

利用时间步进算法精确稳定求解时域积分方程

赵庆广, 赵延文, 毕海燕, 聂在平

(电子科技大学电子工程学院, 四川成都 610054)

摘要: 时域阻抗矩阵元素的计算需要分别计算场单元和源单元上的空时积分, 由于时间基函数的分域性以及时间基函数(如三角型时间基函数)导数的不连续性, 使得采用高斯积分方法计算源单元上空时积分的计算精度较差且误差随着时间步长的减小而增大. 本文通过将源单元上空时积分转变成1D时间卷积积分和1D空间解析积分来精确计算时域阻抗矩阵元素, 并在此基础上利用时间步进算法求解了时域电场、磁场和混合场积分方程. 通过计算实例表明该方法在较大的时间步长取值范围内均能确保时域积分方程时间步进算法求解的精度和后时稳定性.

关键词: 时域积分方程 (TDIE); 时间步进算法 (MOT); 混合场积分方程 (CFIE)

中图分类号: TN011 **文献标识码:** A **文章编号:** 0372-2112 (2008) 06-1135-05

Accurate and Stable Solution of Time-Domain Integral Equation Using Marching-On-In-Time Method

ZHAO Qing-guang, ZHAO Yan-wen, BI Hai-yan, NIE Zai-ping

(School of Electronic Engineering, University of Electronic Science and Technology of China, Chengdu, Sichuan 610054, China)

Abstract: The evaluation of time-domain impedance matrix elements needs to respectively compute the space-time integrals in the field cell and the source cell. Because of temporal basis function's regionality and its derivative's uncontinuity (such as the triangle temporal basis function), the accuracy of space-time integral in the source cell is worse by method of the Gauss integral and the error increases when time interval gets narrow. The paper accurately computes time-domain impedance matrix elements by transforming space-time integral of the source cell to 1D time convolution and 1D space analytical integral and further solves time-domain electric field, magnetic field and combined field integral equations by method of marching-on-in-time. Numerical results show that the proposed method insures that the solution of time-domain integral equation using marching-on-in-time method is stable and accurate when the time interval changes in the broad range.

Key words: time-domain integral equation (TDIE); marching-on-in-time (MOT); combined field integral equation (CFIE)

1 引言

近年来, 由于高分辨短脉冲雷达和超宽带无线通信的急切发展需求, 瞬态电磁辐射和散射问题得到广泛的重视. 时域积分方程 (TDIE) 方法是分析瞬态电磁问题的主要方法之一, 它既具有时域方法的优点 (仅一次计算就可以得到多个频率下的结果, 更适合并行计算等), 又具有积分方程方法的优点 (没有网格色散误差, 无须强加吸收边界条件等). 然而, 求解 TDIE 时间步进算法 (MOT) 的后时不稳定性和求解精度较差严重地制约了 TDIE 方法的广泛应用和发展. MOT 算法的后时不稳定性是由于数值离散^[1]和谐振模式^[2]、高低频成分^[3]等原因的存在, 使得在后期电流出现幅度震荡式指数上升或单调地增大, 并最终导致发散的现象. 许多的学者提出

了抑制后时不稳定的方法, Rynne^[4]和 Vecchinski^[5]提出了电流空时平均方法, 然而这种方法降低了求解的精度且不适合求解尺寸较大或几何结构复杂的目标. Weile^[3]提出了一种频谱带限的时间基函数来改善稳定性, 由于该时间基函数不满足因果律而需对电流采用外插技术, 增加了计算量; 同时, 为确保电流外插精度其时间步长应选得很小. Rao 和 Sarkar 提出了隐式时间步进算法^[6], 文献[7, 8]指出通过隐式步进算法和恰当的数值积分可以得到非常稳定的解, 实际上是通过减少数值离散误差对后时稳定的影响. 对于隐式时间步进算法, 精确计算时域阻抗矩阵是保证后时稳定的关键. 时域阻抗矩阵元素通常通过在场单元和源单元多结点 2D 高斯积分近似计算. 在计算源单元空时积分时, 由于时间基函数的分域性, 采用 2D 高斯积分法将产生较大的积

收稿日期: 2007-06-27; 修回日期: 2008-01-28

基金项目: 国家自然科学基金 (No. 60571022); 国家部级基金 (No. 9140A03010206DZ0238, 9140A03010507DZ0209)

分误差,并将导致 MOT 算法求解的后时不稳定性和解的不精确性(时间步长较小时尤其如此). 本文将源单元上的空时积分转化为 1D 时间卷积积分加 1D 空间解析积分来精确地计算时域阻抗矩阵元素,在此基础上利用 MOT 算法求解了时域电场积分方程(TDEFIE)、磁场积分方程(TDMFIE)和混和场积分方程(TDCFIE),并通过计算实例分析了 MOT 算法求解精度、后时稳定性以及时间步长对 MOT 算法后时稳定性和求解精度的影响.

2 时域积分方程及其 MOT 算法求解

假设任意形状金属导体的表面为 S , 当入射电场 $E^{inc}(r, t)$ 或入射磁场 $H^{inc}(r, t)$ 照射到导体上时,将在导体表面 S 上产生感应电流 $J(r, t)$, 则该感应电流所满足的 TDEFIE 和 TDMFIE 分别为

$$n \times E^{inc}(r, t) = n \times \left[\frac{\partial A(r, t)}{\partial t} + \nabla \phi(r, t) \right] \quad (1)$$

$$n \times H^{inc}(r, t) = \frac{J(r, t)}{2} - \frac{1}{\mu} n \times \nabla \times A(r, t) \quad (2)$$

其中矢量位 $A(r, t)$ 和标量位 $\phi(r, t)$ 分别表示为

$$A(r, t) = \frac{\mu}{4} \int_S \frac{J(r', t - R/c)}{R} dS = \frac{\mu}{4} \int_S \frac{J(r', t) * (t - R/c)}{R} dS \quad (3)$$

$$\phi(r, t) = \frac{-1}{4} \int_S \int_0^{t-R/c} \frac{\nabla_s J(r', t)}{R} dt dS = \frac{-1}{4} \int_S \left[\int_0^t \nabla_s \cdot J(r', t) dt \right] * \frac{(t - R/c)}{R} dS \quad (4)$$

式中 $*$ 表示卷积, $R = |r - r'|$ 表示场点 r 和源点 r' 之间的距离, n 为散射体表面单位外法向矢量, μ 和 ϵ 分别为散射体周围介质的介电常数和磁导率, 而 c 为电磁波在其中传播的速度. 由 TDEFIE 和 TDMFIE 线性组合可得到 TDCFIE:

$$TDCFIE = TDEFIE + (1 - \epsilon) TDMFIE \quad (5)$$

当 $\epsilon = 1, 0$ 时, TDCFIE 分别退化为 TDEFIE 和 TDMFIE.

若在空间上采用 RWG 基函数 $f_n(r)$ ^[9]、在时间上采用三角型时间基函数 $T_l(t)$ ^[10], 对散射体表面的感应电流 $J(r, t)$ 进行空间和时间上的离散, 因此散射体表面的感应电流可以展开为,

$$J(r, t) = \sum_{n=1}^{N_s} \sum_{l=1}^{N_t} I_n^l T_l(t) f_n(r) \quad (6)$$

其中 I_n^l 为与时空基函数 $f_n(r) T_l(t)$ 相关的待求加权系数. 将式(6)代入方程(5), 并且在空间上采用伽略金方法、在时间上采用点匹配方法(时间匹配点为 k, t)可将方程式(5)离散成矩阵方程

$$M_0^C \cdot I_k = V_k^C - \sum_{l=1}^{k-1} M_l^C \cdot I_{k-l} \quad (7)$$

其中 $I_k(m) = I_m^k$, 且

$$V_k^C(m) = \int_{S_m} E^{inc}(r, t_k) \cdot f_m(r) dS$$

$$+ (1 - \epsilon) \int_{S_m} [n \times H^{inc}(r, t_k)] \cdot f_m(r) dS \quad (8)$$

$$M_l^C = M_l^E + (1 - \epsilon) M_l^H, \quad l = 0, 1, \dots \quad (9)$$

$$M_l^E(m, n) = \int_{S_m} \frac{\nabla \cdot f_m(r)}{4} \cdot \left[\int_0^t T(t) dt * \int_{S_n} \frac{\nabla \cdot f_n(r)}{R} (t - R/c) dS \right] \Big|_{t=l} dS + \frac{\mu}{4} \int_{S_m} f_m(r) \cdot \left[\frac{\partial T(t)}{\partial t} * \int_{S_n} \frac{f_n(r)}{R} (t - R/c) dS \right] \Big|_{t=l} dS \quad (10)$$

$$M_l^H(m, n) = \frac{T(l-t)}{2} \int_{S_m} f_m(r) \cdot f_n(r) dS - \frac{1}{4} \int_{S_m} f_m(r) \cdot n(r) \times \left[T(t) * \int_{S_n} f_n(r) \times R \frac{(t - R/c)}{R^3} dS \right] \Big|_{t=l} dS - \frac{1}{4} \int_{S_m} f_m(r) \cdot n(r) \times \left[\frac{\partial T(t)}{\partial t} * \int_{S_n} f_n(r) \times R \frac{(t - R/c)}{cR^2} dS \right] \Big|_{t=l} dS \quad (11)$$

由第 $(k-1)$ 个时间步以前的电流和第 k 个时间步的入射电磁场, 通过解矩阵方程式(7)就可以递推求出第 k 个时间步上的电流.

3 时域阻抗矩阵元素的精确计算

精确计算时域阻抗矩阵元素是稳定求解 TDIE 的关键. 时域阻抗矩阵元素分为自阻抗矩阵元素和互阻抗矩阵元素, 它们均需要计算场单元和源单元上的空时积分. 通常通过在场单元和源单元多结点 2D 高斯积分法近似计算, 又由于电场积分方程自阻抗矩阵元素存在奇异性问题, 还需要采用奇异值提取法^[11]、Duffy 变换方法^[12]等处理奇异性和近奇异性问题. 对于源单元上的空时积分, 由于时间基函数的分域性, 使得积分区域实际上不再是整个源三角形单元, 而应是满足 $(l-1)c < t - |R| < (l+1)c$ 的环形区域和源三角形单元的交集. 若在源三角形单元上采用 2D 高斯积分法, 将导致较大的积分误差, 且时间步长越小误差就越大. 为精确计算 TDEFIE 阻抗矩阵元素式(10)和 TDMFIE 阻抗矩阵元素式(11), 外层场三角形单元上的面积分仍然采用高斯积分法, 而源三角形单元上的空时积分转变成为 1D 时间卷积和源三角单元上的空间积分. 文献^[13]推导和精确计算了该源三角形单元上的空间积分, 但不能用于计算 TDMFIE 阻抗矩阵元素. 本文将该源三角形单元上的空间积分推广为下面的积分表达式,

$$I_n(r, t) = \int_{T_n} \begin{pmatrix} 1 \\ (r - r_n) \\ (r - r_n) \times R \end{pmatrix} (t - R/c) \frac{F(R)}{R} dS \quad (12)$$

上式中 $F(R)$ 为关于 R 的连续函数, r_n 为第 n 个基函数的自由节点, T_n 为源三角单元. 通过计算式(12), 既可以计算 TDEFIE 阻抗矩阵元素又可以计算 TDMFIE 阻抗

矩阵元素. 为推导式(12)的解析表达式, 首先在源三角单元 T_n 上建立局部坐标 (u, v, w) (如图 1 所示), 其坐标单位矢量为:

$$\hat{w} = \frac{(r_2 - r_1) \times (r_3 - r_1)}{|(r_2 - r_1) \times (r_3 - r_1)|}$$

$$\hat{u} = \frac{(r_2 - r_1)}{|r_2 - r_1|}, \hat{v} = \hat{w} \times \hat{u}$$

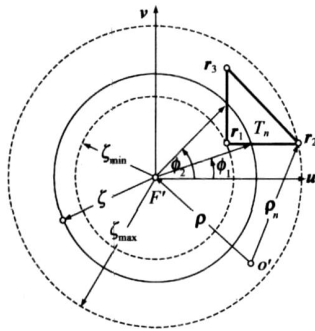


图 1 局部坐标系中各几何参数表示

在图 1 中 r_1, r_2, r_3 表示源单元 T_n 的三个结点位置. F, O 分别为场点 r 和全局坐标的原点在源单元 T_n 所在平面上的投影点. $d = \sqrt{R^2 - r^2}$ (d 为场点到 F 的距离). 若用圆柱坐标 (R, ϕ, w) 表示该局部坐标 (u, v, w) , 则式(12)可以表示成

$$I_n(r, t) = \int_{\phi_1}^{\phi_2} \int_{R_{min}}^{R_{max}} \frac{F(R)}{R} (t - R/c) dR d\phi$$

将关系式 $d = R \sin \phi, r - r_n = R \cos \phi$ 和 $R = r - r_n + d$, 代入式(14)可得

$$I_n(r, t) = \int_{\phi_1}^{\phi_2} \int_{R_{min}}^{R_{max}} F(R) (t - R/c) R dR d\phi$$

再利用 $\hat{r} = (\cos \phi \hat{u} + \sin \phi \hat{v})$, 可将式(15)变为

$$I_n(r, t) = \int_{\phi_1}^{\phi_2} \int_{R_{min}}^{R_{max}} c \sqrt{R^2 - d^2} (\cos \phi \hat{u} + \sin \phi \hat{v}) F(R) (R - ct) dR d\phi$$

这样, 利用 $\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}')$ 函数的空间选择性可得

$$I_n(r, t) = \int_{\phi_1}^{\phi_2} \int_{R_{min}}^{R_{max}} c \sqrt{(ct)^2 - d^2} F(ct) e(t) + \int_{\phi_1}^{\phi_2} \int_{R_{min}}^{R_{max}} c [\phi_2(t) - \phi_1(t)] F(ct) dR d\phi$$

其中 $e(t) = [\sin \phi_2(t) - \sin \phi_1(t)] \hat{u} - [\cos \phi_2(t) - \cos \phi_1(t)] \hat{v}$, d 为由场点的投影点 F 指向场点的矢量. R_{min}, R_{max} 分别是场点到源三角单元 T_n 的最近和最远距离.

ϕ_2 和 ϕ_1 表示以 F 为圆心、以 $\sqrt{(ct)^2 - d^2}$ 半径的圆与源三角形单元 T_n 相交所形成弧的两个端点的 ϕ 分量. 特别地, 当该圆整个位于源三角形单元 T_n 内时, $\phi_2 - \phi_1 = 2\pi$ 且 $e(t) = 0$; 若相交形成的弧有许多段, 每段弧的贡献都要相加求和.

对于电场积分方程 $F(R) = 1$, 对电场积分方程有贡献的是式(17)中的前两项, 从中看出已经消除了电场积分方程的奇异性问题. 可见, 源单元空时积分被转化成 1D 时间卷积积分和 1D 空间解析积分. 由于解析积分总是精确的, 1D 时间卷积积分又可以足够精确的计算, 所以这种积分技术的计算精度很高, 不但适合非奇异性积分, 也适合奇异性及近奇异性积分; 还可以克服在较小时间步长的条件下高斯积分精度不够的缺点.

4 计算结果及讨论

下面用数值算例证明本文方法求解瞬态电磁散射问题的稳定性和准确性. 以下算例均假定入射电场为高斯平面波

$$E^{inc}(r, t) = 4 E_0 \exp(-t^2/T^2) / (\sqrt{T}) \quad (18)$$

其中 $T = 4(ct - ct_0 - r \cdot \hat{k})/T, ct_0 = 6m$. 首先考查基于本文方法的 MOT 算法的后时稳定性, 目标为边长 1.0m、中心位于坐标原点的理想导电立方体. 立方体的六个面总共被分成 240 个三角形单元和 360 个未知电流. 入射电场 $E_0 = \hat{x}$, 入射方向 $\hat{k} = \hat{z}$, 高斯脉冲宽度 $T = 4m$. 计算立方体上表面中心点 $(0.0, 0.0, 0.5)m$ 处感应电流密度幅度. 图 2 为文献 [14] 的方法 (基于 Duffy 变换的 MOT) 求解 TDEFIE 和本文方法求解 TDEFIE、TDMFIE、TDCFIE 不同时间步长 ($\Delta t = 0.1, 0.3, 0.8ns$) 下后时稳定

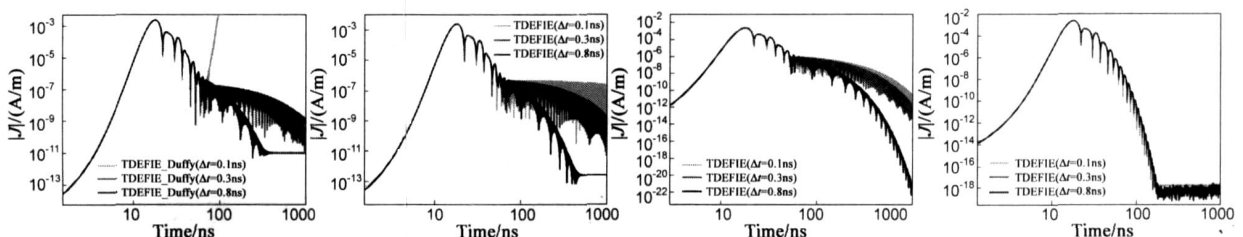


图 2 边长 1m 的立方体上表面中心点处的电流幅度随时间变化关系

性比较.从图2可以看出,在3种不同的时间步长下,本文方法求解 TDEFIE、TDMFIE、TDCFIE 的稳定性均比文献[14]的方法求解 TDEFIE 的稳定性好,且保证后时稳定的时间步长取值范围更宽.特别在 $t=0.1\text{ns}$ 时基于 Duffy 变换的 MOT 方法已经发散.这是因为文献[14]采用了高斯积分方法计算时域互阻抗矩阵元素,当时间步长很小时产生了较大的误差,导致结果的不稳定.而本文方法不但精确地计算自阻抗矩阵元素,还可以精确地计算互阻抗矩阵元素,所以此时 MOT 算法后时稳定性更好.从图(b)~(d)还可以看出,采用本文的方法求解 TDEFIE 和 TDMFIE 并没有出现后期电流幅度震荡式指数上升或单调地增大等不稳定现象,不过由于 TDEFIE 和 TDMFIE 要受到谐振模式的影响,其后时稳定性不如 TDCFIE.

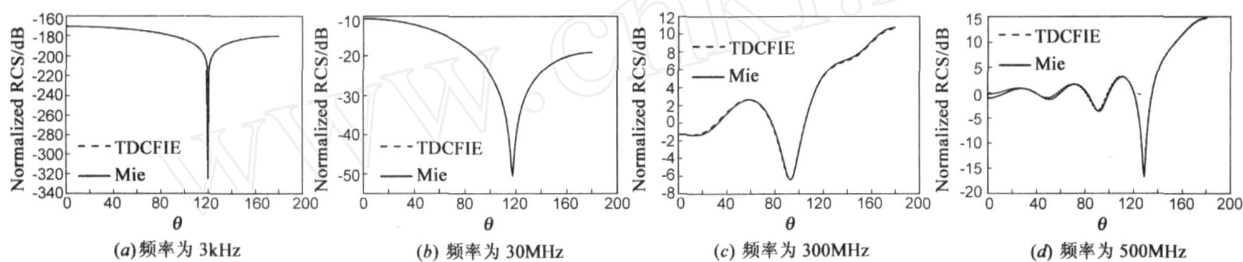


图3 TDCFIE 计算金属球各频点的双站 RCS 与 Mie 级数解之间的对比

第二个算例为金属球锥联合体,球的半径为 0.235m ,锥长 1m .球锥体被剖分为 952 个三角形和 1428 个未知电流.入射电场仍然为高斯平面波,入射电场 $E_0 = \hat{z}$,入射方向 $\hat{k} = -\hat{x}$,脉冲宽度为 $T=2\text{m}$.利用本文

下面考察本文方法的准确性,第一个算例是半径为 0.5m 、中心位于原点的理想导体球.导体球被剖分为 1230 个三角形和 1845 个未知电流.入射电场仍然为高斯平面波,入射电场 $E_0 = \hat{x}$,入射方向 $\hat{k} = -\hat{z}$,高斯脉冲宽度 $T=2\text{m}$ (其最高频率 $f_{\text{max}} = 0.5\text{GHz}$:高斯平面波频谱相对幅度下降为 0.1% 时的频率).利用本文方法求解 TDCFIE 计算该目标的时域响应,然后傅立叶变换到频域计算各频点双站雷达散射截面(RCS).时间步长为 $t=0.2\text{ns}$,混合场积分方程的加权系数 $\omega = 0.2$.图3给出了本文方法和 Mie 解析结果的比较.从图3中看出,各频点上的计算结果与 Mie 的解析结果吻合得很好,即使是频率为 500MHz 时(在该频率下入射场幅度已下降为最大幅度的 0.1%),计算结果依然吻合较好.

方法求解 TDCFIE,同样计算双站 RCS.时间步长为 $t = 0.2\text{ns}$,混合场积分方程的加权系数 $\omega = 0.5$.图4给出了本文方法与频域矩量法(MoM)计算结果的对比.从图看出结果依然吻合很好.

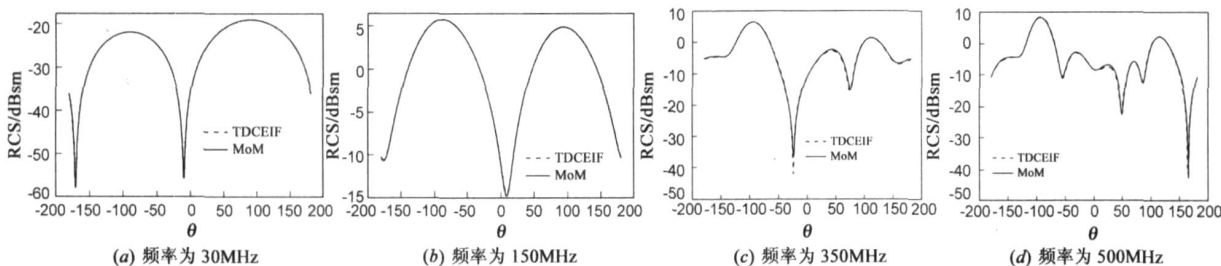


图4 TDCFIE 计算金属锥球联合体各频点的双站 RCS 和频域积分方程 MoM 计算结果之间的对比

5 结束语

本文将源单元上的空时积分转变为 1D 时间卷积积分加 1D 空间解析积分,克服了时间步长小 2D 高斯积分法精度较差的缺点.该方法不但可以精确计算时域积分方程的非奇异性积分,也可以精确计算其奇异性和近奇异性积分;既可精确计算时域电场积分方程的阻抗矩阵元素,又可精确计算时域磁场积分方程的阻抗矩阵元素.同时,时间步长的大小不会影响该积分方法的计算精度,使得相应的 MOT 算法时间步长取值范围大.通过计算实例证明了,该精确积分方法的使用大大改善了求解 TDIE 的 MOT 算法的后时稳定性和求解精度.

参考文献:

- [1] B P Rynne. Stability and convergence of time marching methods in scattering problems[J]. IMA Journal of Applied Mathematics, 1985, 35(3): 297 - 310.
- [2] B P Rynne, Smith P D. Stability of time marching algorithms for the electric field integral equation[J]. Journal of Electromagnetic Waves and Applications, 1990, 4(12): 1181 - 1205.
- [3] D S Weile, G Pisharody, N W Chen, et al. A novel scheme for the solution of the time-domain integral equations of electromagnetics[J]. IEEE Trans Antennas and Propagat, 2004, 52(1): 283 - 295.
- [4] B P Rynne. Time domain scattering from arbitrary surfaces using the electric field integral equation[J]. Journal of Electro-

- magnetic Waves and Applications, 1991, 5:93 - 112.
- [5] D A Vechninski, S M Rao. A stable procedure to calculate the transient scattering by conducting surfaces of arbitrary shape [J]. IEEE Trans Antennas and Propagat, 1992, 40 (6) :661 - 665.
- [6] S M Rao, T K Sarkar. An alternative version of the time domain electric field integral equation for arbitrarily shaped conductors [J]. IEEE Trans Antennas and Propagat, 1993, 41 (6) : 831 - 834.
- [7] M J Bluck, S P Walker. Time-domain bie analysis of large three dimensional electromagnetic scattering problems [J]. IEEE Trans Antennas and Propagat, 1997, 45 (5) :894 - 901.
- [8] B Shanker, A A Ergin, K Aygün. Analysis of transient electromagnetic scattering from closed surfaces using a combined field integrals equation [J]. IEEE Trans Antennas and Propagat, 2000, 48 (7) :1064 - 1074.
- [9] S M Rao, D R Wilton, A W Glisson. Electromagnetic scattering by surfaces of arbitrary shape [J]. IEEE Trans Antennas and Propagat, 1982, 30 (3) :409 - 418.
- [10] Rao S M, Wilton D R. Transient scattering by conducting surfaces of arbitrary shape [J]. IEEE Trans Antennas and Propagat, 1991, 39 (1) :56 - 61.
- [11] R D Graglia. On the numerical integration of the linear shape functions times the 3-D green's function or its gradient on a plane triangle [J]. IEEE Trans Antennas and Propagat, 1993, 41 (10) :1448 - 1455.
- [12] M G Duffy. Quadrature over a pyramid or cube of integrands with a singularity at a vertex [J]. SIAM Journal on Numerical Analysis, 1982, 19 (6) :1260 - 1262.
- [13] Abdulkadir C Yücel, A Arif Ergin. Exact evaluation of retarded-time potential integrals for the RWG bases [J]. IEEE Trans Antennas and Propagat, 2006, 54 (5) :1496 - 1502.
- [14] Zhao Yan-wen, Nie Zai-ping, et al. A stable and accurate time-marching solution of the time-domain electric integral equation [A]. IEEE Antennas and Propagation Society International Symposium [C]. Washington: IEEE Press, 2005. 187 - 190.

作者简介:



赵庆广 男, 1981 年 11 月出生于山东省邹城市, 现为电子科技大学硕士研究生. 主要从事计算电磁学、天线和瞬态电磁散射与辐射等的研究. E-mail: qgzha@uestc.edu.cn



赵延文 男, 1965 生于四川武胜, 现为电子科技大学副教授, 博士生导师. 1998 年至 1999 年曾在香港城市大学电子工程系作访问学者. 已在国内外发表学术论文 60 余篇, 获国家科技进步二等奖 1 项、省部级科技进步一等奖 2 项. 主要从事计算电磁学、非均匀介质中的场与波及其在石油电测井中的应用、电磁散射与逆散射及其在生物医学中的应用、时域超宽带电磁场理论及其应用等的研究. E-mail: ywzhao@uestc.edu.cn