

分数阶傅里叶域两通道滤波器组

孟祥意, 陶 然, 王 越

(北京理工大学电子工程系, 北京 100081)

摘 要: 基于两通道滤波器组构建的子带信号处理方法已在图像、语音信号处理中得到广泛的应用. 本文从分数阶傅里叶域多抽样率信号处理基本理论和分数阶卷积定理出发, 推导了分数阶傅里叶域两通道滤波器组准确重建的基本条件, 并基于传统傅里叶域有限长标准正交镜像滤波器组和共轭正交镜像滤波器组的原型滤波器设计了分数阶傅里叶域标准正交镜像滤波器组和共轭正交镜像滤波器组. 本文所提出的结论为分数阶傅里叶域滤波器组理论的建立提供了基本依据, 同时也为分数阶傅里叶变换在图像、语音信号处理等工程实践中的应用奠定了理论基础. 最后, 仿真实验验证了所提分数阶傅里叶域滤波器组设计方法的有效性.

关键词: 分数阶傅里叶变换; 两通道滤波器组; 多相结构; 准确重建; 分数阶卷积

中图分类号: TN911.7 **文献标识码:** A **文章编号:** 0372-2112(2008)05-0919-08

The Fractional Fourier Domain Analysis of Two Channel Filter Banks

MENG Xiang yi, TAO Ran, WANG Yue

(Department of Electronic Engineering, Beijing Institute of Technology, Beijing 100081, China)

Abstract: Subband coders have been applied widely in the image processing and speech signal processing. Two channel multirate digital filter banks are the basic components of the tree structured subband coders. This paper proposes the perfect reconstruction condition of two channel multirate filter banks in the fractional Fourier domain (FRFD), based on the theorem for FRFD analysis of signal sampling rate conversion and fractional convolution theory. Then, this paper illustrates that it is possible to design two channel FIR Quadrature Mirror Filter Banks (QMFB) and Conjugate Quadrature Mirror Filter Banks (CQMFB) through the prototype filters of FIR QMFB and CQMFB in Fourier domain. The proposed theorems in this study advance the generalization of filter banks in FRFD, which are the bases of the applications of FRFT in the practices, such as image processing, speech signal processing, etc. Finally, the effectiveness of the proposed methods is verified by the simulations.

Key words: the fractional Fourier transform; two channel filter banks; the signal polyphase representation; perfect reconstruction; the fractional convolution theory

1 引言

随着数字信号处理的迅速发展, 信息系统中信号的处理、编码、传输和存储等工作量越来越大. 为了节省计算工作量及存储空间, 在一个信号处理系统中常常需要不同的抽样率及其相互之间的转换, 在此基础上, 多抽样率信号处理理论产生并发展起来. 滤波器组理论是多抽样率信号处理的核心内容, 它实现了对信号不同频率分量的分别处理. 两通道滤波器组是最简单的一种滤波器组, 其抽取因子和内插因子都为 2, 这种结构成为了子带编码的基础^[1]. 以两通道滤波器组级联而得的树状滤波器组可以对信号作多层次的划分, 并构成了 Mallat 多分辨率分析算法的基础^[2], 在小波变换中占有重要的

地位, 现已在图像、语音信号处理中得到了广泛的应用, 具有良好的稳健性^[3-5].

随着信息处理系统性能要求的提高, 传统的基于正弦基分解的傅里叶变换由于其时频定位和分辨率上的局限性已不能适应现代信息处理系统中 chirp 信号的检测和估计要求, 需要寻找新的理论工具来解决工程实践问题. 分数阶傅里叶变换的定义最早在 1929 年提出^[6], 在 20 世纪 80 年代开始应用于光学领域, 从 90 年代起成为信号处理领域的研究热点之一. 分数阶傅里叶变换是傅里叶变换的广义形式, 它在统一的时频域上进行信号处理, 相对于传统的傅里叶变换灵活性更强, 适合于非平稳信号的处理^[7-9]. 而且信号的分数阶傅里叶变换可以理解为将信号分解到一系列同一调频率不同

收稿日期: 2007-03-14; 修回日期: 2007-08-14

基金项目: 国家杰出青年科学基金(No. 60625104); 国家自然科学基金重点项目(No. 60232010); 国家自然科学基金(No. 60572094)

起始频率的 chirp 基, 因此分数阶傅里叶变换也是针对多分量 chirp 信号检测和参数估计的合适工具^[10]. 近年来出现了许多基于分数阶傅里叶变换的语音信号、数字图像处理方法^[11, 12]. 但是, 这些方法都是基于单采样率的, 为了将图像、语音信号处理中的子带信号编码等多抽样率信号处理方法扩展到分数阶傅里叶域, 需要将两通道滤波器组理论扩展到分数阶傅里叶域. 文献 [13] 提出的信号抽样率转换的分数阶傅里叶域分析则为滤波器组理论在分数阶傅里叶域的推广提供了理论基础.

本文首先简要的介绍了分数阶傅里叶域多抽样率信号处理的基本理论, 如非平稳信号抽取、内插的分数阶傅里叶域分析、分数阶傅里叶域抽取和内插的恒等关系、非平稳信号在分数阶傅里叶域的多相结构. 然后, 本文基于分数阶傅里叶域多抽样率信号处理基础理论和分数阶卷积定理推导出了分数阶傅里叶域两通道滤波器组准确重建的基本条件, 并在此基础上讨论了分数阶傅里叶域两通道有限长标准正交镜像滤波器组、有限长共轭正交镜像滤波器组的准确重建条件和滤波器组设计方法. 最后, 仿真实验验证了所提方法的有效性.

2 分数阶傅里叶域信号多抽样率分析的基本理论

2.1 分数阶傅里叶域数字频率

分数阶傅里叶变换 (FRFT) 是近年来出现的一种新的时频工具, 它是傅里叶变换的一种广义形式. 信号的分数阶傅里叶变换是信号在时频平面内坐标轴绕原点逆时针旋转任意角度后的表示方法, 而当这个旋转角度为 $\pi/2$ 时, 这个表示则为传统的傅里叶变换.

信号 $x(t)$ 的分数阶傅里叶变换定义为^[7]

$$X_p(u) \left\{ F_p[x(t)] \right\} (u) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) K_p(t, u) dt \quad (1a)$$

其中, $p = 2\alpha/\pi$ 为分数阶傅里叶变换的阶次, α 为分数阶傅里叶域与时域的夹角, $F_p[\cdot]$ 为分数阶傅里叶变换算子, $K_p(t, u)$ 为分数阶傅里叶变换的变换核, 其定义为

$$K_p(t, u) = \begin{cases} \sqrt{\frac{1-j \cot \alpha}{2\pi}} \exp\left[j \frac{t^2 + u^2}{2} \cot \alpha - jut \csc \alpha \right], & \alpha \neq n\pi \\ \delta(t - u), & \alpha = 2n\pi \\ \delta(t + u), & \alpha = (2n \pm 1)\pi \end{cases} \quad (1b)$$

分数阶傅里叶逆变换为

$$x(t) = \left\{ F_{-p}[X_p(u)] \right\} (u) = \int_{-\infty}^{\infty} X_p(u) K_{-p}(t, u) du \quad (2)$$

在实际工程中研究的都是由模拟信号采样而得的

数字信号, 为了理论分析中的方便, 文献 [13] 中定义了分数阶傅里叶域数字频率 ω , 其可由分数阶傅里叶域变量 u 及离散序列的时域采样间隔 Δt 定义为

$$\omega = u \cdot \Delta t$$

与傅里叶域数字频率类似, 分数阶傅里叶域数字频率周期定义为 $2\pi \sin \alpha$, 根据 chirp 周期的定义, 分数阶傅里叶域数字频率周期 $\Delta \omega_p$ 有如下性质

$$\tilde{H}_p(\omega) e^{-\frac{1}{2}j\omega t \alpha} \frac{\omega^2}{\Delta t^2} = \tilde{H}_p(\omega - \Delta \omega_p) e^{-\frac{1}{2}j\omega t \alpha} \frac{(\omega - \Delta \omega_p)^2}{\Delta t^2}$$

$$\text{即 } \tilde{H}_p(\omega) = \tilde{H}_p(\omega - 2\pi \sin \alpha) e^{j \cdot 2\pi \cos \alpha \frac{(\omega - \pi \sin \alpha)}{\Delta t^2}} \quad (3)$$

根据文献 [14] 中离散时间分数阶傅里叶变换 (DTFRFT) 的定义, 序列 $x(n)$ 可在 p 阶分数阶傅里叶域数字频率轴上表示为

$$\tilde{X}_p(\omega) = \sqrt{\frac{1-j \cot \alpha}{2\pi}} \cdot e^{\frac{1}{2}j\omega t \alpha} \frac{\omega^2}{\Delta t^2} \sum_{-\infty}^{\infty} x(n) e^{-jn\omega \csc \alpha} \frac{1}{2} \cot \alpha \Delta t^2 \quad (4)$$

那么, 其相应的 p 阶离散时间分数阶傅里叶变换反变换 (IDTFRFT) 可以定义为

$$x(n) = \sqrt{\frac{1+j \cot \alpha}{2\pi}} \cdot \int_{-\pi \sin \alpha}^{\pi \sin \alpha} \tilde{X}_p(\omega) e^{-j \cdot \frac{(n^2 \Delta t^2 + (\omega/\Delta t)^2)}{2} \cot \alpha + jn\omega \csc \alpha} d\omega \quad (5)$$

2.2 抽取和内插的分数阶傅里叶域分析

信号抽样率转换理论是多抽样率信号处理的基础, 而抽取和内插是信号处理系统进行抽样率转换的两个最基本的操作, 因此在研究基于分数阶傅里叶变换的多抽样率信号处理理论之前, 必须要研究内插和抽取的分数阶傅里叶域分析.

对于在时域抽样周期为 Δt_x 的信号 $x(n)$, 其 L 倍内插之后的数学表达式为

$$y(n) = \begin{cases} x\left(\frac{n}{L}\right), & n = Lk, k \in z \\ 0, & \text{其他} \end{cases} \quad (6)$$

$y(n)$ 的抽样周期为

$$\Delta t_y = \Delta t_x / L \quad (7)$$

由式 (4) 所示离散时间分数阶傅里叶变换定义式有^[13]

$$\tilde{Y}_p(\omega) = \tilde{X}_p(L\omega) \quad (8)$$

对于抽样周期为 Δt_x 的信号 $x(n)$, 其抽取后在时域的数学表达式为^[11]

$$y(n) = x(M \cdot n) \quad (9)$$

$y(n)$ 的抽样周期为

$$\Delta t_y = M \cdot \Delta t_x \quad (10)$$

我们通过引入辅助函数 $r(n) = \sum_{-\infty}^{\infty} \delta(n - k \cdot M)$, 根据式 (4) 离散时间分数阶傅里叶变换定义及泊森和公式 (Poisson summation formula) 可以得到^[13]

$$\tilde{Y}_p(\omega) = \frac{1}{M} \sum_{k=0}^{M-1} e^{j\omega\alpha} \frac{2k\pi}{M\Delta t} (\omega - k\pi\sin\alpha) \cdot \tilde{X}_p \left(\frac{\omega - k \cdot 2\pi\sin\alpha}{M} \right) \quad (11)$$

根据分数阶卷积定理^[15]和式(8)、式(11)所示的抽取、内插分数阶傅里叶域分析可以得出 L 倍内插、 M 倍抽取的分数阶傅里叶域恒等关系为^[13]

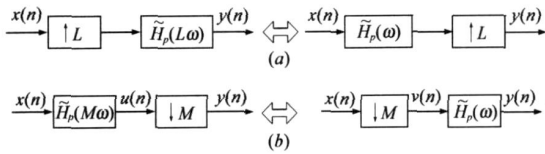


图 1 (a) L 倍内插的恒等关系;(b) M 倍抽取的恒等关系

2.3 信号在分数阶傅里叶域的多相表示

对于给定的序列 $x(n)$, 令 $n = 0 \sim \infty$, 根据式(4)离散时间分数阶傅里叶变换定义有

$$\begin{aligned} \tilde{X}_p(\omega) &= A_p e^{\frac{1}{2}j\alpha\omega^2} \sum_{n=0}^{+\infty} x(n) e^{-jn\omega\csc\alpha + \frac{1}{2}jn^2\omega^2\cot\alpha\Delta t^2} \\ &= A_p e^{\frac{1}{2}j\alpha\omega^2} \sum_{n=0}^{+\infty} x(Mn) e^{-j(Mn)\omega\csc\alpha + j\frac{1}{2}\omega^2\cot\alpha(Mn)^2\Delta t^2} \\ &\quad + A_p e^{-j\omega\csc\alpha + j\frac{1}{2}\omega^2\cot\alpha\Delta t^2} e^{\frac{1}{2}j\alpha\omega^2} \\ &\quad \cdot \sum_{n=0}^{+\infty} [x(Mn+1) e^{j\frac{1}{2}\alpha\omega^2(2Mn)^2\Delta t^2}] \\ &\quad \cdot e^{-j(Mn)\omega\csc\alpha + j\frac{1}{2}\alpha\omega^2(Mn)^2\Delta t^2} + \dots \\ &\quad + A_p e^{-j(M-1)\omega\csc\alpha + j\frac{1}{2}\alpha\omega^2(M-1)^2\Delta t^2} e^{\frac{1}{2}j\alpha\omega^2} \\ &\quad \cdot \sum_{n=0}^{+\infty} [x(Mn+M-1) e^{j\frac{1}{2}\alpha\omega^2(2M(M-1)n)^2\Delta t^2}] \end{aligned}$$

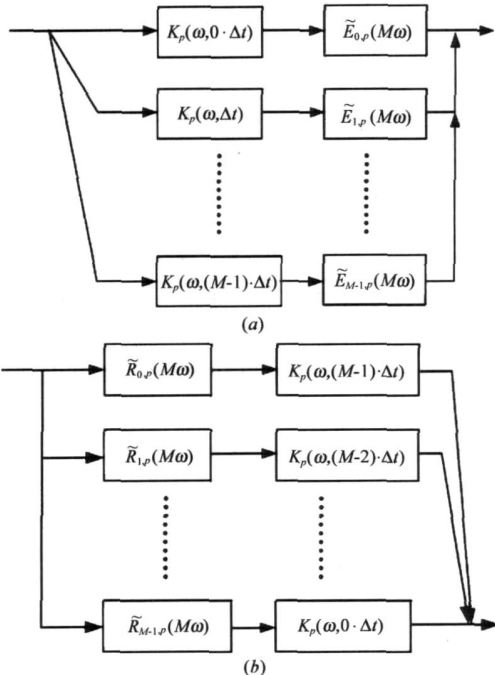


图 2 (a)信号在分数阶傅里叶域的 I 型多相结构;(b)信号在分数阶傅里叶域的 II 型多相结构

$$\begin{aligned} &\cdot e^{-j(Mn)\omega\csc\alpha + j\frac{1}{2}\alpha\omega^2(Mn)^2\Delta t^2} \\ &= \frac{1}{A_p} \sum_{l=0}^{M-1} e^{-j\frac{1}{2}\alpha\omega^2} \left(\frac{\omega}{\Delta t} \right)^2 K_p(\omega, l\Delta t) \tilde{E}_{l,p}(M\omega) \quad (12) \end{aligned}$$

其中, $A_p = \sqrt{\frac{1-j\cot\alpha}{2\pi}}$,

$$\begin{aligned} \tilde{E}_{l,p}(M\omega) &= A_p e^{\frac{1}{2}j\alpha\omega^2} \sum_{n=0}^{+\infty} [x(Mn+l) e^{j\frac{1}{2}\alpha\omega^2(2M\cdot l\cdot n)^2\Delta t^2}] \\ &\quad \cdot e^{-j\omega(Mn)\csc\alpha + j\frac{1}{2}\alpha\omega^2(Mn)^2\Delta t^2} \quad (13) \end{aligned}$$

为信号在分数阶傅里叶域的多相分量, $K_p(\omega, l\Delta t)$ 为分数阶傅里叶域时延因子. 那么, 根据分数阶卷积定理就可以得出信号在分数阶傅里叶域的 I 型多相结构如图 2(a) 所示. 相应的, 若设 $\tilde{R}_{l,p}(\omega) = \tilde{E}_{M-l,p}(\omega)$, 那么式(13)可以写为

$$\begin{aligned} \tilde{X}_p(\omega) &= \frac{1}{A_p} \sum_{l=0}^{M-1} e^{-j\frac{1}{2}\alpha\omega^2} \left(\frac{\omega}{\Delta t} \right)^2 K_p[\omega, (M-1-l)\Delta t] \\ &\quad \cdot \tilde{R}_{l,p}(M\omega) \quad (14) \end{aligned}$$

那么可以得到如图 2(b) 所示的信号在分数阶傅里叶域的 II 型多相结构.

3 两通道滤波器组准确重建的基本条件

一个 p 阶分数阶傅里叶域两通道滤波器组如图 3 所示. 在传统傅里叶域滤波器组中, 如果滤波器组的输出 $\hat{x}(n)$ 可以表示为滤波器组输入 $x(n)$ 的延时乘以某一常数的形式, 那么这个滤波器组称为准确重建滤波器组, 即

$$\hat{x}(n) = c \cdot x(n - n_0) = c \cdot [x(n) \otimes \delta(n - n_0)]$$

类似的, 在分数阶傅里叶域滤波器组中, 如果

$$\begin{aligned} \hat{x}(n) &= c \cdot x(n - n_0) e^{-j\alpha\omega(m_n - n_0^2)\Delta t^2} \\ &= c \cdot [x(n) \otimes_p \delta(n - n_0)] \quad (15) \end{aligned}$$

即滤波器组的输出信号 $\hat{x}(n)$ 表现为 $x(n)$ 分数阶卷积时延因子 $\delta(n - n_0)$ 的形式, 那么称 $\hat{x}(n)$ 是 $x(n)$ 在 p 阶分数阶傅里叶域的准确重建. 下面, 我们就讨论一下为满足准确重建条件, 图 3 中 $\tilde{H}_{0,p}(\omega)$ 、 $\tilde{H}_{1,p}(\omega)$ 、 $\tilde{G}_{0,p}(\omega)$ 和 $\tilde{G}_{1,p}(\omega)$ 应满足的关系.

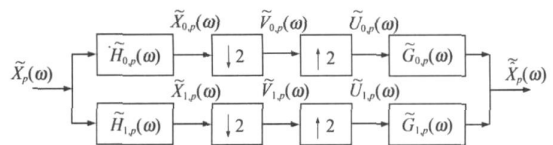


图 3 分数阶傅里叶域两通道滤波器组

在图 3 中, 由分数阶卷积定理有^[15]

$$\tilde{X}_{0,p}(\omega) = \tilde{X}_p(\omega) \tilde{H}_{0,p}(\omega) e^{-j\frac{1}{2}\alpha\omega^2} \quad (16)$$

$$\tilde{X}_{1,p}(\omega) = \tilde{X}_p(\omega) \tilde{H}_{1,p}(\omega) e^{-j\frac{1}{2}\alpha\omega^2} \quad (17)$$

其中, $\alpha = p\pi/2$, Δt 为 $x(n)$ 在时域的采样间隔. 由抽取在分数阶傅里叶域的表达式进而可以得到

$$\tilde{V}_{0,p}(\omega) = \frac{1}{2}\tilde{X}_{0,p}\left(\frac{\omega}{2}\right) + \frac{1}{2}e^{j\omega\alpha\frac{\pi}{2M^2}(\omega-\pi\sin\alpha)}\tilde{X}_{0,p}\left(\frac{\omega-2\pi\sin\alpha}{2}\right) \quad (18)$$

$$\tilde{V}_{1,p}(\omega) = \frac{1}{2}\tilde{X}_{1,p}\left(\frac{\omega}{2}\right) + \frac{1}{2}e^{j\omega\alpha\frac{\pi}{2M^2}(\omega-\pi\sin\alpha)}\tilde{X}_{1,p}\left(\frac{\omega-2\pi\sin\alpha}{2}\right) \quad (19)$$

进而由内插在分数阶傅里叶域的表达式有

$$\tilde{U}_{0,p}(\omega) = \tilde{V}_{0,p}(2\omega) \quad (20)$$

$$\tilde{U}_{1,p}(\omega) = \tilde{V}_{1,p}(2\omega) \quad (21)$$

结合式(16)~(21)中有

$$\begin{aligned} \tilde{U}_{0,p}(\omega) &= \frac{1}{2}\tilde{X}_p(\omega)\tilde{H}_{0,p}(\omega)e^{-j\frac{1}{2}\omega\alpha\left(\frac{\omega}{\Delta t}\right)^2} \\ &+ \frac{1}{2}\tilde{X}_p(\omega-\pi\sin\alpha)\tilde{H}_{0,p}(\omega-\pi\sin\alpha) \\ &\cdot e^{-j\frac{1}{2}\omega\alpha\left(\frac{\omega-2\pi\sin\alpha}{\Delta t}\right)^2+j\omega\alpha\left(\frac{\pi\sin\alpha}{\Delta t}\right)^2} \end{aligned} \quad (22a)$$

$$\begin{aligned} \tilde{U}_{1,p}(\omega) &= \frac{1}{2}\tilde{X}_p(\omega)\tilde{H}_{1,p}(\omega)e^{-j\frac{1}{2}\omega\alpha\left(\frac{\omega}{\Delta t}\right)^2} \\ &+ \frac{1}{2}\tilde{X}_p(\omega-\pi\sin\alpha)\tilde{H}_{1,p}(\omega-\pi\sin\alpha) \\ &\cdot e^{-j\frac{1}{2}\omega\alpha\left(\frac{\omega-2\pi\sin\alpha}{\Delta t}\right)^2+j\omega\alpha\left(\frac{\pi\sin\alpha}{\Delta t}\right)^2} \end{aligned} \quad (22b)$$

在系统输出端,由分数阶卷积定理有

$$\begin{aligned} \tilde{X}_p(\omega) &= \tilde{U}_{0,p}(\omega)\tilde{G}_{0,p}(\omega)e^{-j\frac{1}{2}\omega\alpha\left(\frac{\omega}{\Delta t}\right)^2} \\ &+ \tilde{U}_{1,p}(\omega)\tilde{G}_{1,p}(\omega)e^{-j\frac{1}{2}\omega\alpha\left(\frac{\omega}{\Delta t}\right)^2} \\ &= \tilde{T}_p(\omega)\tilde{X}_p(\omega)e^{-j\frac{1}{2}\omega\alpha\left(\frac{\omega}{\Delta t}\right)^2} \\ &+ \tilde{F}_p(\omega)\tilde{X}_p(\omega-\pi\sin\alpha)e^{-j\frac{1}{2}\omega\alpha\left(\frac{\omega}{\Delta t}\right)^2} \end{aligned} \quad (23)$$

其中,

$$\begin{aligned} \tilde{T}_p(\omega) &= \frac{1}{2}[\tilde{G}_{0,p}(\omega)\tilde{H}_{0,p}(\omega)e^{-j\frac{1}{2}\omega\alpha\left(\frac{\omega}{\Delta t}\right)^2} \\ &+ \tilde{G}_{1,p}(\omega)\tilde{H}_{1,p}(\omega)e^{-j\frac{1}{2}\omega\alpha\left(\frac{\omega}{\Delta t}\right)^2}] \end{aligned} \quad (24)$$

$$\begin{aligned} \tilde{F}_p(\omega) &= \frac{1}{2}[\tilde{G}_{0,p}(\omega)\tilde{H}_{0,p}(\omega)e^{-j\frac{1}{2}\omega\alpha\left(\frac{\omega}{\Delta t}\right)^2} \\ &+ \tilde{G}_{1,p}(\omega)\tilde{H}_{1,p}(\omega)e^{-j\frac{1}{2}\omega\alpha\left(\frac{\omega}{\Delta t}\right)^2}] \\ &\cdot e^{j\omega\alpha\frac{2\omega\pi\sin\alpha-\pi^2\sin^2\alpha}{\Delta t^2}} \end{aligned} \quad (25)$$

在上式中,由于 $\tilde{X}_p(\omega-\pi\sin\alpha)$ 是在分数阶傅里叶域数字频率轴上将 $\tilde{X}_p(\omega)$ 移位 $\pi\sin\alpha$ 后的结果,因此它是混叠分量,显然,为去除混叠分量,需使

$$\tilde{F}_p(\omega) = 0$$

即

$$\frac{\tilde{G}_{0,p}(\omega)}{\tilde{G}_{1,p}(\omega)} = -\frac{\tilde{H}_{1,p}(\omega-\pi\sin\alpha)}{\tilde{H}_{0,p}(\omega-\pi\sin\alpha)} \quad (26)$$

为满足式(15)信号准确重建的条件,则 $\tilde{T}_p(\omega)$ 需满足

$$\begin{aligned} \tilde{T}_p(\omega) &= \frac{1}{2}[\tilde{G}_{0,p}(\omega)\tilde{H}_{0,p}(\omega)e^{-j\frac{1}{2}\omega\alpha\left(\frac{\omega}{\Delta t}\right)^2} \\ &+ \tilde{G}_{1,p}(\omega)\tilde{H}_{1,p}(\omega)e^{-j\frac{1}{2}\omega\alpha\left(\frac{\omega}{\Delta t}\right)^2}] \end{aligned}$$

$$= c \cdot K_p(\omega, n_0\Delta t) \quad (27)$$

由上面的分析可以知道,为了满足分数阶傅里叶域的准确重建条件, $\tilde{H}_{0,p}(\omega)$ 、 $\tilde{H}_{1,p}(\omega)$ 、 $\tilde{G}_{0,p}(\omega)$ 和 $\tilde{G}_{1,p}(\omega)$ 应满足如式(26)、式(27)所示的关系。

4 分数阶傅里叶域两通道标准正交镜像滤波器组

在本节中,我们基于上一节介绍的分数阶傅里叶域两通道滤波器组准确重建条件,讨论分数阶傅里叶域两通道标准正交镜像滤波器组的设计方法.假设 $h(n)$, $n=0,1,\dots,N-1$ 为傅里叶域中长度为 N 的低通滤波器,那么设

$$h_0(n) = h(n)e^{-j\frac{1}{2}\omega\alpha n^2 \cdot \Delta t^2} \quad (28)$$

其中 $\alpha = p\pi/2$,对 $h_0(n)$ 求 p 阶DIFRFT可以有

$$\begin{aligned} \tilde{H}_{0,p}(\omega) &= A_p e^{j\frac{1}{2}\omega\alpha\left(\frac{\omega}{\Delta t}\right)^2} \sum_{n=0}^{+\infty} h_0(n) e^{-j\omega n \csc\alpha} e^{j\frac{1}{2}\omega\alpha n^2 \cdot \Delta t^2} \\ &= A_p e^{j\frac{1}{2}\omega\alpha\left(\frac{\omega}{\Delta t}\right)^2} \sum_{n=0}^{+\infty} h_0(n) e^{-j\omega n \csc\alpha} \\ &= A_p e^{j\frac{1}{2}\omega\alpha\left(\frac{\omega}{\Delta t}\right)^2} \tilde{H}(\omega \csc\alpha) \end{aligned} \quad (29)$$

其中, $\tilde{H}(\omega \csc\alpha)$ 为 $h(n)$ 的傅里叶变换.通过式(29)可以发现, $\tilde{H}_{0,p}(\omega)$ 为 p 阶分数阶傅里叶域的低通滤波器.与传统的两通道标准正交镜像滤波器组类似,为得到 p 阶分数阶傅里叶域上由 $h(n)$ 生成的高通滤波器,可以选取

$$h_1(n) = h(n)e^{-j\frac{1}{2}\omega\alpha n^2 \cdot \Delta t^2} e^{-j\pi n} \quad (30)$$

对 $h_1(n)$ 求 p 阶DIFRFT可以有

$$\begin{aligned} \tilde{H}_{1,p}(\omega) &= A_p e^{j\frac{1}{2}\omega\alpha\left(\frac{\omega}{\Delta t}\right)^2} \tilde{H}[(\omega-\pi\sin\alpha)\csc\alpha] \\ &= \tilde{H}_{0,p}(\omega-\pi\sin\alpha) e^{j\frac{1}{2}\omega\alpha\left(\frac{2\omega\pi\sin\alpha-\pi^2\sin^2\alpha}{\Delta t^2}\right)} \end{aligned} \quad (31)$$

由式(3)所示分数阶傅里叶域数字频率周期的性质可以发现, $\tilde{H}_{1,p}(\omega)$ 为分数阶傅里叶域的高通滤波器,并且 $|\tilde{H}_{0,p}(\omega)|$ 与 $|\tilde{H}_{1,p}(\omega)|$ 在 p 阶分数阶傅里叶域中关于 $\omega = \frac{\pi\sin\alpha}{2} + 2k\pi\sin\alpha$, $k \in Z$ 成镜像对称。

为了进一步推导分数阶傅里叶域两通道标准正交镜像滤波器组中各滤波器之间的关系,根据式(12),对 $\tilde{H}_{0,p}(\omega)$ 在 p 阶分数阶傅里叶域进行I型多相分解可以得到

$$\begin{aligned} \tilde{H}_{0,p}(\omega) &= \tilde{E}_{0,p}(2\omega) \\ &+ \frac{1}{A_p} e^{-j\frac{1}{2}\omega\alpha\left(\frac{\omega}{\Delta t}\right)^2} K_p(\omega, \Delta t) \tilde{E}_{0,p}(2\omega) \end{aligned} \quad (32)$$

由式(13)可以知道, $\tilde{H}_{0,p}(\omega)$ 在 p 阶分数阶傅里叶域的多相分量可以写为

$$\begin{aligned} \tilde{E}_{0,p}(2\omega) &= A_p e^{j\frac{1}{2}\omega\alpha\left(\frac{2\omega}{2\Delta t}\right)^2} \\ &\cdot \sum_{n=0}^{+\infty} h_0(2n) e^{-j(2\omega) n \csc\alpha + j\frac{1}{2}\omega\alpha(2n)^2 \cdot \Delta t^2} \end{aligned}$$

$$= A_p e^{j\frac{1}{2}\omega\alpha} \left(\frac{\omega}{\Delta t}\right)^2 \tilde{E}_0(2\omega\text{csc}\alpha) \quad (33)$$

$$\begin{aligned} \tilde{E}_{0,p}(2\omega) &= A_p e^{j\frac{1}{2}\omega\alpha} \left(\frac{\omega}{\Delta t}\right)^2 \\ &\cdot \sum_{n=0}^{+\infty} [h_0(2n+1) e^{j\frac{1}{2}\omega\alpha(2\cdot 2\cdot 1\cdot n)\Delta t}] \\ &\cdot e^{-j\cdot n\cdot(2\omega)\cdot\text{csc}\alpha + j\frac{1}{2}\omega\alpha\cdot n^2\cdot(2\Delta t)^2} \\ &= A_p e^{j\frac{1}{2}\omega\alpha} \left(\frac{\omega}{\Delta t}\right)^2 - j\frac{1}{2}\omega\alpha\cdot\Delta t^2 \tilde{E}_1(2\omega\text{csc}\alpha) \quad (34) \end{aligned}$$

其中,

$$\begin{aligned} \tilde{E}_0(\omega) &= \sum_{n=0}^{+\infty} h(2n) e^{-j\omega n} \\ \tilde{E}_1(\omega) &= \sum_{n=0}^{+\infty} h(2n+1) e^{-j\omega n} \end{aligned}$$

为 $\tilde{H}(\omega)$ 在傅里叶域的两个 I 型多相分量. 将式(33)、式(34)代入式(32)可以有

$$\begin{aligned} \tilde{H}_{0,p}(\omega) &= A_p e^{j\frac{1}{2}\omega\alpha} \left(\frac{\omega}{\Delta t}\right)^2 \tilde{E}_0(2\omega\text{csc}\alpha) \\ &+ A_p e^{j\frac{1}{2}\omega\alpha} \left(\frac{\omega}{\Delta t}\right)^2 - j\omega\text{csc}\alpha \tilde{E}_1(2\omega\text{csc}\alpha) \quad (35) \end{aligned}$$

结合式(31)及离散信号在傅里叶域中的周期性可以写出 $\tilde{H}_{1,p}(\omega)$ 的多相结构为

$$\begin{aligned} \tilde{H}_{1,p}(\omega) &= A_p e^{j\frac{1}{2}\omega\alpha} \left(\frac{\omega}{\Delta t}\right)^2 \tilde{E}_0(2\omega\text{csc}\alpha) \\ &- A_p e^{j\frac{1}{2}\omega\alpha} \left(\frac{\omega}{\Delta t}\right)^2 - j\omega\text{csc}\alpha \tilde{E}_1(2\omega\text{csc}\alpha) \quad (36) \end{aligned}$$

因此, $\tilde{H}_{0,p}(\omega)$ 、 $\tilde{H}_{1,p}(\omega)$ 可以用矩阵形式写为

$$\begin{bmatrix} \tilde{H}_{0,p}(\omega) \\ \tilde{H}_{1,p}(\omega) \end{bmatrix} = A_p e^{j\frac{1}{2}\omega\alpha} \left(\frac{\omega}{\Delta t}\right)^2 \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{E}_0(2\omega\text{csc}\alpha) \\ e^{-j\omega\text{csc}\alpha} \tilde{E}_1(2\omega\text{csc}\alpha) \end{bmatrix} \quad (37)$$

为满足式(27)所示的准确重建条件, 与传统的两通道标准正交滤波器组类似, 结合式(29)、(31), 可以选取

$$\begin{aligned} \tilde{G}_{0,p}(\omega) &= \tilde{H}_{1,p}(\omega - \pi\sin\alpha) e^{j\frac{1}{2}\omega\alpha} \left(\frac{2\omega\pi\sin\alpha - \pi^2\sin^2\alpha}{\Delta t^2}\right) \\ &= \tilde{H}_{0,p}(\omega) \quad (38) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \tilde{G}_{1,p}(\omega) &= -\tilde{H}_{0,p}(\omega - \pi\sin\alpha) e^{j\frac{1}{2}\omega\alpha} \left(\frac{2\omega\pi\sin\alpha - \pi^2\sin^2\alpha}{\Delta t^2}\right) \\ &= -\tilde{H}_{1,p}(\omega) \quad (39) \end{aligned}$$

因此, $\tilde{G}_{0,p}(\omega)$ 、 $\tilde{G}_{1,p}(\omega)$ 可以用矩阵形式表示为

$$\begin{bmatrix} \tilde{G}_{0,p}(\omega) & \tilde{G}_{1,p}(\omega) \end{bmatrix} = A_p e^{j\frac{1}{2}\omega\alpha} \left(\frac{\omega}{\Delta t}\right)^2 \cdot \begin{bmatrix} e^{-j\omega\text{csc}\alpha} \tilde{E}_1(2\omega\text{csc}\alpha) & \tilde{E}_0(2\omega\text{csc}\alpha) \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \quad (40)$$

那么, 滤波器组中综合滤波器在时域中可以表示为

$$g_0(n) = h_0(n) \quad (41)$$

$$g_1(n) = -h_1(n) \quad (42)$$

所以, 式(27)可以用式(37)和式(40)表示为

$$\begin{aligned} \tilde{T}_p(\omega) &= \frac{1}{2} e^{-j\frac{1}{2}\omega\alpha} \left(\frac{\omega}{\Delta t}\right)^2 \\ &\cdot \begin{bmatrix} \tilde{G}_{0,p}(\omega) & \tilde{G}_{1,p}(\omega) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{H}_{0,p}(\omega) \\ \tilde{H}_{1,p}(\omega) \end{bmatrix} \\ &= 2A_p^2 e^{j\frac{1}{2}\omega\alpha} \left(\frac{\omega}{\Delta t}\right)^2 e^{-j\omega\text{csc}\alpha} \tilde{E}_0(2\omega\text{csc}\alpha) \end{aligned}$$

$$\cdot \tilde{E}_1(2\omega\text{csc}\alpha) \quad (43)$$

若式(43)要满足式(27)所示的准确重建的条件,

$\tilde{E}_0(2\omega\text{csc}\alpha)$ 、 $\tilde{E}_1(2\omega\text{csc}\alpha)$ 必须取为频域纯延时的形式, 那么以 $h(n)$ 为原型滤波器生成的两通道滤波器组也恰好为傅里叶域中的两通道标准正交镜像滤波器组. 假设

$$\tilde{E}_0(2\omega\text{csc}\alpha) = c_1 e^{-jk(2\omega\text{csc}\alpha)}, \tilde{E}_1(2\omega\text{csc}\alpha) = c_2 e^{-jm(2\omega\text{csc}\alpha)}$$

那么由式(35)和式(36)可以写出 $\tilde{H}_{0,p}(\omega)$ 、 $\tilde{H}_{1,p}(\omega)$ 为

$$\begin{aligned} \tilde{H}_{0,p}(\omega) &= c_1 e^{-j\frac{1}{2}\omega\alpha(2k)^2\Delta t^2} K_p(\omega, 2k\Delta t) \\ &+ c_2 e^{-j\frac{1}{2}\omega\alpha(2m+1)^2\Delta t^2} K_p[\omega, (2m+1)\Delta t] \quad (44) \end{aligned}$$

$$\tilde{H}_{1,p}(\omega) = c_1 e^{-j\frac{1}{2}\omega\alpha(2k)^2\Delta t^2} K_p(\omega, 2k\Delta t)$$

$$- c_2 e^{-j\frac{1}{2}\omega\alpha(2m+1)^2\Delta t^2} K_p[\omega, (2m+1)\Delta t] \quad (45)$$

通过式(44)、(45)可以发现, 为实现准确重建,

$\tilde{H}_{0,p}(\omega)$ 、 $\tilde{H}_{1,p}(\omega)$ 只能取为 p 阶分数阶傅里叶域中纯延时的形式, 该滤波器组没有任何意义, 这一点与传统的

两通道标准正交镜像滤波器组是相同的^[1], 我们只能通过设计 $h_0(n)$ 达到近似准确重建. 由以上的分析可以知道, $h_0(n)$ 可以由已有的标准正交镜像滤波器组的原型滤波器 $h(n)$ 乘以 chirp 基得到, 进而通过式(30)、

式(41)和式(42)得到其余三个滤波器. 仿真实验 6.1 验证了该方法设计的分数阶傅里叶域滤波器组可在分数

阶傅里叶域取得与相应的傅里叶域滤波器组相同的准确重建特性.

5 分数阶傅里叶域两通道共轭正交镜像滤波器组

与分数阶傅里叶域两通道标准正交镜像滤波器组类似, 分数阶傅里叶域两通道共轭正交镜像滤波器组也可以通过传统的共轭正交镜像滤波器组来设计. 假设 $h(n)$ 为傅里叶域中两通道共轭正交镜像滤波器组的原型滤波器, 那么可以设

那么由式(35)和式(36)可以写出 $\tilde{H}_{0,p}(\omega)$ 、 $\tilde{H}_{1,p}(\omega)$ 为

$$h_0(n) = h(n) e^{-j\frac{1}{2}\omega\alpha n^2\Delta t^2} \quad (46)$$

$$h_1(n) = e^{j(n+1)\pi} h(N-1-n) e^{-j\frac{1}{2}\omega\alpha n^2\Delta t^2} \quad (47)$$

其中, 偶数 N 为 $h(n)$ 的长度. 由式(29)可以知道, $h_0(n)$ 的 p 阶分数阶傅里叶变换为

$$\tilde{H}_{0,p}(\omega) = A_p e^{j\frac{1}{2}\omega\alpha} \left(\frac{\omega}{\Delta t}\right)^2 \tilde{H}(\omega\text{csc}\alpha) \quad (48)$$

根据 DTFRFT 定义式可以知道, $h_1(n)$ 在 p 阶分数阶傅里叶的表示为

$$\tilde{H}_{1,p}(\omega) = A_p e^{j\frac{1}{2}\omega\alpha} \left(\frac{\omega}{\Delta t}\right)^2 \begin{bmatrix} \tilde{G}_{0,p}(\omega) & \tilde{G}_{1,p}(\omega) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{H}_{0,p}(\omega) \\ \tilde{H}_{1,p}(\omega) \end{bmatrix} \quad (49)$$

由式(26)所示的准确重建条件, 可以选取

$$\tilde{G}_{0,p}(\omega) = \tilde{H}_{1,p}(\omega - \pi\sin\alpha) e^{j\frac{1}{2}\omega\alpha} \left(\frac{2\omega\pi\sin\alpha - \pi^2\sin^2\alpha}{\Delta t^2}\right)$$

$$= -A_p e^{j\frac{1}{2}c\alpha} \left(\frac{\omega}{\Delta t}\right)^2 e^{-j(N-1)\omega csc\alpha} \tilde{H}(-\omega csc\alpha) \quad (50)$$

$$\begin{aligned} \tilde{G}_{1,p}(\omega) &= -\tilde{H}_{0,p}(\omega - \pi \sin\alpha) e^{j\frac{1}{2}c\alpha} \left(\frac{2\omega \pi \sin\alpha - \pi^2 \sin^2\alpha}{\Delta t^2}\right) \\ &= -A_p e^{j\frac{1}{2}c\alpha} \left(\frac{\omega}{\Delta t}\right)^2 \tilde{H}[(\omega - \pi \sin\alpha) csc\alpha] \end{aligned} \quad (51)$$

即在时域,

$$g_0(n) = -h(N-1-n) e^{-j\frac{1}{2}c\alpha n^2 \Delta t^2} \quad (52)$$

$$g_1(n) = (-1)^{n+1} h(n) e^{-j\frac{1}{2}c\alpha n^2 \Delta t^2} \quad (53)$$

将式(48)、(49)、(50)、(51)代入式(24)

$$\begin{aligned} \tilde{T}_p(\omega) &= -\frac{1}{2} A_p^2 e^{j\frac{1}{2}c\alpha} \left(\frac{\omega}{\Delta t}\right)^2 e^{-j(N-1)\omega csc\alpha} \\ &\quad \times \left\{ \tilde{H}(\omega csc\alpha) \tilde{H}(-\omega csc\alpha) + \tilde{H}[(\omega - \pi \sin\alpha) csc\alpha] \right. \\ &\quad \left. \cdot \tilde{H}[-(\omega - \pi \sin\alpha) csc\alpha] \right\} \end{aligned} \quad (54)$$

因为 $h(n)$ 为傅里叶域中两通道共轭正交镜像滤波器组的原型滤波器, 由两通道共轭正交镜像滤波器组的性质可以知道, $h(n)$ 为功率互补的 FIR 滤波器^[16], 即

$$\begin{aligned} \tilde{H}(\omega_1) \tilde{H}(-\omega_1) + \tilde{H}(\omega_1 - \pi) \tilde{H}[-(\omega_1 - \pi)] &= \\ \tilde{H}(\omega csc\alpha) \tilde{H}(-\omega csc\alpha) + \tilde{H}[(\omega - \pi \sin\alpha) csc\alpha] & \\ \cdot \tilde{H}[-(\omega - \pi \sin\alpha) csc\alpha] &= 1 \end{aligned} \quad (55)$$

其中, ω_1 为傅里叶域数字频率. 因此, 式(54)可以写为

$$\begin{aligned} \tilde{T}_p(\omega) &= -\frac{1}{2} A_p^2 e^{j\frac{1}{2}c\alpha} \left(\frac{\omega}{\Delta t}\right)^2 e^{-j(N-1)\omega csc\alpha} \\ &= -\frac{1}{2} A_p e^{-j\frac{1}{2}c\alpha(N-1)^2 \Delta t^2} K_p[\omega, (N-1)\Delta t] \end{aligned} \quad (56)$$

显然, 式(54)满足式(27)所示的准确重建条件. 与传统的两通道共轭正交镜像滤波器组类似, 可以称由式(46)、式(47)、式(52)和式(53)所示滤波器组成的分数阶傅里叶域滤波器组为分数阶傅里叶域两通道共轭正交镜像滤波器组.

设矩阵

$$\begin{aligned} H_{m,p} &= \\ \begin{bmatrix} \tilde{H}_{0,p}(\omega) & \tilde{H}_{0,p}(\omega - \pi \sin\alpha) \\ \tilde{H}_{1,p}(\omega) & \tilde{H}_{1,p}(\omega - \pi \sin\alpha) \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} e^{j\frac{1}{2}c\alpha} \left(\frac{\omega}{\Delta t}\right)^2 \\ e^{-j\frac{1}{2}c\alpha} \left(\frac{\omega - \pi \sin\alpha}{\Delta t}\right)^2 \end{bmatrix} \\ = A_p \begin{bmatrix} \tilde{H}(\omega csc\alpha) & \tilde{H}(\omega csc\alpha - \pi) \\ e^{-j(N-1)\omega csc\alpha} \tilde{H}[-(\omega csc\alpha - \pi)] & -e^{j(N-1)\omega csc\alpha} \tilde{H}(-\omega csc\alpha) \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (57)$$

进而, 可以得到 $H_{m,p}$ 的厄尔米特转置矩阵为

$$H_{m,p}^H = A_p^* \begin{bmatrix} \tilde{H}(-\omega csc\alpha) & e^{j(N-1)\omega csc\alpha} \tilde{H}(\omega csc\alpha - \pi) \\ \tilde{H}[-(\omega csc\alpha - \pi)] & -e^{j(N-1)\omega csc\alpha} \tilde{H}(\omega csc\alpha) \end{bmatrix} \quad (58)$$

那么, 由式(57)和式(58)可以得到矩阵 $\tilde{H}_{m,p}$ 和 $\tilde{H}_{m,p}^H$ 乘积为

$$\tilde{H}_{m,p} \tilde{H}_{m,p}^H = A_p A_p^* \begin{bmatrix} \tilde{S}(\omega) & 0 \\ 0 & \tilde{S}(\omega) \end{bmatrix} \quad (59)$$

其中, $\tilde{S}(\omega) = \tilde{H}(\omega csc\alpha) \tilde{H}(-\omega csc\alpha) + \tilde{H}(\omega csc\alpha - \pi) \tilde{H}[-(\omega csc\alpha - \pi)]$

$[-(\omega csc\alpha - \pi)]$, 由式(55)所示的滤波器功率互补特性可以知道 $\tilde{S}(\omega) = 1$, 式(59)可以进而写为

$$\tilde{H}_{m,p} \tilde{H}_{m,p}^H = A_p A_p^* \cdot I \quad (60)$$

其中, I 为单位矩阵, 因此若不考虑系数的影响, 分数阶傅里叶域两通道共轭正交镜像滤波器组也是仿酉的. 仿真实验 6.2 验证了该方法设计的分数阶傅里叶域滤波器组可在分数阶傅里叶域取得与相应的傅里叶域滤波器组相同的准确重建特性.

6 仿真实验

在本节中, 我们将通过现在已有的傅里叶域两通道标准正交滤波器、共轭正交滤波器的原型滤波器模型来设计分数阶傅里叶域的滤波器组, 以证明本文所提出来的结论. 在以下仿真中, 使用的是 Soor Chang Pei 在 2000 年提出的离散分数阶傅里叶变换算法^[17], 其分数阶傅里叶变换系数均作了归一化处理.

6.1 分数阶傅里叶域两通道标准正交镜像滤波器组

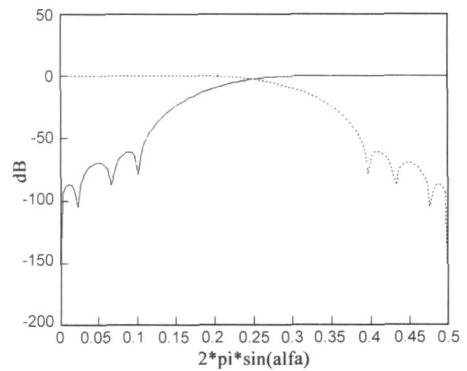


图 4 分数阶傅里叶域标准正交镜像滤波器组 $\tilde{H}_{0,p}$ 和 $\tilde{H}_{1,p}$ 对数幅频响应曲线

在本仿真实验中, 傅里叶域标准正交滤波器组原型滤波器 $h(n)$ 采用文献[18]中用 Johnston 算法设计出的序号为 16A 的滤波器. 设该滤波器在时域的采样间隔为 $\Delta t = 1$, 根据式(28)可以得出 $p = 1/2$ 阶分数阶傅里叶域标准正交镜像滤波器组中低通滤波器 $h_0(n)$ 的单位抽样响应. 滤波器 $h_1(n)$ 、 $g_0(n)$ 、 $g_1(n)$ 的单位抽

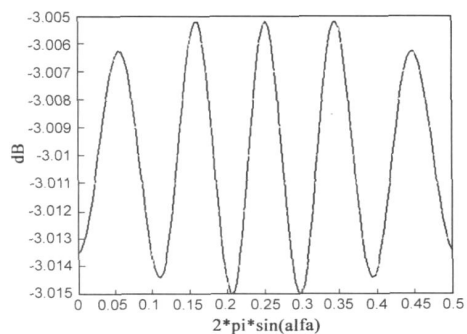


图 5 分数阶傅里叶域标准正交镜像滤波器组 $\tilde{H}_{0,p}$ 和 $\tilde{H}_{1,p}$ 对数幅频响应曲线

样响应则可以通过式(30)、式(41)和式(42)确定,图4中虚线、实线分别为 $p = 1/2$ 阶分数阶傅里叶域低通滤波器 $h_0(n)$ 、高通滤波器 $h_1(n)$ 在相应的分数阶傅里叶域数字频率轴上的对数幅频特性。图5所示为 $\tilde{T}_p(\omega)$ 的对数幅频特性,可以看出它在 $0 \sim \pi \sin \alpha$ 的范围内并不完全准确重建,只能达到近似准确重建,这与由 $h(n)$ 生成的傅里叶域标准正交滤波器准确重建特性相同^[8]。

6.2 分数阶傅里叶域两通道共轭正交镜像滤波器组

在本仿真实验中,傅里叶域标准正交滤波器组原型滤波器 $h(n)$ 采用文献[16]中长度为16的滤波器,设该滤波器在时域的采样间隔为 $\Delta t = 1$,根据式(46)可以得出 $p = 1/2$ 阶分数阶傅里叶域共轭正交镜像滤波器组中低通滤波器 $h_0(n)$ 的单位抽样响应。滤波器 $h_1(n)$ 、 $g_0(n)$ 、 $g_1(n)$ 的单位抽样响应则可以通过式(47)、式(52)和式(53)确定,图6中虚线、实线分别为 $p = 1/2$ 阶分数阶傅里叶域低通滤波器 $h_0(n)$ 、高通滤波器 $h_1(n)$ 在相应的分数阶傅里叶域数字频率轴上的幅频曲线。图7为 $\tilde{T}_p(\omega)$ 在分数阶傅里叶域数字频率轴上的对数幅频特性。这与由 $h(n)$ 生成的傅里叶域共轭正交滤波器准确重建特性相同^[16]。

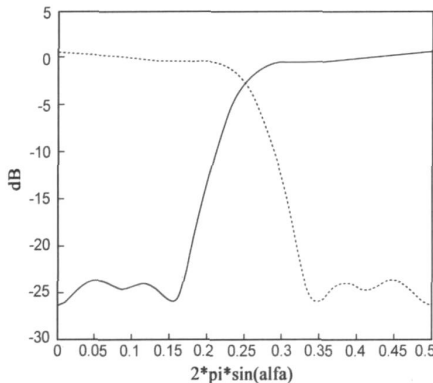


图6 分数阶傅里叶域共轭正交镜像滤波器组 $\tilde{H}_{0,p}$ 和 $\tilde{H}_{1,p}$ 对数幅频响应曲线

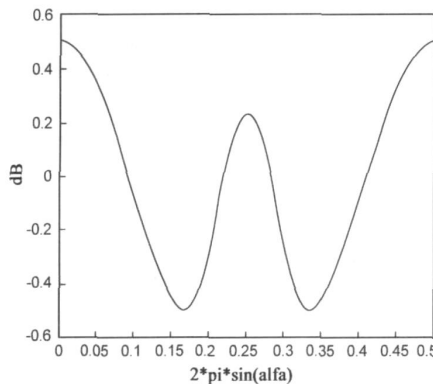


图7 分数阶傅里叶域共轭正交镜像滤波器组 \tilde{T}_p 对数幅频响应曲线

7 结论

本文定义了分数阶傅里叶域滤波器组准确重建的

基本条件,推导出了分数阶傅里叶域两通道滤波器组的准确重建条件。在此基础上,本文基于傅里叶域标准正交镜像滤波器组和共轭正交镜像滤波器组的原型滤波器,提出了分数阶傅里叶域有限长标准正交镜像滤波器组和共轭正交镜像滤波器组的设计方法。该方法设计出的分数阶傅里叶域滤波器组在分数阶傅里叶域可以取得与相应的傅里叶域滤波器组相同的准确重建特性。本文所提出的结论丰富了分数阶傅里叶变换理论体系,为分数阶傅里叶域滤波器组的设计提供了基本方法;并且,分数阶傅里叶域两通道准确重建滤波器组的提出为滤波器组理论在基于分数阶傅里叶变换的数字图像处理、数字水印、语音信号处理中的应用奠定了理论基础。

参考文献:

- [1] Vaidyanathan P P. Multirate digital filters, filter banks, polyphase networks, and applications: a tutorial[J]. Proceedings of the IEEE, 1990, 78(1): 56–93.
- [2] Mallat S. A Wavelet Tour of Signal Processing[M]. San Diego, CA: Academic Press, 1997.
- [3] Ashourian M, et al. Design of image watermarking system in subband transform domain with minimum distortion[P]. TENCON 2000 Proceedings, 2000, 3: 379–382.
- [4] Regalia P A, Dong yan H. Eigenstructure algorithms for multirate adaptive lossless FIR filters[J]. IEEE Transactions on Signal Processing, 2006, 54(4): 1386–1398.
- [5] Vetterli M, Herley C. Wavelets and filter banks. Theory and design[J]. IEEE Transactions on Signal Processing, 1992, 40(9): 2207–2232.
- [6] Wiener N. Hermitian polynomials and Fourier analysis[J]. Journal of Mathematics Physics MIT, 1929, 18: 70–73.
- [7] Almeida L B. The fractional Fourier transform and time frequency representations[J]. IEEE Transactions on Signal Processing, 1994, 42(11): 3084–3091.
- [8] Tao Ran, et al. Research Process of the Fractional Fourier Transform in Signal Processing[J]. Science in China: Series F, 2006, 49(1): 1–25.
- [9] 陶然, 齐林, 王越. 分数阶 Fourier 变换的原理与应用[M]. 北京: 清华大学出版社, 2004. 23–49.
- [10] Qi Lin, et al. Detection and parameter estimation of multicomponent LFM signal based on the fractional Fourier transform[J]. Science in China, Ser F, 2004, 47(2): 184–198.
- [11] Djurovic I, et al. Digital watermarking in the fractional Fourier transformation domain[J]. Journal of Network and Computer Applications, 2001, 24(4): 167–173.
- [12] Sarikaya R, Gao Y Q, Saon G. . Fractional Fourier transform features for speech recognition[P]. ICASSP 04 Proceedings, 1, NJ: IEEE, 2004: 529–532.

- [13] Meng XiangYi, et al. Fractional Fourier domain analysis of decimation and interpolation[J]. Science in China: Series F, 2007, 50(4): 521– 538.
- [14] Erseghe T, et al. Unified fractional Fourier transform and sampling theorem[J]. IEEE Transactions on Signal Processing, 1999, 47(12): 3419– 3423
- [15] Zayed A I. A convolution and product theorem for the fractional Fourier transform[J]. IEEE Transactions on Signal Processing Letters, 1998, 5(4): 101– 103.
- [16] Smith M J, Barnwell T P. Exact reconstruction techniques for tree structured subband coders[J]. IEEE Transactions on Acoustics, Speech, and Signal Processing, 1986, 34(3): 434– 441.
- [17] Pei S C, Ding J J. Closed-Form Discrete Fractional and Affine Fourier Transforms[J]. IEEE Transactions on Signal Processing, 2000, 48(5): 1338– 1353.
- [18] Johnston J D. A filter family designed for use in quadrature mirror filter banks[P]. Proc IEEE ICASSP, 1980: 291– 294.

作者简介:



孟祥意 男, 1983年8月生于北京, 2005年6月毕业于中国传媒大学(原北京广播学院)电子信息工程系广播电视工程专业, 获工学学士学位, 2005年9月起在北京理工大学电子工程系硕博连读, 主要研究方向为现代信号处理理论及其在通信信号处理、数字水印中的应用。

E-mail: mxy0827@bit.edu.cn



陶然 男, 1964年11月生于安徽南陵, 1993年于哈尔滨工业大学获博士学位, 现任北京理工大学信息安全与对抗学科首席教授、博士生导师、国家杰出青年科学基金获得者、IEEE高级会员, 获高校青年教师奖和中国兵工青年科技奖, 部级科技进步一、二等奖各1项, 以第一作者出版专著、教材4部, 在IEEE汇刊、Signal Processing、中国科学、电子学报、兵工学报上发表论文

70余篇, 以第一申请人已获授权发明专利4项、软件著作权6项, 研究方向: 分数阶傅里叶变换理论及应用、通信与信息系统、信息安全与对抗, E-mail: rantao@bit.edu.cn