

二值命题逻辑公式的语构程度化方法

张东晓¹, 李立峰²

(1. 集美大学理学院, 福建厦门 361021; 2. 西安邮电学院应用数理系, 陕西西安 710061)

摘要: 本文从语构理论入手, 在经典二值命题逻辑系统中给出公式的语构真度的概念, 从两个不同的角度给出语构真度的等价刻画. 给出语构真度的实例, 说明原来在语义下的真度是语构真度, 并且由语构真度诱导的相似度和伪距离具有语义下相似度和伪距离的基本性质. 给出 \mathcal{T} 相容理论的概念, 指出 \mathcal{T} 相容理论和相容理论的内在关系.

关键词: 二值命题逻辑; 真度理论; 语构真度; \mathcal{T} 相容理论

中图分类号: O142 **文献标识码:** A **文章编号:** 0372-2112(2008)02-0325-06

Syntactic Graded Method of Two-Valued Propositional Logic Formulas

ZHANG Dong-xiao¹, LI Li-feng²

(1. School of Science, Jimei University, Xiamen, Fujian 361021, China;

2. Department of Applied Mathematics and Physics, Xi'an College of Posts and Telecommunications, Xi'an, Shaanxi 710061, China)

Abstract: From the syntactical point of view, the concept of the syntactic truth degree of formulas is proposed in two-valued propositional logic system. Two equivalent depiction theorems about syntactic truth degree are introduced. Examples of syntactic truth degree illustrate that the original truth degree from semantics is a special syntactic truth degree. It is pointed out that the similarity degree and pseudo metric induced by syntactic truth degree possess respectively the basic properties of similarity degree and pseudo metric from semantics. The concept of \mathcal{T} consistent theory is given. Then the intrinsic relation between \mathcal{T} consistent and consistent theory is pointed out.

Key words: two-valued propositional logic; truth degree theory; syntactic truth degree; \mathcal{T} -consistent theory

1 引言

对逻辑公式的程度化一直以来是众多学者关注的焦点^[1~9], 文献[3]针对模糊命题逻辑系统给出公式的积分真度理论, 而且积分真度理论也适用于其他模糊逻辑系统, 比如模糊命题逻辑系统 \mathcal{L} . 以积分真度理论为基础文献[10, 11]给出并讨论了逻辑度量空间, 文献[12~14]讨论了理论相容度问题. 此外, 针对二值命题逻辑公式, 文献[4]给出一种合理的程度化方法, 以此确立了二值命题逻辑公式的真度理论, 并给出公式间的相似度和伪距离, 实现了公式集 $F(S)$ 的度量, 为在二值命题逻辑系统中实现近似推理提供了一种理论框架. 近期王国俊教授将这一理论的研究成果系统地编著成计量逻辑学^[15, 16], 将数值计算有机地结合到数理逻辑中, 为数理逻辑的发展开辟了新的道路.

以上关于逻辑公式的程度化方法都是从语义角度入手的, 不妨称之为语义程度化方法. 我们知道, 一个好的逻辑系统的语义和语构应该是和谐的, 即, 应该有完

备性定理成立. 既然基于语义理论可以实现逻辑公式的程度化, 那么一个自然的问题就是是否可以从语构的角度给出逻辑公式的程度化, 从而从语构的角度对计量逻辑有新的发展? 我们正是基于这一考虑, 在二值命题逻辑系统 L 中提出语构真度理论, 给出逻辑公式的语构程度化方法. 限于篇幅关系本文只讨论二值命题逻辑的情形, 而针对模糊逻辑和多值逻辑的相关讨论将在另文中说明.

2 预备知识

2.1 语构理论

一个形式系统由字符表, 公式集, 公理集, 推理规则集四个部分组成. 逻辑系统 L 是一个特殊的形式系统, 其字符表为: $\neg, \rightarrow, (,), p_1, p_2, p_3, \dots$, 其公式集 $F(S)$ 是由 $S = \{p_1, p_2, p_3, \dots\}$ 生成的 (\neg, \rightarrow) 型自由代数.

L 的公理集包含以下三种形式的公式:

$$(L1) A \rightarrow (B \rightarrow A).$$

$$(L2) (A \rightarrow (B \rightarrow C)) \rightarrow ((A \rightarrow B) \rightarrow (A \rightarrow C)).$$

(L3) $(\neg A \rightarrow \neg B) \rightarrow (B \rightarrow A)$.

L 的推理规则只有一条, 即 MP: 从 $A \rightarrow B$ 与 A 推得 B .

L 的证明是一个有限的公式序列 A_1, A_2, \dots, A_n , 这里对每个 $i \leq n, A_i$ 是公理或者存在 $j < i, k < i$, 使 A_i 是由 A_j 与 A_k 运用 MP 推得的结果. 这时 A_n 叫做 L 中的定理, 上述过程叫 A_n 的证明. A_n 是定理可记为 $\vdash A_n$. 其中, n 叫证明的长度. 称定理的否定形式为可驳公式, 下文以 $\bar{1}$ 表示定理, 以 $\bar{0}$ 表示可驳公式.

若 $\vdash A \rightarrow B$ 且 $\vdash B \rightarrow A$, 则称 A 与 B 可证等价, 记作 $A \sim B$. 在 L 中引入记号 \vee, \wedge , 规定, $A \vee B = \neg \neg (A \rightarrow B)$, $A \wedge B = \neg(\neg A \vee \neg B)$.

2.2 语义和计量逻辑理论

设 $\{0, 1\}, \neg, \rightarrow$ 是一个 Boole 代数, 其中

$$\neg 0 = 1, \neg 1 = 0, 1 \rightarrow 1 = 1, 0 \rightarrow 1 = 1, 0 \rightarrow 0 = 1, 1 \rightarrow 0 = 0.$$

设 $v: F(S) \rightarrow \{0, 1\}$ 是映射, 若 v 满足:

$$v(\neg A) = \neg v(A), v(A \rightarrow B) = v(A) \rightarrow v(B),$$

则称 v 为 $F(S)$ 的赋值, $v(A)$ 称作公式 A 的赋值. 可以验证 $\forall A, B \in F(S), v(A \vee B) = v(A) \vee v(B), v(A \wedge B) = v(A) \wedge v(B)$.

若对任意赋值 v , 都有 $v(A) = 1$, 则称 A 为重言式, 若都有 $v(A) = 0$, 则称 A 为矛盾式. 若对任意赋值 v , 都有 $v(A) = v(B)$, 则称 A 和 B 是逻辑等价的, 记作 $A \approx B$.

在 L 中完备性定理成立, 即, A 是定理当且仅当 A 是重言式, 从而, $A \sim B$ 当且仅当 $A \approx B$. 因此, 判断某公式是否是定理就只需判断它是否是重言式, 而判断重言式是非常便捷的. 下文提到的定理和可证等价的公式都未给出语构上的证明, 但都可以通过语义得到验证.

设 $A = A(p_1, p_2, \dots, p_n)$ 是 L 中含有 n 个原子命题的公式. $\forall (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \{0, 1\}^n$, 令 $\bar{A}(x_1, x_2, \dots, x_n)$ 为分别以 x_i 代替 p_i 之后所得的式子 ($i = 1, 2, \dots, n$), 如果将保留下来的逻辑连接符 \neg, \rightarrow 分别理解为 Boole 运算符 \neg, \rightarrow , 则 $\bar{A}(x_1, x_2, \dots, x_n) \in \{0, 1\}$. 这样就得到了一个从 $\{0, 1\}^n$ 到 $\{0, 1\}$ 的函数 \bar{A} , 称其为由公式 $A(p_1, p_2, \dots, p_n)$ 导出的 Boole 函数. 记 $\bar{A}^{-1}(1) = \{(x_1, x_2, \dots, x_n) \in \{0, 1\}^n \mid \bar{A}(x_1, x_2, \dots, x_n) = 1\}$, $|\bar{A}^{-1}(1)|$ 为集合 $\bar{A}^{-1}(1)$ 的元素个数. 则从计算概率的观点可以给出公式 $A(p_1, p_2, \dots, p_n)$ 的真实程度 (或重言度) 的如下刻画:

定义 1^[4, 15] 设 $A = A(p_1, p_2, \dots, p_n)$ 是 L 中含有 n 个原子命题的合式公式, 则 A 的真度 $\tau(A)$ 定义如下:

$$\tau(A) = \frac{|\bar{A}^{-1}(1)|}{2^n}.$$

定义 2^[15] 设 $A, B \in F(S)$, 令 $\xi(A, B) = \tau((A \rightarrow B) \wedge (B \rightarrow A))$, 称 $\xi(A, B)$ 为公式 A 与 B 之间的相似度.

有了相似度的概念, 便可在 $F(S)$ 中引入伪距离. $\forall A, B \in F(S)$, 令 $\rho(A, B) = 1 - \xi(A, B)$, 则 ρ 为 $F(S)$ 的伪距离.

相似度和伪距离都有很好的性质 (见文献 [15]), 下文将考虑更一般的相似度和伪距离, 并证明它们保持这里给出的相似度和伪距离的基本性质.

3 中公式的语构真度

定义 3 在二值命题逻辑系统 L 中, 设 $\tau^*: F(S) \rightarrow [0, 1]$ 是映射, 如果:

$$(K1) \tau^*(L) = 1, \text{ 这里 } L \text{ 为 L 中的公理.}$$

$$(K2) \tau^*(\neg A) = 1 - \tau^*(A), A \in F(S).$$

$$(K3) \tau^*(A \rightarrow B) + \tau^*(A) = \tau^*(B \rightarrow A) + \tau^*(B), A, B \in F(S).$$

则称 τ^* 为 L 中 $F(S)$ 的语构真度函数, 简称为 L 中 $F(S)$ 的真度. 特别地, 称 $\tau^*(A)$ 为 L 中公式 A 的 τ^* -真度.

为了和定义 1 中的真度区分, 这里加了上标 *, 在不致混淆的情况下, 下文将其简记为 τ

命题 1 设 $A, B \in F(S), \alpha, \beta \in [0, 1]$, 则

$$(1) \text{ 若 } \tau(A) \geq \alpha, \tau(A \rightarrow B) \geq \beta, \text{ 则 } \tau(B) \geq \alpha + \beta - 1.$$

$$(2) \text{ 若 } \tau(A) = 1, \tau(A \rightarrow B) = 1, \text{ 则 } \tau(B) = 1.$$

证明 注意到 $\forall A, 0 \leq \tau(A) \leq 1$, 由 (K3) 便直接得到 (1). (2) 是 (1) 的直接结果.

称命题 1 中 (2) 为 τ MP 规则. 则由 (K1) 和 τ MP 规则以及 (K2) 立即得到如下

命题 2 设 $A \in F(S)$, 则

$$(1) \text{ 若 } \vdash A, \text{ 则 } \tau(A) = 1.$$

$$(2) \text{ 若 } A \text{ 为可驳公式, 即 } \vdash \neg A, \text{ 则 } \tau(A) = 0.$$

推论 1 设 $A \in F(S), \alpha, \beta \in [0, 1]$, 则

$$(1) \text{ 若 } \tau(A \rightarrow B) \geq \alpha, \tau(B \rightarrow C) \geq \beta, \text{ 则 } \tau(A \rightarrow C) \geq \alpha + \beta - 1.$$

$$(2) \text{ 若 } \tau(A \rightarrow B) = 1, \tau(B \rightarrow C) = 1, \text{ 则 } \tau(A \rightarrow C) = 1.$$

证明 (2) 是 (1) 的直接结果, 只证明 (1). 由 $\vdash (A \rightarrow B) \rightarrow ((B \rightarrow C) \rightarrow (A \rightarrow C))$, $\tau(A \rightarrow B) \geq \alpha$ 以及命题 2 和命题 1 可知 $\tau((B \rightarrow C) \rightarrow (A \rightarrow C)) \geq \alpha + 1 - 1 = \alpha$. 由 $\tau(B \rightarrow C) \geq \beta$, 再用一次命题 1 便得 $\tau(A \rightarrow C) \geq \beta + \alpha - 1 = \alpha + \beta - 1$.

称推论 1 中 (2) 为 τ HS 规则.

命题 3 设 $A, B \in F(S)$, 则

$$(1) \text{ 若 } \tau(A \rightarrow B) = 1, \text{ 则 } \tau(A) \leq \tau(B).$$

$$(2) \text{ 若 } \vdash (A \rightarrow B), \text{ 则 } \tau(A) \leq \tau(B).$$

$$(3) \text{ 若 } A \sim B, \text{ 则 } \tau(A) = \tau(B).$$

证明 (2) 是(1)和命题 2 的直接结果, 而(3)是(2)的直接结果, 故只证明(1). 若 $\tau(A \rightarrow B) = 1$, 则由 (K3) 知 $\tau(A) = \tau(B) + \tau(B \rightarrow A) - 1 \leq \tau(B)$.

命题 4 设 $A, B \in F(S)$, 则

$$(1) \tau(A \vee B) + \tau(A \wedge B) = \tau(A) + \tau(B).$$

(2) 若 $\{A, B\}$ 不相容, 即 $\{A, B\}$ 可推出可驳公式, 则 $\tau(A \vee B) = \tau(A) + \tau(B)$.

证明 (1) 的证明如下(其中 $(A \wedge B) \sim \neg(B \rightarrow A)$):

$$\begin{aligned} \tau(A \vee B) &= \tau(\neg A \rightarrow B) & (A \vee B &= \neg A \rightarrow B) \\ &= \tau(B \rightarrow \neg A) + \tau(B) - \tau(\neg A) & (K3) \\ &= \tau(B) + \tau(A) - 1 + \tau(B \rightarrow \neg A) & (K2) \\ &= \tau(B) + \tau(A) - \tau(\neg(B \rightarrow \neg A)) & (K2) \\ &= \tau(B) + \tau(A) - \tau(A \wedge B) & (\text{命题 } 3(3)) \end{aligned}$$

即 $\tau(A \vee B) + \tau(A \wedge B) = \tau(A) + \tau(B)$.

(2) 若 $\{A, B\}$ 不相容, 则 $A \wedge B$ 为可驳公式, 从而 $\tau(A \wedge B) = 0$. 由(1)知此时 $\tau(A \vee B) = \tau(A) + \tau(B)$.

定理 1 设 $\tau: F(S) \rightarrow [0, 1]$ 是映射. 则 τ 为 $F(S)$ 的语构真度当且仅当以下条件对任意 $A, B \in F(S)$ 均成立:

$$(K1') \text{ 若 } \vdash A, \text{ 则 } \tau(A) = 1.$$

$$(K2') \text{ 若 } A \text{ 为可驳公式, 即 } \vdash \neg A, \text{ 则 } \tau(A) = 0.$$

$$(K3') \tau(A \vee B) + \tau(A \wedge B) = \tau(A) + \tau(B).$$

证明 必要性是显然的, 为证充分性先证如下事实:

$$(K1'), (K2'), (K3') \Rightarrow (K2), \quad (1)$$

$$(K1'), (K2'), (K3') \Rightarrow \text{若 } A \sim B, \text{ 则 } \tau(A) = \tau(B).$$

(2)

式(1)的证明. 由 $\vdash A \vee \neg A, \vdash \neg(A \wedge \neg A)$ 和 $(K1'), (K2')$ 知 $\tau(A \vee \neg A) = 1, \tau(A \wedge \neg A) = 0$. 故由 $(K3')$ 知 $\tau(A) + \tau(\neg A) = \tau(A \vee \neg A) + \tau(A \wedge \neg A) = 1$, 即得 $(K2)$, 从而式(1)成立.

式(2)的证明. 假设 τ 满足 $(K1'), (K2'), (K3')$. 若 $\vdash A \rightarrow B$, 则 $\vdash \neg A \vee B$. 由 $(K1')$ 知 $\tau(\neg A \vee B) = 1$. 又, $\tau(\neg A \vee B) = \tau(\neg A) + \tau(B) - \tau(\neg A \wedge B)$ $(K3')$

$$= 1 - \tau(A) + \tau(B) - \tau(\neg A \wedge B) \quad \text{式(1)}$$

故 $\tau(A) = \tau(B) - \tau(\neg A \wedge B) \leq \tau(B)$. 同理, 若 $\vdash B \rightarrow A$, 则 $\tau(B) \leq \tau(A)$. 由此便得式(2).

下证 $(K1'), (K2'), (K3') \Rightarrow (K3)$. 事实上, 由

$$A \rightarrow B \sim \neg A \vee B, B \rightarrow A \sim \neg B \vee A \text{ 和式(2) 知}$$

$$\tau(A \rightarrow B) + \tau(A) = \tau(\neg A \vee B) + \tau(A) \quad \text{式(2)}$$

$$= \tau(\neg A) + \tau(B) - \tau(\neg A \wedge B) + \tau(A) \quad (K3')$$

$$= 1 - \tau(\neg A \wedge B) + \tau(B) \quad \text{式(1)}$$

$$= \tau(\neg(\neg A \wedge B)) + \tau(B) \quad \text{式(1)}$$

$$= \tau(B \rightarrow A) + \tau(B) \quad \text{式(2)}$$

即得 $K3$.

此外, $(K1'), (K2'), (K3') \Rightarrow (K1)$ 是显然的. 总之, $(K1'), (K2'), (K3') \Rightarrow (K1), (K2), (K3)$ 成立. 充分性

得证.

定理 2 设 $\tau: F(S) \rightarrow [0, 1]$ 是映射. 则 τ 为 $F(S)$ 的语构真度当且仅当以下条件对任意 $A, B \in F(S)$ 均成立:

$$(K1'') \text{ 若 } \vdash A, \text{ 则 } \tau(A) = 1.$$

$$(K2'') \text{ 若 } \vdash A \rightarrow B, \text{ 则 } \tau(A) \leq \tau(B).$$

$$(K3'') \text{ 若 } \{A, B\} \text{ 不相容, 则 } \tau(A \vee B) = \tau(A) + \tau(B).$$

证明 必要性是显然的, 由定理 1 知为证充分性只需证明如下事实:

$$(K1''), (K3'') \Rightarrow \tau(A) + \tau(\neg A) = 1,$$

$$\text{从而 } (K1''), (K3'') \Rightarrow (K2''), \quad (3)$$

$$(K2''), (K3'') \Rightarrow (K3'). \quad (4)$$

式(3)的证明. 由 $\{A, \neg A\}$ 不相容, 且 $\vdash A \vee \neg A$, 故由 $(K1'')$ 和 $(K3'')$ 知 $1 = \tau(A \vee \neg A) = \tau(A) + \tau(\neg A)$, 故式(3)中前半部分成立, 后半部分是显然的. 下面提到的式(3)均指前半部分.

式(4)的证明. 由 $(K2'')$ 知, 若 $A \sim B$, 则 $\tau(A) = \tau(B)$. 又, $\{\neg A \wedge \neg B, \neg A \wedge B\}$ 不相容, 而 $\neg A \sim (\neg A \wedge \neg B) \vee (\neg A \wedge B)$, 故

$$\begin{aligned} \tau(\neg A) &= \tau((\neg A \wedge \neg B) \vee (\neg A \wedge B)) \\ &= \tau(\neg A \wedge \neg B) + \tau(\neg A \wedge B). \end{aligned} \quad (K3'')$$

从而

$$\begin{aligned} \tau(\neg A \wedge B) &= \tau(\neg A) - \tau(\neg A \wedge \neg B) \\ &= 1 - \tau(A) - (1 - \tau(A \vee B)) \quad \text{式(3)} \\ &= \tau(A \vee B) - \tau(A) \end{aligned}$$

又, $\{\neg A \wedge B, A \wedge B\}$ 不相容, 而 $B \sim (\neg A \wedge B) \vee (A \wedge B)$, 故

$$\begin{aligned} \tau(B) &= \tau((\neg A \wedge B) \vee (A \wedge B)) \\ &= \tau(\neg A \wedge B) + \tau(A \wedge B) \quad (K3'') \\ &= \tau(A \vee B) - \tau(A) + \tau(A \wedge B) \quad (\text{已证结果}) \end{aligned}$$

即 $\tau(A \vee B) + \tau(A \wedge B) = \tau(A) + \tau(B)$, 也即 $(K3')$. 这就证明了式(4).

例 1 定义 1 给出的二值命题逻辑公式的真度 τ 是 L 中 $F(S)$ 的语构真度函数. 事实上不难验证 τ 满足 $(K1'), (K2'), (K3')$ (参见文献[4]), 由定理 1 便知它是语构真度函数. 从 τ 的定义来看, 这种语构真度函数是非常自然的, 是内蕴的, 故而称其为 L 中 $F(S)$ 的标准真度函数.

例 2 设 v 是赋值, 则容易验证 v 满足 $(K1''), (K2''), (K3'')$, 由定理 1 便知 v 为 $F(S)$ 的语构真度函数, 称其为平凡真度函数.

例 3 设 τ 为 L 中 $F(S)$ 的任一语构真度函数, 取公式 $E \in F(S)$, 使 $\tau(E) \neq 0$. 令 $\tau': F(S) \rightarrow [0, 1]$ 由下式确定:

$$\tau(A) = \frac{\tau(A \wedge E)}{\tau(E)}$$

则 τ 也是 L 中 $F(S)$ 的语构真度函数. 事实上, τ 显然满足 $(K1')$, $(K2')$. 由 τ 为语构真度函数知 $\forall A, B \in F(S)$, 有如下事实:

$$\begin{aligned} \tau((A \vee B) \wedge E) &= \tau((A \wedge E) \vee (B \wedge E)) \\ &= \tau(A \wedge E) + \tau(B \wedge E) - \tau((A \wedge E) \wedge (B \wedge E)) \\ &= \tau(A \wedge E) + \tau(B \wedge E) - \tau(A \wedge B \wedge E). \end{aligned}$$

故 $\tau((A \vee B) \wedge E) + \tau(A \wedge B \wedge E) = \tau(A \wedge E) + \tau(B \wedge E)$, 由 τ 的定义便知 $\tau(A \vee B) + \tau(A \wedge B) = \tau(A) + \tau(B)$. 即 τ 满足 $(K3')$. 由定理 1 知 τ 是 $F(S)$ 的语构真度函数.

注记 1 (1) $(K1)$, $(K2)$, $(K3)$ 中均未涉及定理和可驳公式, 亦没有涉及推理, 只是针对 L 中的公理和一般公式给出了定性描述, 故从语构理论的角度实现了公式的程度化.

(2) $(K1')$, $(K2')$, $(K3')$ 紧扣 L 中 $F(S)$ 的标准真度函数的基本性质, 其合理性和简洁性在实际操作和应用中给我们带来了很大的便利, 这一点从以上三个例子的验证过程就能体现出来.

(3) $(K1'')$, $(K2'')$, $(K3'')$ 这三个条件正是概率逻辑^[7]的基本概念(即概率真度)的定义, 这里给出真度函数的这一等价刻画是为了便于在相近学科之间有所沟通和比较.

命题 5 设 $A, B \in F(S)$, 则

$$\tau(A \wedge B) \leq \tau(A) \wedge \tau(B) \leq \tau(A) \vee \tau(B) \leq \tau(A \vee B)$$

命题 6 设 $A, B, A_i \in F(S)$, $i = 1, 2, \dots, n$. 则

$$(1) \tau(A \wedge B) \geq \tau(A) + \tau(B) - 1.$$

$$(2) \text{进一步, } \tau(A_1 \wedge A_2 \wedge \dots \wedge A_n) \geq \tau(A_1) + \tau(A_2)$$

$$+ \dots + \tau(A_n) - (n - 1).$$

证明 由 $(K3')$ 知 $\tau(A \wedge B) = \tau(A) + \tau(B) - \tau(A \vee B) \geq \tau(A) + \tau(B) - 1$. 由归纳法结合(1)易证(2).

推论 2 设 $A, B, A_i \in F(S)$, $i = 1, 2, \dots, n$. 则

$$(1) \tau(A) = \tau(B) = 1 \text{ 当且仅当 } \tau(A \wedge B) = 1.$$

$$(2) \text{进一步, } \tau(A_1) = \tau(A_2) = \dots = \tau(A_n) = 1 \text{ 当且}$$

$$\text{仅当 } \tau(A_1 \wedge A_2 \wedge \dots \wedge A_n) = 1.$$

对偶地可以得到

命题 7 设 $A, B, A_i \in F(S)$, $i = 1, 2, \dots, n$. 则

$$(1) \tau(A \vee B) \leq \tau(A) + \tau(B),$$

$$(2) \text{进一步, } \tau(A_1 \vee A_2 \vee \dots \vee A_n) \leq \tau(A_1) + \tau(A_2)$$

$$+ \dots + \tau(A_n).$$

推论 3 设 $A, B, A_i \in F(S)$, $i = 1, 2, \dots, n$. 则

$$(1) \tau(A) = \tau(B) = 0 \text{ 当且仅当 } \tau(A \vee B) = 0,$$

$$(2) \text{进一步, } \tau(A_1) = \tau(A_2) = \dots = \tau(A_n) = 0 \text{ 当且}$$

$$\text{仅当 } \tau(A_1 \vee A_2 \vee \dots \vee A_n) = 0.$$

4 \mathbb{F} 相容理论

设 $\Gamma \subseteq F(S)$, 通常称 Γ 为系统 L 中的理论. 从 Γ 到 A 的一个推演是一个公式序列 A_1, A_2, \dots, A_n , 这里 $A_n = A$, 且对每个 $i \leq n$, A_i 或者是 L 中的公理或者 $A_i \in \Gamma$, 或者有 $j < i$, $k < i$, 使 A_i 是由 A_j 与 A_k 运用 MP 而得到的公式. A 叫做 Γ 结论, 或称 Γ 推出 A , 记作 $\Gamma \vdash A$, n 叫推演长度. 记 $D(\Gamma)$ 为 Γ 结论之集. 从 Γ 的定义容易得到如下结果:

命题 8 设 Γ 为理论, 则 $\Gamma \vdash A$ 当且仅当存在 $A_1, A_2, \dots, A_n \in \Gamma$, 使得 $\{A_1, A_2, \dots, A_n\} \vdash A$.

定理 3(演绎定理)^[15] 设 Γ 为理论, $A, B \in F(S)$, 如果 $\Gamma \cup \{A\} \vdash B$, 则 $\Gamma \vdash A \rightarrow B$.

演绎定理的逆定理也成立. 多次运用演绎定理和其逆定理可得如下

命题 9 设 $A_1, A_2, \dots, A_n \in F(S)$, 则 $\{A_1, A_2, \dots, A_n\} \vdash A$ 当且仅当 $\vdash A_1 \wedge A_2 \wedge \dots \wedge A_n \rightarrow A$.

命题 10 设 Γ 为理论, $A \in F(S)$, 则

$\Gamma \vdash A$ 当且仅当存在 $A_1, A_2, \dots, A_n \in \Gamma$, 使得 $\vdash A_1 \wedge A_2 \wedge \dots \wedge A_n \rightarrow A$.

此外, 若 Γ 能推出可驳公式则称 Γ 是不相容的, 否则称 Γ 是相容的. 由以上命题可得

命题 11 设 Γ 为一理论, $\bar{0}$ 是可驳公式, 则

(1) Γ 不相容当且仅当存在 $A_1, A_2, \dots, A_n \in \Gamma$, 使得 $\vdash A_1 \wedge A_2 \wedge \dots \wedge A_n \rightarrow \bar{0}$.

(2) $\Gamma = \{B_1, B_2, \dots, B_m\}$ 不相容当且仅当 $B_1 \wedge B_2 \wedge \dots \wedge B_m$ 是可驳公式.

设 Γ 是理论, τ 为 $F(S)$ 的语构真度. 若 $\forall A \in \Gamma$, $\tau(A) = 1$, 则称 Γ 为 \mathbb{F} 相容理论, 简记为 $\tau(\Gamma) = 1$. 下面给出 \mathbb{F} 相容理论在推理下的和谐性.

定理 4 设 Γ 是理论. 若 Γ 为 \mathbb{F} 相容的, 则 $D(\Gamma)$ 也为 \mathbb{F} 相容的.

证明 任取 $A \in D(\Gamma)$, 则由命题 10 知存在 $A_1, A_2, \dots, A_n \in \Gamma$, 使得 $\vdash A_1 \wedge A_2 \wedge \dots \wedge A_n \rightarrow A$. 故 $\tau(A_1 \wedge A_2 \wedge \dots \wedge A_n) \leq \tau(A)$. 而 $\tau(\Gamma) = 1$, 故 $\tau(A_1) = \tau(A_2) = \dots = \tau(A_n) = 1$, 由推论 2(2) 知 $\tau(A_1 \wedge A_2 \wedge \dots \wedge A_n) = 1$, 故 $\tau(A) \geq 1$. 再由 τ 的定义便知 $\tau(A) = 1$. 由 A 的任意性知 $\tau(D(\Gamma)) = 1$.

定理 5 设 Γ 是理论. 若 Γ 是 \mathbb{F} 相容的, 则 Γ 一定是相容的. 反过来, 若 Γ 是相容的, 则存在 $F(S)$ 的真度函数 τ 使得 Γ 是 \mathbb{F} 相容的.

证明 先证明本结论的第一部分. 若 Γ 不相容, 由命题 11(1) 知存在 $A_1, A_2, \dots, A_n \in \Gamma$, 使得 $\vdash A_1 \wedge A_2 \wedge \dots \wedge A_n \rightarrow \bar{0}$. 故 $\tau(A_1 \wedge A_2 \wedge \dots \wedge A_n) \leq \tau(\bar{0}) = 0$, 故 $\tau(A_1 \wedge A_2 \wedge \dots \wedge A_n) = 0$. 而 $A_1 \wedge A_2 \wedge \dots \wedge A_n \in D(\Gamma)$, 故

$D(\Gamma)$ 不是 \mathcal{T} -相容的. 从而由定理 4 知, Γ 亦不是 \mathcal{T} -相容的, 这就证明了定理的第一部分.

现在证明第二部分. 若 Γ 是相容的, 则存在赋值 v_0 使得 $v_0(\Gamma) = 1$, 即 $\forall A \in \Gamma, v_0(A) = 1$. 令 $\tau = v_0$. 由例 2 知 τ 为 $F(S)$ 的真度函数, 显然 Γ 是 \mathcal{T} -相容的.

注记 2 (1) 设 Γ 是一相容理论. 从定理 5 来看, 可以找到 $F(S)$ 的真度 τ 使得 Γ 为 \mathcal{T} -相容的, 特别地, 当 Γ 是有限相容理论时, 可以找到如下更为自然的语构真度 τ_Γ 使 $\tau_\Gamma(\Gamma) = 1$:

不妨设 $\Gamma = \{A_1 \wedge A_2 \wedge \dots \wedge A_n\}$, 令 $E = A_1 \wedge A_2 \wedge \dots \wedge A_n$. 这里取标准真度函数 τ , 即 τ 由定义 1 确定. 由 Γ 是相容的知 $\tau(E) \neq 0$. 令

$$\tau_\Gamma(A) = \frac{\tau(A \wedge E)}{\tau(E)}, A \in F(S) \quad (5)$$

则由例 3 知 τ_Γ 为真度函数. 显然 $\tau_\Gamma(\Gamma) = 1$, 即 Γ 是 τ_Γ -相容的.

(2) 设 Γ 如(1)所设. 由定理 4 可知, Γ -结论的 τ_Γ -真度是 1. 那么反过来是否成立呢? 即, τ_Γ -真度是 1 的公式是否为 Γ -结论? 这里给出肯定回答.

$$\Gamma \vdash A \text{ 当且仅当 } \tau_\Gamma(A) = 1 \quad (6)$$

证明 式(6)的必要性由定理 4 可以得到, 下面证明充分性. 若 $\tau_\Gamma(A) = 1$, 则由式(5)知 $\tau(A \wedge E) = \tau(E)$. 设 $A \wedge E$ 中含 m 个原子命题 p_1, p_2, \dots, p_m , 不妨设 E 中含有的原子命题也是 p_1, p_2, \dots, p_m , 因为总可以给 E 析取(\vee)上形如 $p_i \wedge \neg p_i$ 的可驳公式而保持 E 的 \mathcal{T} -真度不变. 则由定义 1 知 $|\overline{A \wedge E}^{-1}(1)| = |\overline{E}^{-1}(1)|$. 又, $\overline{A \wedge E}^{-1}(1) \subseteq \overline{E}^{-1}(1)$, 故 $\overline{A \wedge E}^{-1}(1) = \overline{E}^{-1}(1)$. 又, 由 $A \wedge E$ 和 E 诱导的 Boole 函数 $\overline{A \wedge E}$ 和 \overline{E} 的取值非 0 即 1, 因此, $\overline{A \wedge E} = \overline{E}$, 从而 $A \wedge E \approx E$, 即 $A \wedge E \circ E$, 故 $\vdash E \rightarrow A \wedge E$, 从而 $\vdash E \rightarrow A$. 由命题 9 知 $\Gamma \vdash A$.

5 语构真度诱导的相似度和伪距离

基于语构真度下面给出更一般的相似度和伪距离, 并指出其具有文献[15]中相似度和伪距离的基本性质.

注记 3 设 τ 是 $F(S)$ 的语构真度函数, 令:

$$\xi_\tau(A, B) = \tau(A \rightarrow B) \wedge (B \rightarrow A), A, B \in F(S).$$

称 ξ_τ 为由语构真度 τ 诱导的相似度, 则 ξ_τ 具有以下性质:

- (1) $\xi_\tau(A, B) = \xi_\tau(B, A)$.
- (2) 若 $A \sim B$, 则 $\xi_\tau(A, B) = 1$.
- (3) 若 $A \sim \neg B$, 则 $\xi_\tau(A, B) = 0$.
- (4) $\xi_\tau(A, B) + \xi_\tau(A, \neg B) = 1$.
- (5) $\xi_\tau(A, B) + \xi_\tau(B, C) \leq \xi_\tau(A, C) + 1$.

证明 (1)和(2)是显然的. (3)是(2)和(4)的直接结果. 故只证明(4)和(5).

(4)的证明. $E = (A \rightarrow B) \wedge (B \rightarrow A)$, $F = (A \rightarrow \neg B)$

$\wedge (\neg B \rightarrow A)$. 则不难证明在 L 中 $\vdash E \vee F$, 且 $E \wedge F$ 为可驳公式. 故

$$\xi_\tau(A, B) + \xi_\tau(A, \neg B) = \tau(E) + \tau(F) = \tau(E \vee F) + \tau(E \wedge F) = 1.$$

(5)的证明. 由推论 1(1)知 $\tau(A \rightarrow C) \geq \tau(A \rightarrow B) + \tau(B \rightarrow C) - 1$, $\tau(C \rightarrow A) \geq \tau(C \rightarrow B) + \tau(B \rightarrow A) - 1$. 故 $\tau(A \rightarrow C) + \tau(C \rightarrow A) \geq \tau(A \rightarrow B) + \tau(B \rightarrow A) + \tau(B \rightarrow C) + \tau(C \rightarrow B) - 2$. 注意到在 L 中 $\vdash (A \rightarrow C) \vee (C \rightarrow A)$, $\vdash (A \rightarrow B) \vee (B \rightarrow A)$, $\vdash (B \rightarrow C) \vee (C \rightarrow B)$, 由 $(K3')$ 便得 $1 + \xi_\tau(A, C) \geq 1 + \xi_\tau(A, B) + 1 + \xi_\tau(B, C) - 2 = \xi_\tau(A, B) + \xi_\tau(B, C)$.

注记 4 设 τ 是 $F(S)$ 的语构真度函数, ξ_τ 是由 τ 诱导的相似度, 令:

$$\rho_\tau(A, B) = 1 - \xi_\tau(A, B), A, B \in F(S).$$

由 τ 的性质以及注记 3(5)知 ρ_τ 为 $F(S)$ 上的伪距离. 称其为由 τ 诱导的伪距离. 则 ρ_τ 满足

- (1) 若 $A \sim B$, 则 $\rho_\tau(A, B) = 0$
- (2) 若 $A \sim \neg B$, 则 $\rho_\tau(A, B) = 1$.
- (3) $\rho_\tau(A, \bar{0}) = \tau(A)$.

证明 (1)和(2)显然, 下面证明(3). 注意到 $\vdash \bar{0} \rightarrow A$, $A \rightarrow \bar{0} \sim \neg A$, 便有

$$\rho_\tau(A, \bar{0}) = 1 - \xi_\tau(A, \bar{0}) = 1 - \tau(A \rightarrow \bar{0}) \wedge (\bar{0} \rightarrow A) = 1 - \tau(\neg A) = \tau(A).$$

注记 5 如果取真度 τ 为标准真度, 则在伪距离空间 $(F(S), \rho_\tau)$ 中, 一元运算 \neg 和二元运算 $\rightarrow, \vee, \wedge$ 都是连续的^[15]. 文献[15]给出这一性质的详细证明, 其中, 证明的关键部分是:

- (1) $\xi_\tau(A, B) = \xi_\tau(\neg B, \neg A)$.
- (2) $\xi_\tau(A_1 \rightarrow B, A_2 \rightarrow B) \geq \xi_\tau(A_1, A_2)$.
- (3) $\rho_\tau(A_n \rightarrow B_n, A \rightarrow B) \leq \rho_\tau(A_n \rightarrow B_n, A_n \rightarrow B) + \rho_\tau(A_n \rightarrow B, A \rightarrow B)$.

而易证(1), (2), (3)对于一般的相似度和伪距离也成立, 所以以上性质可以直接推广到一般情形. 即, 若 τ 为语构真度, 则在伪距离空间 $(F(S), \rho_\tau)$ 中, 一元运算 \neg 和二元运算 $\rightarrow, \vee, \wedge$ 都是连续的.

参考文献:

- [1] Pavelka J. On fuzzy logic I, II, III. Zeitschr f Math Logik u Grundlagen d Math[J]. 1979, 25: 45-52, 119-134, 447-464.
- [2] De Glas M. Knowledge representation in a fuzzy setting[R]. Paris: Tech Rep 89/48, Université Paris VI, 1989. 48-67.
- [3] 王国俊. 非经典数理逻辑与近似推理[M]. 北京: 科学出版社, 2003.
- [4] 王国俊, 傅丽, 宋建社. 二值命题逻辑中命题的真度理论[J]. 中国科学(A辑), 2001, 31(11): 998-1008.

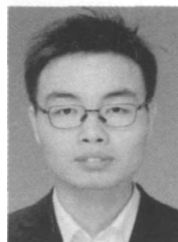
- Wang Guojun, Fu Li, Song Jianshe. Theory of truth degrees of propositions in two valued logic[J]. Science in China, Ser. A, 2002, 45(9): 1106– 1116.
- [5] 王国俊, 李壁镜. Lukasiewicz n 值命题逻辑中公式的真度理论和极限定理[J]. 中国科学(E 辑), 2005, 35(6): 561– 569.
- Wang Guojun, Li Bijing. Theory of truth degrees of formulas in Lukasiewicz r valued propositional logic and a limit theorem [J]. Science in China, Ser F, 2005, 48(6): 727– 736.
- [6] 王国俊, 宋建社. 命题逻辑中的程度化方法[J]. 电子学报, 2006, 34(2): 252– 257.
- Wang Guojun, Song Jianshe. Graded Method in Propositional Logic[J]. Acta Electronica Sinica, 2006, 34(2): 252– 257. (in Chinese)
- [7] 李骏, 王国俊. 逻辑系统中命题的真度理论[J]. 中国科学(E 辑), 2006, 36(6): 631– 643.
- Li Jun, Wang Guojun. Theory of truth degrees of propositions in the logic system[J]. Science in China, Ser F, 2006, 49(4): 471– 483.
- [8] 李骏, 黎锁平, 夏亚峰. Lukasiewicz n 值命题逻辑中命题的真度理论[J]. 数学学报, 2004, 47(4): 769– 780.
- Li Jun, Li Suoping, Xia Yafeng. Theory of Truth Degrees in Lukasiewicz r Valued Propositional Logic[J]. Acta Mathematica Sinica, 2004, 47(4): 769– 780. (in Chinese)
- [9] 王国俊, 秦晓燕, 周湘南. 一类二值谓词逻辑中公式的准真度理论[J]. 陕西师范大学学报(自然科学版), 2005, 33(1): 1– 6.
- Wang Guojun, Qin Xiaoyan, Zhou Xiangnan. Theory of quasi truth degrees of formulas in two valued predicate logic[J]. Journal of Shaanxi Normal University(Natural Science Edition), 2005, 33(1): 1– 6. (in Chinese)
- [10] 王国俊, 王伟. 逻辑度量空间[J]. 数学学报, 2001, 44(1): 159– 168.
- Wang Guojun, Wang Wei. Logical Metric Spaces[J]. Acta Mathematica Sinica, 2001, 44(1): 159– 168. (in Chinese)
- [11] G. J. Wang, Y. Leung, Integrated semantics and logic metric spaces[A]. 序·拓扑·逻辑[C]. 西安: 陕西师范大学出版社, 2005. 282– 300.
- [12] G J Wang, W X Zhang. Consistency degrees of finite theories in Lukasiewicz propositional fuzzy logic[J]. Fuzzy Sets and Systems, 2005, 149: 275– 284.
- [13] X N Zhou, G J Wang. Consistency degrees of theories in some systems of propositional fuzzy logic[J]. Fuzzy Sets and Systems, 2005, 152: 321– 331.
- [14] H J Zhou, G J Wang. A new theory consistency index based on deduction theorems in several logic systems[J]. Fuzzy Sets and Systems, 2006, 157: 427– 443.
- [15] 王国俊. 数理逻辑引论与归结原理(第二版)[M]. 北京: 科学出版社, 2006.
- [16] 王国俊. 计量逻辑学(I)[J]. 工程数学学报, 2006, 23(2): 191– 215.
- Wang Guojun. Quantitative Logic(I)[J]. Chinese Journal of Engineering Mathematics, 2006, 23(2): 191– 215. (in Chinese)
- [17] Adams, E W. A primer of probability logic[M]. California: CSLI Publications, 1998.

作者简介:



张东晓 男, 1980 年生于内蒙古凉城县, 集美大学理学院助教, 硕士. 主要从事不确定性推理与概念格理论的研究.

E-mail: zdx1980@gmail.com



李立峰 男, 1980 年生于陕西长安, 西安邮电学院应用数理系助教, 硕士. 主要从事不确定性推理与概念格理论的研究.

E-mail: hlw1212@sohu.com