \frac{M_n^m}{n+1} Y_n^m(\phi_i, \theta_i) \right| \leq K_1 \left( \frac{R}{r_i} \right)^{l+1} \leq K_1 \left( \frac{R}{r} \right)^{l+1} \quad (9)$$

其中  $l$  是展开的阶,  $K_1$  是跟展开阶无关的常数. 根据式(9), 对零阶展开近似, 电势误差为

$$|\Psi - \psi| \leq K_1 * \frac{R}{r} \quad (10)$$

对比式(8)和(10), 发现层级近似的误差与零阶展开误差相等. 基于此, 可以使层级加速算法的结果与二阶 FastCap 计算结果逼近.

在二阶 FastCap(以下用 FastCap(2) 表示二阶 FastCap) 中  $R/r$  取 0.5, 这样二阶展开误差为

$$|\Psi - \psi| \leq K_1 \left( \frac{1}{2} \right)^3 \approx 0.125 K_1 \quad (11)$$

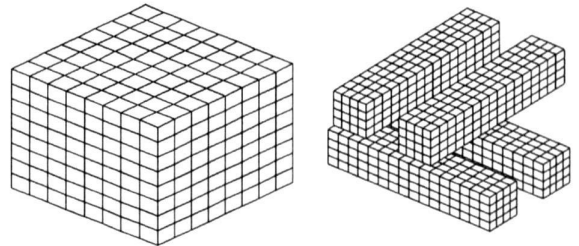
为了使式(8)逼近式(11), 只要在分层近似中对  $R/r$  取 0.125 就可以了. 这样做实际上是以较小的面元来弥补零阶展开的误差, 因此可以比 FastCap(2) 达到更高的精度. 另外, 虽然面元数量增多, 但是由于零阶展开的计算量远小于二阶展开, 因此并不会增加计算开销. 下面分析  $P_{eps}$  的取值.

本文采用层级近似原理对大量导体结构表面进行四边形面元划分, 研究发现: 划分结束时, 小面元长短边长度之比几乎都控制在 1 和 2 之间, 即:

$$1.0 \leq \frac{l_{\max}}{l_{\min}} \leq 2.0 \quad (12)$$

分子和分母分别为长边、短边的长度.

图 3(a) 和(b) 分别是对立方体和  $2 \times 2$  交叉导体表面进行分层划分的结果.



(a) 立方导体表面划分 (b)  $2 \times 2$  交叉结构导体表面划分

图 3 导体结构表面划分

我们分别对正方形单位电荷小面元和长宽比为 2:1 的单位电荷长方形面元进行研究. 分别计算面元的中心电势  $U$  及  $U$  与边长  $R$  的乘积(长方形取长边). 对电势的计算采用了<sup>[5]</sup> 提出的解析公式. 如表 1 所示.

表 1 单位电荷面元中心电势

尺寸	$U$	$R$	$U * R$
1.0 × 1.0	0.03168	1.0	0.03168
0.5 × 0.5	0.06337	0.5	0.03168
1.0 × 0.5	0.04325	1.0	0.04325
0.5 × 0.25	0.08650	0.5	0.04325

从表 1 可以看出,  $P_{eps}$  的取值范围:  $0.03168 \times 0.125 \leq P_{eps} \leq 0.04325 \times 0.125$ , 即:

$$0.004 \leq P_{eps} \leq 0.0054 \quad (13)$$

试验证明,  $P_{eps}$  取 0.004 误差就可以控制在 0.5% 以内了.

#### 3.2 更加高效的层级结构

采用 CMRES 方法<sup>[6]</sup> 求解线性方程组(3) 的每一次迭代中, FHM<sup>[2]</sup> 都包含两个步骤: (1) 计算各层次面元的电荷; (2) 利用面元上的电荷计算电势, 并把电势从父面元逐级传递到子面元, 最后叶面元电势等于设定电势. 由于在分层划分中各级面元已经建立了层级关系, 只要对面元一次性建立起层级结构, 步骤(1) 就可以直接计算各面元电荷. 以图 4 为例进行说明.

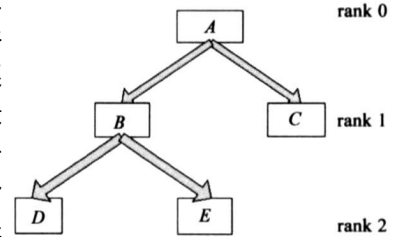


图 4 分层划分的层级结构

采用分层划分, 将初始面元  $A$  划分成  $B, C$ , 然后对  $B$  进一步划分成  $D, E$ . 根据面元在分层划分中的不同层次引入了层级(Rank). 初始面元在层级 0, 每次划分,

采用分层划分, 将初始面元  $A$  划分成  $B, C$ , 然后对  $B$  进一步划分成  $D, E$ . 根据面元在分层划分中的不同层次引入了层级(Rank). 初始面元在层级 0, 每次划分,

新生面元层级自动加 1, 因此最远端的面元层级最高. 以图 4 为例,  $A$  的层级是 0,  $B$  和  $C$  在层级 1, 最高层级 2 有  $D$  和  $E$ . 有了层级结构, 下面根据层级结构对各面元电荷进行表示.

(1) 从最高层级 Rank 2 开始, 由于  $D$  和  $E$  是叶面元, 电荷用  $Q_D$  和  $Q_E$  表示. 这里  $Q_i$  代表面元  $i$  上电荷.

(2) 往上到 Rank 1, 这一层包含  $B$  和  $C$ ,  $C$  是叶面元, 电荷是  $Q_C$ ,  $B$  上电荷用其子面元  $D$ 、 $E$  之和表示:

$$Q_B = Q_D + Q_E$$

(3) 往上到顶层 Rank 0:

$$Q_A = Q_B + Q_C = (Q_D + Q_E) + Q_C$$

只要一次性建立以上层级结构和分层关系, 步骤 (1) 就可以实现直接求解, 从而更充分的发挥层级的优势.

#### 4 试验比较

为了测试改进后的分层算法效率和精度, 选取了典型 3D 互连线路结构, 对 FastCap(2)、FHM 和改进的分层算法(IFHM)进行了比较测试. 测试用例采用  $k \times k$  交叉导体结构,  $k$  取 2 到 6.  $k \times k$  交叉导体结构中导体条的几何尺寸是  $1\mu\text{m} \times 1\mu\text{m} \times (2k+1)\mu\text{m}$ . 同一层导体条间距是  $1\mu\text{m}$ , 不同层间的垂直间距也是  $1\mu\text{m}$ .  $4\pi\epsilon_0$  取  $111.27\text{pF/m}$ .

在同一台 PC 机上分别采用以上三种算法计算上述导体结构的 3D 电容, 得到的结果如图 5、图 6 所示.

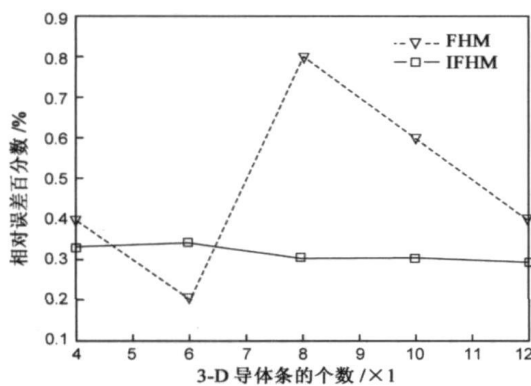


图 5 计算精度比较

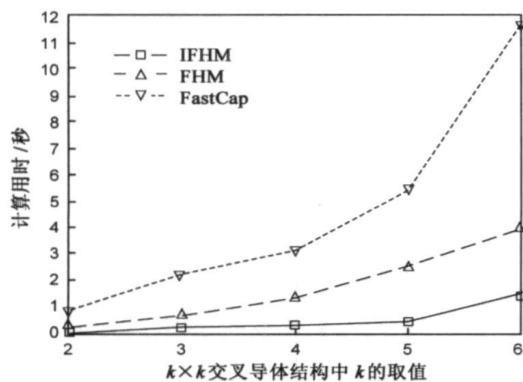


图 6 计算时间比较

图 5 列出了原 FHM 和改进后算法的计算精度. 这里将 FastCap(2) 的计算结果作为标准值  $C$ , 其他算法的计算结果为  $C'$ , 相对误差公式是:  $\|C - C'\| / \|C\|$ , 其中  $C$  代表电容矩阵. 比较显示改进后的算法明显地提高了 3D 电容的提取精度.

图 6 比较了三种方法求解 3D 电容所用时间, 可以看出改进的层级加速方法不仅比 FastCap(2) 快, 而且相对于 FHM, 效率也得到了大幅提升.

#### 5 总结

本文对分层加速算法中分层划分条件和层级数据结构进行了改进, 使划分更加合理、高效. 分层划分条件经改进后, 电容矩阵的计算精度相对于 FastCap(2) 逼近得更好, 由于分层划分方法依据面元之间电势作用进行划分, 其划分比 FastCap(2) 更加科学, 也更为精确. 改进后的分层算法, 无需多级展开, 其计算精度就可以与 FastCap(2) 相当, 而其计算量大大减少. 改进后的层级结构在求解方程组 (3) 时更加直接、高效. 本算法作为软件包集成于武汉大学微电子与信息技术研究院自行研制的 IC 互连线 3D 电容提取软件 QXT 中.

#### 参考文献:

- [1] SHEPARD K L, et al. Global harmony: coupled noise analysis for full chip RC interconnect network [A]. Proceedings of the 1997 IEEE/ACM international conference on Computer aided design [C]. San Jose: IEEE, 1997. 139- 146.
- [2] SHI W P, et al. A fast hierarchical algorithm for three dimensional capacitance extraction [J]. IEEE Trans CADIC, 2002, 21 (3): 330- 336.
- [3] HARRINGTON R F. Matrix methods for field problems [J]. Proceedings of IEEE, 1967, 55 (2): 136- 149.
- [4] NABORS K, et al. Fast capacitance extraction of general three dimensional structures [J]. IEEE Trans MTT, 1992, 40 (7): 1496- 1506.
- [5] NEWMAN J N. Distributions of sources and normal dipoles over a quadrilateral panel [J]. Journal of Engineering Mathematics, 1986, 20(2): 113- 126.
- [6] SAAD Y, SCHULTZ M H. GMRES: A generalized minimal residual algorithm for solving nonsymmetric linear systems [J]. SIAM J, 1996, 7(3): 856- 869.

#### 作者简介:



丁文男, 1982 年出生, 武汉大学物理系微电子专业博士生. 研究方向为计算电磁学.

E-mail: whoisdingwen@yahoo.com