

SVD 和小波变换的信号处理效果相似性及其机理分析

赵学智, 叶邦彦

(华南理工大学机械工程学院, 广东广州 510640)

摘要: 指出当采用 Hankel 矩阵时, 利用 SVD 可以获得与小波变换十分相似的信号处理效果. 证明了在 Hankel 矩阵方式下 SVD 可将原始信号分解为一系列分量信号的简单线性叠加, 而分量信号实质上反映了与左、右正交矩阵形成的 m 维和 n 维空间的规范正交基的相似程度. 从空间基的角度和 Hankel 矩阵本身的特点分析了 SVD 和小波变换在信号处理机理上的相似性, 并研究了这两种方法获得的结果之间的正交性差异. 指出采用 Hankel 矩阵时, SVD 也具有类似于小波变换那样的奇异性检测能力, 但是与小波相比, SVD 的奇异性检测具有两个特点: 一是各分量的消失矩阶数逐次增加, 第 n 个 SVD 分量具有 $n-1$ 阶消失矩, 因而各分量可以检测出具有不同奇异性指数的奇异点; 二是所有 SVD 分量中指示奇异点位置的脉冲宽度始终保持不变, 而且这个宽度由所构造的 Hankel 矩阵的列数决定.

关键词: SVD; 小波变换; Hankel 矩阵; 信号处理; 相似性

中图分类号: TN911.7; TH165.3 **文献标识码:** A **文章编号:** 0372-2112(2008)08-1582-08

The Similarity of Signal Processing Effect between SVD and Wavelet Transform and Its Mechanism Analysis

ZHAO Xue zhi, YE Bang yan

(School of Mechanical Engineering, South China University of Technology, Guangzhou, Guangdong 510640, China)

Abstract: It's pointed out that singular value decomposition (SVD) has the very similar signal processing effect as wavelet transform when Hankel matrix is used. It's proved that original signal can be decomposed into the linear superposition of a series of component signals by SVD using Hankel matrix, and what the component signals reflect essentially are the similarity extent of original signal to standard orthogonal bases of m and n dimension space constituted by left and right orthogonal matrix in SVD. The similarity mechanism of signal processing of SVD and wavelet transform is analyzed from the angle of basis of vector space and characteristic of Hankel matrix. The orthogonality difference of component signals got by SVD and wavelet transform is studied theoretically. It's pointed out that SVD also has the singularity detection ability when Hankel matrix is used, but compared with wavelet transform, SVD has two characteristics in singularity detection, one is that the vanishing moment of SVD component signals is increased progressively and the n 'th SVD component signal has the $n-1$ 'th order vanishing moment so that singular point with different Lip index can also be detected, the other is that the width of the impulse that indicates the position of singular point will keep the same in all SVD component signals and this width is determined by the column number of Hankel matrix.

Key words: SVD; wavelet transform; Hankel matrix; signal processing; similarity

1 引言

奇异值分解(Singular Value Decomposition, SVD)是指: 对于一个实矩阵 $A \in \mathbf{R}^{m \times n}$, 必定存在正交矩阵 $U = [u_1, u_2, \dots, u_m] \in \mathbf{R}^{m \times m}$ 和正交矩阵 $V = [v_1, v_2, \dots, v_n] \in \mathbf{R}^{n \times n}$, 使得^[1]:

$$A = USV^T \quad (1)$$

成立, 其中 $S = [\text{diag}(\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_q), O]$ 或者其转置, 这取决于 $m < n$ 还是 $m > n$, $S \in \mathbf{R}^{m \times n}$, O 代表零矩阵, q

$= \min(m, n)$, 且有: $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \dots \geq \sigma_q > 0$, 它们称为矩阵 A 的奇异值. SVD 和小波分析有着截然不同的数学理论基础, 是两种完全难以相提并论的理论, 但是我们发现, 只要利用信号构造出合适的矩阵 A , 则在信号处理时 SVD 就会表现出令人惊讶的与小波分解非常相似的信号处理效果. 利用一维信号可以构造出很多种矩阵, 如 Toeplitz 矩阵、Cycle 矩阵、Hankel 矩阵等, 也可用连续截断信号方式来构造矩阵. 矩阵构造方式不同, 则 SVD 的信号处理效果就不一样^[2,3]. 我们发现, 当采用其中的

Hankel 矩阵时, SVD 方法会获得与小波分解十分相似的信号处理效果, 例如它们都能将信号分解为一系列反映信号细部特征的细节信号和反映信号主体骨架的近似信号的组合, 它们都能够实现对信号奇异点的检测, 并且与小波分析相比, SVD 的分解结果还有自己独特的优越性. 为什么这样两种截然不同的理论却能有如此相似的信号处理效果? 这是一个十分值得研究的问题.

为了合理地解释这一问题, 必须要弄清楚这两种方法信号分解的本质特性. 小波变换的信号分解特性已经是众所周知了, 小波分解的实质是利用两个高、低通滤波器将信号分离到不同频带的过程, 但是对于 SVD 却没有这样直观的解释. 关于 SVD 的信号分解特性问题在一般的文献中并不可见, 在一般的利用 SVD 进行信号处理的文献中, 都偏重于从实用出发, 利用 SVD 实现对信号的一种处理, 并基于这种处理实现解决某种特定问题的目的, 如特征提取^[4,5]、数据压缩^[6,7]、消噪^[8,9]、语音编码^[10]等, 而具体根据 SVD 的性质从理论上讨论这种信号分解特性的报道则很少见. 而且采用不同的矩阵构造方式, 则 SVD 的信号分解特性也就有所不同. 本文结合 SVD 的性质, 从理论上研究了采用 Hankel 矩阵时 SVD 的信号分解本质, 从空间基的角度与小波分解过程进行了剖析对比, 分析了两者在信号处理机理上的相似性, 并从理论上分别研究了这两种方法分解得到的分量信号之间的正交性.

在理论分析的基础上, 通过信号处理实例, 对这两种方法实际处理效果的相似性进行了比较分析, 指出由于 Hankel 矩阵本身的结构特点, 使得 SVD 分解的第一个分量相当于小波分解最后一个尺度上的近似信号, 而从第二个分量开始的其他所有 SVD 分量信号则相当于小波分解的细节信号.

在分析了相似性的同时, 也比较了这两种方法所存在的一些差异, 例如 SVD 分解结果具有零相位特性, 而小波分解结果却存在相移. 而对于奇异性检测, 一旦确定了小波, 它可检测的奇异性指数是固定的, 并且随着尺度的增加, 指示奇异点位置的脉冲宽度逐渐增大. 但是对于 SVD 方法来说, 它的不同分量可以检测出具有不同奇异性指数的奇异点, 各分量具有递增的消失矩特性, 而且各个分量中指示奇异点位置的脉冲宽度始终保持不变, 并且这个宽度由 Hankel 矩阵的列数所决定. 从这些方面来说, SVD 方法又优于小波变换.

2 Hankel 矩阵方式下 SVD 分量信号的本质特性及与小波分解的相似性分析

设有离散数字信号 $X = [x(1), x(2), \dots, x(N)]$, 利用此信号可以构造 Hankel 矩阵如下:

$$A = \begin{bmatrix} x(1) & x(2) & \dots & x(n) \\ x(2) & x(3) & \dots & x(n+1) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ x(N-n+1) & x(N-n+2) & \dots & x(N) \end{bmatrix}$$

其中: $1 < n < N$. 令 $m = N - n + 1$, 则 $A \in \mathbf{R}^{m \times n}$.

为了利用 SVD 实现信号的分离, 将式(1)改写成用列向量 u_i 和 v_i 表示的形式:

$$A = \sigma_1 u_1 v_1^T + \sigma_2 u_2 v_2^T + \dots + \sigma_q u_q v_q^T \quad (2)$$

式中, $u_i \in \mathbf{R}^{m \times 1}$, $v_i \in \mathbf{R}^{n \times 1}$, $i = 1, 2, \dots, q$, $q = \min(m, n)$. 由 SVD 理论可知 u_i 之间是两两正交的, 它们构成了 m 维向量空间的规范正交基; v_i 之间也是两两正交的, 它们构成了 n 维向量空间的规范正交基^[1].

令 $A_i = \sigma_i u_i v_i^T$, 则 $A_i \in \mathbf{R}^{m \times n}$. 从 Hankel 矩阵的构造过程可知, 只要将 A_i 的第一个行向量 $P_{i,1}$ 和如图 1 所示的一个列向量 $H_{i,n}$ 的转置首尾相接, 就可以构成一个分量信号 P_i , 写成向量形式为:

$$A_i = \begin{bmatrix} \boxed{x_i(1)} & x_i(2) & \dots & x_i(n) \\ x_i(2) & x_i(3) & \dots & \boxed{x_i(n+1)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ x_i(N-n+1) & x_i(N-n+2) & \dots & \boxed{x_i(N)} \end{bmatrix} \begin{matrix} P_{i,1} \\ \\ \\ H_{i,n} \end{matrix}$$

图 1 采用 Hankel 矩阵时分量信号 P_i 的形成示意图

$$P_i = (P_{i,1}, H_{i,n}^T), \quad P_{i,1} \in \mathbf{R}^{1 \times n}, \quad H_{i,n} \in \mathbf{R}^{(m-1) \times 1} \quad (3)$$

这种分量信号本质上反映了什么呢? 设原始信号构造的 Hankel 矩阵 A 用行向量 $X_1, X_2, \dots, X_k, \dots, X_m$ 表示, $X_k \in \mathbf{R}^{1 \times n}$, 由 Hankel 矩阵的构造过程可知, 第一个行向量 X_1 是原始信号前面的一段, 根据式(1)可以计算得到 X_1 在 n 维基向量 v_i 上的投影系数为:

$$X_1 v_i = \sigma_i u_{i1} \quad (4)$$

其中 u_{i1} 是基向量 u_i 的第一个坐标. 而利用式(2)可以计算得到分量信号的前一部分为: $P_{i,1} = \sigma_i u_{i1} v_i^T$, 比较可见, $P_{i,1}$ 反映的实质上是原始信号中前一段在 n 维空间的基向量 v_i 上的投影大小, 投影系数为 $\sigma_i u_{i1}$.

再设原始信号构造的 Hankel 矩阵 A 用列向量 $Y_1, Y_2, \dots, Y_k, \dots, Y_n$ 表示, $Y_k \in \mathbf{R}^{m \times 1}$, 由 Hankel 矩阵的构造过程可知, 最后一个列向量 Y_n 是原始信号后面的一段, 同样由式(1)可以计算得到 Y_n 在 m 维基向量 u_i 上的投影系数为:

$$Y_n^T u_i = \sigma_i v_{in} \quad (5)$$

其中 v_{in} 是基向量 v_i 的第 n 个坐标. 而对于分量信号的另一部分 $H_{i,n}$, 它是 A_i 的最后一个列向量 $L_{i,n}$ 仅仅去掉了第一个坐标而得到的, 见图 1. 而利用式(2)可以计算得到: $L_{i,n} = \sigma_i v_{in} u_i$, 则可见 $H_{i,n}$ 反映的实质上是原信号后一段在 m 维空间的基向量 u_i 上的投影大小, 投影系数为 $\sigma_i v_{in}$.

因此从本质上来说,采用 Hankel 矩阵时,SVD 实质上是将信号分解到 n 维和 m 维这两个向量空间上,所获得的分量信号 P_i 本质上反映的是原始信号在这两个空间的规范正交基的第 i 个基向量 v_i 和 u_i 上的投影大小,即原始信号与这两个正交规范基的相似性程度.所有 A_i 按照此方式构成的分量就形成了对原始信号的一种分解.

进一步来分析这种分解的特性.设 A_i 用行向量 $P_{i,1}, P_{i,2}, \dots, P_{i,m}$ 表示, $P_{i,m} \in R^{1 \times n}$; 而 A 用行向量 X_1, X_2, \dots, X_m 表示, $X_m \in R^{1 \times n}$, 则根据式(2), A 的每一个行向量显然等于所有 A_i 的相应行向量的叠加,则有:

$$X_1 = P_{1,1} + P_{2,1} + \dots + P_{q,1} \quad (6)$$

而对于 A_i 中的列向量 $H_{i,n}$, $H_{i,n} \in R^{(m-1) \times 1}$, 设 A 中与之相对应的列向量用 I_n 来表示, $I_n \in R^{(m-1) \times 1}$, 则根据式(2), I_n 显然等于所有 A_i 中的相应列向量 $H_{i,n}$ 的叠加,其转置同样也满足此叠加关系,即:

$$I_n^T = H_{1,n}^T + H_{2,n}^T + \dots + H_{q,n}^T \quad (7)$$

根据 Hankel 矩阵的构造过程,原信号 X 可用向量形式 $X = (X_1, I_n^T)$ 表示,而分量信号 P_i 也可用向量形式 $P_i = (P_{i,1}, H_{i,n}^T)$ 表示,则所有分量信号的和可写为:

$$P_1 + P_2 + \dots + P_q = (P_{1,1} + P_{2,1} + \dots + P_{q,1}, H_{1,n}^T + H_{2,n}^T + \dots + H_{q,n}^T)$$

而根据式(6)、(7),上式的右边可改写为: $P_1 + P_2 + \dots + P_q = (X_1, I_n^T)$, 即:

$$P_1 + P_2 + \dots + P_q = X \quad (8)$$

可见采用 Hankel 矩阵时,所获得的这些分量 P_i 构成了对原始信号的一种简单线性叠加,这种简单线性叠加关系的优点是:一个分量从原始信号中被分离的过程就是从原信号中被简单地减去,这种减法运算将使得分离出来的各分量信号保持它们在原信号中的相位不变,即具有零相位偏移特性.式(8)也是采用 Hankel 矩阵时 SVD 的信号重构公式,它的意义还在于:可以选取感兴趣的几个分量进行简单的叠加,从而实现了对信号特征信息的提取.

而利用小波方法同样可将信号分解为一系列分量信号.通过小波分解,信号被逐次分解在两个空间上:近似空间 V_j 和细节空间 W_j . 其中近似空间 V_j 的规范正交基由尺度函数的伸缩平移系 $\{\varphi_{j,k}(x) = 2^{-j/2} \varphi(2^{-j}x - k) \mid k \in Z\}$ 构成,而细节空间 W_j 的规范正交基则由小波函数的伸缩平移系 $\{\psi_{j,k}(x) = 2^{-j/2} \psi(2^{-j}x - k) \mid k \in Z\}$ 构成,小波分解得到的近似信号和细节信号分别是原始信号在这两个正交基上的投影大小,它们反映了原信号与这两个正交基的相似程度^[11]. 可通过下式实现对近似和细节信号的计算^[11]:

$$\begin{cases} S_j f(x) = 1/\sqrt{2} \sum_{n \in Z} h(n) S_{j-1} f(x - 2^{j-1}n) \\ W_j f(x) = 1/\sqrt{2} \sum_{n \in Z} g(n) S_{j-1} f(x - 2^{j-1}n) \end{cases} \quad (9)$$

式中, $h(n)$ 和 $g(n)$ 为共轭滤波器对,它们满足: $g(n) = (-1)^n \overline{h(1-n)}$, 而原始信号可以记为 $S_0 f(x)$, 则利用上式可以算出 $j > 0$ 时信号在不同分辨率下的近似和细节信号.

从空间基的角度对这两种方法的分解过程进行比较,就可以发现基于 Hankel 矩阵的 SVD 的信号分解过程和小波分解是非常相似的.对于小波分解来说,其实质是将信号分解到近似空间 V_j 和细节空间 W_j 这两个空间上,而尺度函数与小波函数的伸缩平移系分别构成了这两个空间的规范正交基,小波分解的近似和细节信号就是基于这两个规范正交基而实现的,它们本质上反映的是原始信号在这两个基函数上的投影大小.而当采用 Hankel 矩阵时,对于 SVD 来说,其实质则是将信号分解到 m 维和 n 维这两个空间上,其中 SVD 左正交矩阵的 m 个列向量构成了 m 维空间的规范正交基,右正交矩阵的 n 个列向量构成了 n 维空间的规范正交基,信号的 SVD 分解结果也是利用这两个规范正交基来实现的,它们本质上反映的也是原信号在这两个规范正交基上的投影大小.由此可见,从向量空间基的角度来分析,当采用 Hankel 矩阵时, SVD 的信号处理机理与小波变换确实是十分相似的.

3 两种方法分量信号的正交性异同研究

对 SVD 很容易产生一种误解,由于 U 、 V 是正交矩阵,一般很容易使人认为利用 SVD 方法获得的分量信号之间是正交的,但是事实并非如此,这还与矩阵 A 的构造方式密切相关^[3]. 下面从理论上分析当采用 Hankel 矩阵时 SVD 分量信号的正交性.

3.1 Hankel 矩阵方式下 SVD 分量信号的正交性

为了研究 Hankel 矩阵方式下 SVD 分量信号的正交性,首先让我们来证明如下两个引理.

引理 1 设 A_i 用行向量 $P_{i,1}, P_{i,2}, \dots, P_{i,k}, \dots, P_{i,m}$ 表示, $P_{i,k} \in R^{1 \times n}$, 则两个相异矩阵 A_i 和 A_j 的任意两个行向量是正交的, 即:

$$P_{i,k} \cdot P_{j,l}^T = 0 \quad i \neq j; k = 1, 2, \dots, m; l = 1, 2, \dots, m \quad (10)$$

证明 由 SVD 理论知 v_i 之间是两两规范正交的, 即

$$v_i^T v_j = \begin{cases} 1, & i = j \\ 0, & i \neq j \end{cases}$$

$$\text{则: } AA_j^T = \sigma_i u_i v_i^T v_j u_j^T \sigma_j = \begin{cases} u_i u_i^T \sigma_i^2, & i = j \\ 0, & i \neq j \end{cases} \quad (11)$$

将 A_i 用行向量 $P_{i,1}, P_{i,2}, \dots, P_{i,m}$ 表示, $P_{i,m} \in R^{1 \times n}$, 则 AA_j^T 中的任一元素为 $P_{i,k} \cdot P_{j,l}^T$, 其中 $k = 1, 2, \dots, m; l =$

1, 2, ..., m. 由式(11)知, 当 $i \neq j$ 时, AA_j^T 的所有元素均为 0, 则得到:

$$P_{i,k} \cdot P_{j,l}^T = 0, \quad i \neq j; k = 1, 2, \dots, m; l = 1, 2, \dots, m$$

证毕.

引理 2 设 A_i 用列向量 $L_{i,1}, L_{i,2}, \dots, L_{i,k}, \dots, L_{i,n}$ 表示, $L_{i,k} \in R^{m \times 1}$, 则两个相异矩阵 A_i 和 A_j 的任意两个列向量是正交的, 即:

$$L_{i,k}^T \cdot L_{j,l} = 0, \quad i \neq j; k = 1, 2, \dots, n; l = 1, 2, \dots, n \quad (12)$$

证明 由 SVD 理论知 u_i 之间是两两规范正交的, 即

$$u_i^T u_j = \begin{cases} 1, & i = j \\ 0, & i \neq j \end{cases}$$

则:

$$A_i^T A_j = v_i v_i^T u_j v_j^T u_i u_i^T = \begin{cases} v_i v_i^T \sigma_i^2, & i = j \\ 0, & i \neq j \end{cases} \quad (13)$$

将 A_i 用列向量 $L_{i,1}, L_{i,2}, \dots, L_{i,n}$ 表示, $L_{i,n} \in R^{m \times 1}$, 则 $A_i^T A_j$ 中的任一元素为 $L_{i,k}^T \cdot L_{j,l}$, 其中 $k = 1, 2, \dots, n; l = 1, 2, \dots, n$. 由式(13)知, 当 $i \neq j$ 时, $A_i^T A_j$ 的所有元素均为 0, 则得到:

$$L_{i,k}^T \cdot L_{j,l} = 0, \quad i \neq j; k = 1, 2, \dots, n; l = 1, 2, \dots, n$$

证毕.

现在再来看采用 Hankel 矩阵时 SVD 分量信号的正交性, 有如下定理:

定理 1 当采用 Hankel 矩阵时, SVD 分量信号之间不具有正交性, 分量 P_i 和 P_j 的相关程度大小取决于矩阵 A_i 和 A_j 最右上角元素的乘积, 即:

$$P_i \cdot P_j^T = -A_i(1, n) A_j(1, n) \quad (14)$$

证明 A_i 的第 k 个列向量 $L_{i,k}$ 可表示为: $L_{i,k} = \begin{bmatrix} A_i(1, k) \\ H_{i,k} \end{bmatrix}$, 其中 $A_i(1, k)$ 为 $L_{i,k}$ 的第一个元素, 而 $H_{i,k}$ 是除去此元素的其他所有元素形成的列向量, 见图 1, 则根据引理 2 中的式(12)可得:

$$L_{i,k}^T \cdot L_{j,l} = A_i(1, k) A_j(1, l) + H_{i,k}^T \cdot H_{j,l} = 0$$

从而得到:

$$H_{i,k}^T \cdot H_{j,l} = -A_i(1, k) A_j(1, l)$$

$$i \neq j; k = 1, 2, \dots, n; l = 1, 2, \dots, n$$

则分量信号 P_i 和 P_j 的内积为:

$$P_i \cdot P_j^T = (P_{i,1}, H_{i,n}^T) \cdot (P_{j,1}, H_{j,n}^T)^T = P_{i,1} \cdot P_{j,1}^T + H_{i,n}^T \cdot H_{j,n} = -A_i(1, n) A_j(1, n)$$

上面用到了引理 1 中的 $P_{i,k} \cdot P_{j,l}^T = 0$, 参见式(10). 可见 P_i 和 P_j 没有正交, 其相关程度大小取决于 A_i 和 A_j 最右上角元素的乘积.

3.2 小波变换不同尺度信号的正交性

再来比较小波分解结果之间的正交性, 从小波分解

的快速计算式(9)难以分析其不同尺度间的正交性, 而从小波变换的定义出发, 利用互相关函数来研究小波变换不同尺度之间的正交性更为方便^[12]. 设 $W(s_1, x)$ 和 $W(s_2, x)$ 是函数 $f(t)$ 在两个不同尺度上的小波分解结果, 根据互相关函数的定义可得:

$$R_{s_1, s_2}(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} W(s_1, x) W(s_2, x + \tau) dx \quad (15)$$

对于小波变换不同尺度分解结果的正交性, 可以证明有如下定理:

定理 2 在小波变换中, 如果小波 $\Psi(t)$ 是 $L^2(R)$ 的规范正交基, 当尺度相异时, 则此二尺度的分解结果互不相关, 彼此正交; 而同一尺度分解结果的自相关性同原始信号的自相关性相同.

证明 由小波变换以及互相关的定义, 可得:

$$R_{s_1, s_2}(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} \left[\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{s_1} \int_R f(u) \Psi\left(\frac{x-u}{s_1}\right) du \right] \left[\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{s_2} \int_R f(v) \Psi\left(\frac{x+\tau-v}{s_2}\right) dv \right] dx = \int_{-\infty}^{\infty} \int_R f(u) f(v) \left[\frac{1}{s_1 s_2} \int_R \Psi\left(\frac{x-u}{s_1}\right) \Psi\left(\frac{x+\tau-v}{s_2}\right) dx \right] du dv$$

令: $w = v - \tau$, 则:

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \int_R f(u) f(w + \tau) \left[\frac{1}{s_1 s_2} \int_R \Psi\left(\frac{x-u}{s_1}\right) \Psi\left(\frac{x-w}{s_2}\right) dx \right] du dw$$

由于小波 $\Psi(t)$ 是 $L^2(R)$ 的规范正交基, 故得:

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \int_R f(u) f(w + \tau) \delta(s_1, s_2) \delta(u, w) du dw = \delta(s_1, s_2) \int_R f(u) f(u + \tau) du = \delta(s_1, s_2) R_f(\tau)$$

其中: $\delta(x, y) = \begin{cases} 1, & x = y \\ 0, & x \neq y \end{cases}$, 证毕.

有一大批规范正交的小波, 如 Daubechies 小波, Meyer 小波, 样条小波, Haar 小波等, 它们分解得到的不同尺度间的信号是彼此无关的, 即是相互正交的; 而另外也有很多小波如 Mexican hat 小波, Gauss 小波, Morlet 小波等都不是正交小波, 因此不同尺度变换结果存在较大的相关性.

4 信号处理实际效果的相似性对比分析

在进行了理论上的分析之后, 现在可以来观察这两种方法实际处理效果的相似性. 图 2 是一个模拟的转子

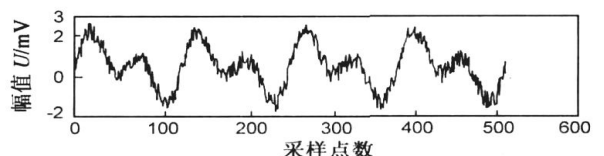
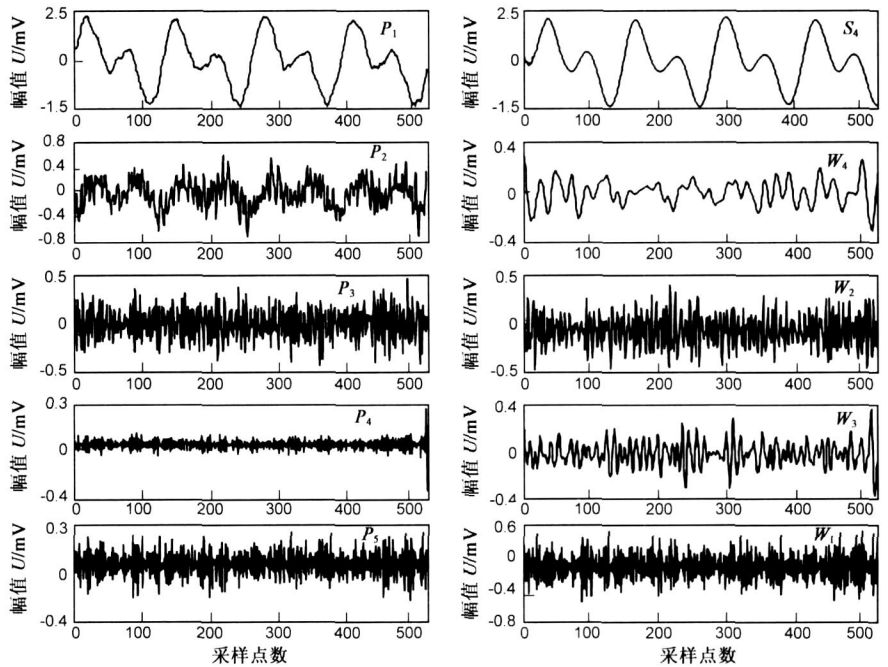


图 2 一个模拟的二阶不平衡振动信号

二阶不平衡的振动信号,并叠加了服从正态分布的白噪声,采样点数为 512 点.利用此信号取列数 $n=5$ 、行数 $m=508$ 构造 Hankel 矩阵,通过 SVD 方法处理后得到 5 个分量信号,如图 3(a) 所示.而利用小波对原信号进行四个尺度的分解,得到的结果如图 3(b) 所示.对比一下,可见这两种方法的处理结果确实是极为相似的.其中第一个 SVD 分量 P_1 类似于小波分解最后一个尺度上的近似信号 S_4 ,在这两个信号中,噪声都基本被消除,反映的都是原始信号的主体骨架和概貌;而其他四个 SVD 分量 P_2, P_3, P_4, P_5 则与小波分解各尺度上的细节信号相似,不过与 W_1, W_2, W_3, W_4 没有顺序上的对应,但它们反映的内容是相似的,都是原信号中的高频噪声.



(a) SVD 分解得到的 5 个分量信号 (b) 小波分解得到的 5 个分量信号

图 3 SVD 和小波的分解结果相似性对比

除了前面对这种相似性所进行的理论分析外,还可以根据 Hankel 矩阵本身的构造特点来对这种相似性作进一步的解释.在 Hankel 矩阵中,矩阵的各行是由信号仅仅依次右移一位而形成的,因而各行之间存在很大的相关性^[1],这种行向量高度相关的矩阵的奇异值的特点是:第一个奇异值与其他奇异值相比大很多,而从第二个奇异值开始,各奇异

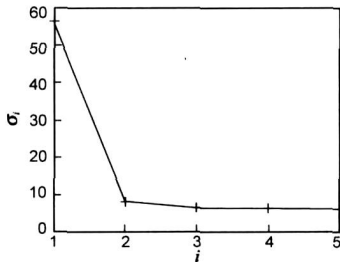


图 4 奇异值大小分布

值虽有大小的差异,但相差很小.本例中 5 个奇异值如图 4 所示,其中第一个奇异值是第二个奇异值的 6.8 倍.而根据分量信号的表达式(3)以及引理 1、2 不难计算出,分量信号

的能量大小是与相应奇异值的平方成正比的,可以用下式来表示第 i 个分量在原始信号中所占的能量份额:

$$\eta_i = \frac{\sigma_i^2}{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \dots + \sigma_q^2}, i = 1, 2, \dots, q \quad (16)$$

因此由于 Hankel 矩阵本身的结构特点,使得原信号的能量主要集中在第一个奇异值所对应的分量即 P_1 中,因而 P_1 代表了信号的主体骨架,能够获得类似于小波近似信号的效果;而原始信号中那些能量微小的细节特征则相应分离到了其他较小的奇异值所对应的分量中,因而这些分量获得了类似于小波分解的细节信号

的处理效果.但是由前述可知,SVD 分量信号还具有零相位偏移特性,将 P_1 与小波分解的近似信号 S_4 绘在一起,如图 5,可以发现 P_1 无相移,而 S_4 则存在明显的滞后.从这一点来说,SVD 方法的处理结果还优于小波.

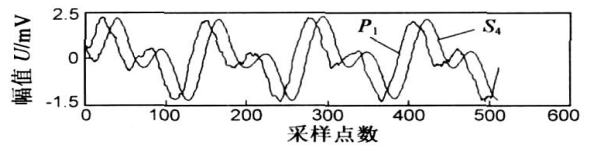


图 5 两种方法获得的近似信号的相移对比

但是另一方面,SVD 却不如小波变换那样具有明显的物理意义.从式(9)可知,小波变换的实质是利用共轭滤波器 $h(n)$ 和 $g(n)$ 对信号进行处理,得到的各分量依次反映了原始信号由高频到低频的频率构成.相较之下,SVD 的分解结果不能表现出这样明显的顺序频带特性,除了 P_1 分量对应于小波变换最后一个尺度的近似信号外,其他各分量具体代表原始信号的哪一部分需要通过 FFT 分析才能确定.

5 两种方法对奇异性信号检测效果的比较分析

除了具有十分相似的信号分解结果外,另一个令人惊讶的相似之处是:作者发现,当采用 Hankel 矩阵时,SVD 也具有类似于小波变换那样的奇异性检测能力.这里所谓的奇异性是指信号本身或它的某阶导数在某时刻是否存在突变,若信号 $f(t)$ 在某点有突变或某阶导数有突变,则称信号在此处有奇异性,可用 Lipschitz 指数(简称 Lip 指数)来描述信号 $f(t)$ 的奇异性程度.设有非负整数 $n, n \leq \alpha \leq n+1$. 如果存在常数 $A > 0$ 以及

n 次多项式 $p_n(t)$, 对于 $|t - t_0| < \delta$, δ 是一个任意小的正数, 所有的 $f(t)$ 都满足不等式:

$$|f(t) - p_n(t - t_0)| \leq A|t - t_0|^\alpha \quad (17)$$

则称 $f(t)$ 在 t_0 点是 $\text{Lip}\alpha$ 的, 如果 $f(t)$ 在 t_0 的 Lip 指数 α 小于 1, 则 t_0 为 $f(t)$ 的奇异点; 而如果 $n \leq \alpha \leq n+1$, 其中 n 大于 1, 则 t_0 为 $f(t)$ 的第 n 阶导数的奇异点. 与稳定信号相比, 奇异性信号往往携带了更多的重要信息. 例如在故障诊断领域, 信号的奇异点往往反映了由故障引起的撞击、振荡、转速的突变或结构的变形和断裂^[13]. 因此对奇异性信号的检测具有特别重要的意义.

对奇异性的检测本来是小波变换的一个突出优点, 具有 n 阶消失矩的小波可以检测到 $f(t)$ 的第 $n-1$ 阶导数的奇异性^[13], 小波变换的奇异性检测特性已经在故障诊断和图像边缘检测方面获得了重要的应用. 但是令人意想不到的是, 作者发现当采用 Hankel 矩阵时, SVD 同样也具有奇异性检测能力, 并且与小波变换相比, 还有自己特殊的优点. 对于小波来说, 每一个小波具有固定的消失矩, 其可检测的奇异性指数也由此而固定, 例如具有一阶消失矩的小波只能检测出信号本身的突变点, 而对于其导数突变点的检测则无能为力. 但是 SVD 则不同于此, 我们在实践中发现, 从第二个 SVD 分量开始, 各个分量具有奇异性检测能力, 且可检测的奇异性指数逐次增加. 如果将消失矩的概念应用到 SVD 分量中, 则 SVD 的第 2 个分量具有 1 阶消失矩, 第 3 个分量具有 2 阶消失矩, ..., 第 n 个分量具有 $n-1$ 阶消失矩.

用一个实例来分析和比较 SVD 方法和小波变换的奇异性检测效果. 设有信号如下:

$$f(t) = \begin{cases} 2 & , \quad 0 < t < 50 \\ 7 & , \quad 50 \leq t \leq 99 \\ -2t + 205 & , \quad 99 \leq t \leq 150 \end{cases} \quad (18)$$

此信号如图 6 所示, 它本身在 $t=50$ 处有突变, Lip 指数 $\alpha=0$, 而在 $t=99$ 处信号本身虽然是连续的, 但是其一阶导数在此处不连续, Lip 指数 $\alpha=1$, 这两点是奇异点. 利用此信号构造一个列数为 4、行数为 147 的 Hankel 矩阵, 通过 SVD 处理后得到四个 SVD 分量, 如图 7. 第一个分量 P_1 是近似信号, 反映了原信号的骨架; 而第二个分量 P_2 在 $t=50$ 处产生峰值, 检测出了信号在此点的奇异性, 但是没有检测出 $t=99$ 处的奇异性, 这和具有一阶消失矩的小波的检测特点相同. 第三个分量 P_3 在 $t=50$ 处产生了一个零交叉点, 这和具有二阶消失矩的小波对突变信号的检测特点相同, 而在 $t=99$ 则产生了一个负的峰值, 表明信号的一阶导数在此处存在向下的突变, 这和具有二阶消失矩的小波对 Lip 指数 $\alpha=1$ 的奇异性信号的检测特点相同. 第四个分量 P_4 在 t

$=50$ 处存在两个零交叉点, 这是具有三阶消失矩的小波对突变信号的检测特征, 而在 $t=99$ 则产生了一个零交叉点, 这是具有三阶消失矩的小波对 Lip 指数 $\alpha=1$ 的奇异性信号的检测特征. 所有这些结果说明了两个问题: (1) 证明了采用 Hankel 矩阵时 SVD 具有奇异性检测能力; (2) 证明了各 SVD 分量的消失矩阶数是递增的.

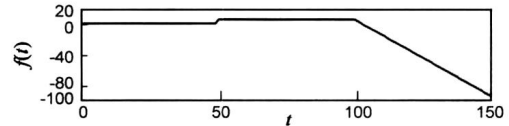


图 6 原始奇异性信号

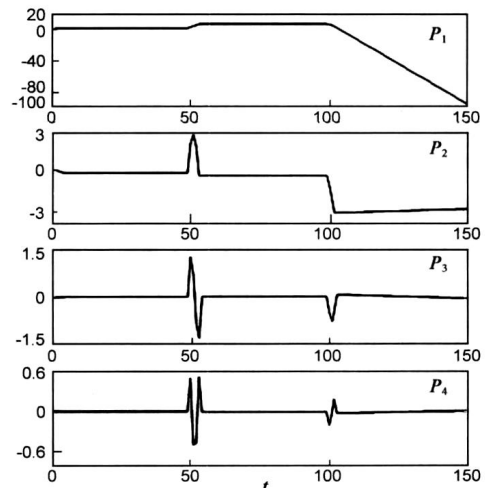


图 7 SVD 各分量的检测结果

而图 8 是只有一阶消失矩的二次样条小波在四个尺度上的检测结果, 由于消失矩的限制, 对信号在 $t=99$ 处的奇异性始终没有检测出来. 要想利用小波检测出此点的奇异性, 必须采用具有 2 阶以上消失矩的小波^[13].

具有递增消失矩的优点是可以检测到具有不同 Lip 指数的奇异点, 但是一旦 Lip 指数固定下来, 随着 SVD 分量个数的增加, 后面分量中指示奇异点位置的脉冲将会产生多个过零点, 其波形具有多变振荡性, 此时分量中奇异点的位置就难以精确确定, 不过对于 SVD 来说, 这并不会妨碍它对奇异点的精确定位. 根据消失矩和奇异性的检测关系^[13], 如果某点的 Lip 指数 $\alpha = n-1$, 则具有 n 阶消失矩的分量会在此奇异点处产生一个单一峰值, 根据此峰值位置可以精确定位奇异点; 而具有 $n+1$ 阶消失矩的分量却会产生一个过零点, 此时奇异点位置亦可由此过零点精确定位; 此后消失矩阶数每增大 1 阶, 则过零点的数目就会增多 1 个, 这时就难以精确地确定奇异点位置了. 但是由于各 SVD 分量具备了从 1 开始的各阶消失矩, 因而在奇异性检测时, 总会有一个分量存在一个单一峰值, 因此奇异点的位置可以精确定位, 如果第 n 个 SVD 分量在某点产生一个单一峰值, 则

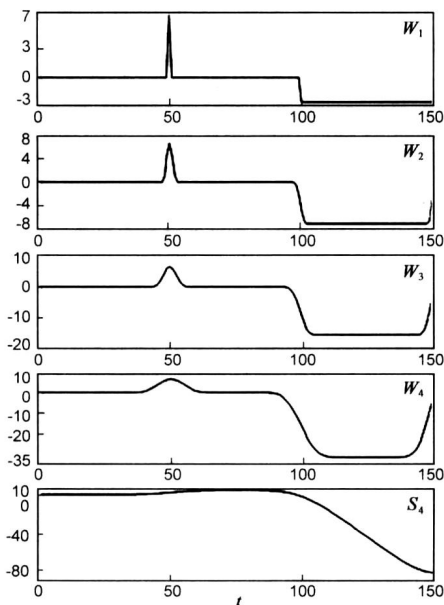


图 8 小波检测结果

此点就是奇异点, 且其 Lip 指数 $\alpha = n - 2$ 以图 7 的检测结果为例, 第二个分量 P_2 在 $t = 50$ 处产生一个单一峰值, 则表明在 $t = 50$ 处存在奇异性, 而且此点的 $\alpha = 0$, 尽管此后的分量中指示此奇异点位置的脉冲波形具有多变振荡性, 但是只要有一个分量能够准确地定位奇异点就足够了. 同理, 第三个分量 P_3 在 $t = 99$ 处产生了单一峰值, 则此点存在奇异性, 且其 Lip 指数 $\alpha = 1$.

除了各分量具有递增的消失矩外, SVD 在奇异性检测方面还有一个特点: 各个分量中指示奇异点位置的脉冲宽度始终不变. 如本例 SVD 各分量中指示奇异点位置的脉冲宽度始终为 4 个采样数据宽度. 而小波检测结果的脉冲宽度却随着尺度的增加而逐渐增大, 如本例, 在第一个尺度指示奇异点位置的脉冲为 2 个采样宽度, 第二个尺度为 6 个采样宽度, 第三个尺度为 14 个采样宽度, 到第四个尺度时, 竟已达到 28 个采样宽度.

这种现象不是偶然的, 作者利用不同列数的 Hankel 矩阵对不同的奇异性信号进行了反复检测试验, 发现如下一个事实: 在 SVD 各分量中, 不管指示奇异点位置的脉冲具有怎样的振荡性, 但是其宽度始终保持一致, 而且这个宽度是由所构造的 Hankel 矩阵的列数决定的, 如果 Hankel 矩阵的列数为 n , 则脉冲宽度为 nT_s , 其中 T_s 为信号采样周期. 关于这一事实还难以作出解释.

6 结论

SVD 和小波分析有着完全不同的理论基础, 但是在 SVD 中采用 Hankel 矩阵时, 它们的信号处理效果却表现出惊人的相似性. 本文从向量空间基的角度和 Hankel 矩阵本身的结构特点等方面对这种相似性产生的机理进行了研究, 得到以下结论:

(1) 采用 Hankel 矩阵时, 利用 SVD 可以将原始信号分解为一系列分量信号的简单线性叠加, 这些分量信号本质上反映的是原始信号在由 SVD 方程中的左、右正交矩阵所形成的 m 和 n 维空间的基向量上的投影大小, 这与小波分解结果反映的是原始信号在尺度基函数和小波基函数上的投影大小这种处理机理是相似的.

(2) 采用 Hankel 矩阵时, SVD 分量信号之间不具有正交性, 而正交小波的分解结果之间却是正交的, 但是非正交小波的分解结果之间也不具有正交性.

(3) 采用 Hankel 矩阵时, SVD 的第一个分量信号相当于小波分解最后一个尺度上的近似信号, 而从第二个 SVD 分量开始的其他所有 SVD 分量信号则与小波分解的细节信号相对应, 但是 SVD 的分解结果具有零相位特性, 而小波分解结果却存在相移.

(4) 采用 Hankel 矩阵时, SVD 也具有奇异性检测能力, 并且 SVD 的奇异性检测具有两个特点: (1) 各 SVD 分量具有递增的消失矩, 第 n 个分量具有 $n - 1$ 阶消失矩, 因而各分量可以检测出不同奇异性指数的奇异点; (2) 在 SVD 各分量信号中指示奇异点位置的脉冲宽度始终保持不变, 并且这个宽度是由 Hankel 矩阵的列数所决定的. 而对于小波来说, 其所检测的奇异性指数是固定的, 且指示奇异点位置的脉冲随尺度增加而逐渐变宽.

参考文献:

- [1] Golub G H, Van Loan C F. 矩阵计算[M]. 袁亚湘译. 北京: 科学出版社, 2001: 77-79, 276-278.
- [2] Akritas A G, Malaschonok G I. Applications of singular value decomposition (SVD)[J]. Mathematics and Computers in Simulation, 2004, 67(1): 15-31.
- [3] 赵学智, 陈统坚, 叶邦彦. 基于奇异值分解的铣削力信号处理与铣床状态信息分离[J]. 机械工程学报, 2007, 43(6): 169-174.
Zhao Xue zhi, Chen Tong jian, Ye Bang yan. Processing of milling force signal and isolation of state information of milling machine based on singular value decomposition[J]. Chinese Journal of Mechanical Engineering, 2007, 43(6): 169-174. (in Chinese)
- [4] 王文胜, 陈伏兵, 杨静宇. 一种基于奇异值分解的特征抽取方法[J]. 电子与信息学报, 2005, 27(2): 294-297.
Wang Wen sheng, Chen Fu bing, Yang Jing yu. A method of feature extraction based on SVD[J]. Journal of Electronics & Information Technology, 2005, 27(2): 294-297. (in Chinese)
- [5] Liu Hongxing, Li Jian, Zhao Ying, Qu Liangsheng. Improved singular value decomposition technique for detecting and extracting periodic impulse component in a vibration signal[J]. Chinese Journal of Mechanical Engineering (English Edition),

2004, 17(3): 340– 345.

- [6] Shin K, Feraday S A, Harris C J, Brennan M J. Optimal autoregressive modelling of a measured noisy deterministic signal using singular value decomposition[J]. Mechanical Systems and Signal Processing, 2003, 17(2): 423– 432.
- [7] Wei J J, Chang C J, Chou N K. ECG data compression using truncated singular value decomposition[J]. IEEE Transactions on Information Technology in Biomedicine, 2001, 5(4): 290– 299.
- [8] Walton J, Fairley N. Noise reduction in X-ray photoelectron spectromicroscopy by a singular value decomposition sorting procedure[J]. Journal of Electron Spectroscopy and Related Phenomena, 2005, 148(1): 29– 40.
- [9] 朱启兵, 刘杰, 李允公, 闻邦椿. 基于结构风险最小化原则的奇异值分解降噪研究[J]. 振动工程学报, 2005, 18(2): 204– 207.
Zhu Qi bing, Liu Jie, Li Yurong, Wen Bangchun. Study on noise reduction in singular value decomposition based on structural risk minimization[J]. Journal of Vibration Engineering, 2005, 18(2): 204– 207. (in Chinese)
- [10] 王贵平, 鲍长春, 张鹏. 基于奇异值分解的低速率波形内插语音编码算法[J]. 电子学报, 2006, 34(1): 135– 140.

Wang Guiping, Bao Changchun, Zhang Peng. Low bit rates waveform interpolation speech coding based on singular value decomposition[J]. Acta Electronica Sinica, 2006, 34(1): 135– 140. (in Chinese)

- [11] 赵学智, 陈统坚, 叶邦彦. 内积型和卷积型小波变换对信号处理效果的研究[J]. 机械工程学报, 2004, 40(3): 55– 60.
Zhao Xue zhi, Chen Tongjian, Ye Bangyan. Research on signal processing effect of both inner product type of wavelet transform and convolution type of wavelet transform[J]. Chinese Journal of Mechanical Engineering, 2004, 40(3): 55– 60. (in Chinese)
- [12] 王宁, 盛昭瀚. 基于小波向量和 AR 模型的轴心轨迹识别[J]. 信号处理, 1999, 15(2): 157– 162.
Wang Ning, Sheng Zhaohan. Identification of orbits of shaft centerline based on wavelet vectors and AR model[J]. Signal Processing, 1999, 15(2): 157– 162. (in Chinese)
- [13] 赵学智, 林颖, 陈文戈. 奇异性信号检测时小波基的选择[J]. 华南理工大学学报, 2000, 28(10): 75– 80.
Zhao Xue zhi, Lin Ying, Chen Wenge. The choice of wavelet bases for singularity detection[J]. Journal of South China University of Technology, 2000, 28(10): 75– 80. (in Chinese)

作者简介:



赵学智 男, 1970 年生于湖南邵东, 博士, 华南理工大学机械工程学院副教授. 主要从事信号处理、模式识别和故障诊断等方面的研究.
E-mail: mezhaoxz@scut.edu.cn



叶邦彦 男, 1949 年生于广东广州, 华南理工大学机械工程学院教授、博士生导师, 中国图像图形学会高级会员、中国机械工程学会高级会员、全国高等学校制造自动化研究会常务理事兼中南分会理事长. 主要从事制造自动化、图像处理、机器视觉、计算机检测与控制等方面的研究工作.