

一个超混沌系统及其投影同步

李华青¹, 罗小华², 代祥光³

(1. 重庆邮电大学数理学院, 重庆 400065; 2. 重庆邮电大学通信与信息工程学院, 重庆 400065; 3. 重庆邮电大学移通学院, 重庆 400065)

摘要: 通过在 Lorenz 系统中加入两个控制器构造出一个五维超混沌系统, 系统的超混沌特性通过 Lyapunov 指数得到验证, 对系统的平衡点和耗散性进行了分析. 基于线性系统的稳定性准则, 利用线性分离方法实现了该超混沌系统的投影同步.

关键词: 超混沌系统; Lyapunov 指数; 线性分离; 投影同步

中图分类号: TN710 **文献标识码:** A **文章编号:** 0372-2112 (2009) 03-0654-04

A Hyperchaotic System and Projective Synchronization

LI Hua-qing¹, LUO Xiao-hua², DAI Xiang-guang³

(1. College of Mathematics and Physics, Chongqing University of Posts and Telecommunications, Chongqing 400065, China;

2. College of Communication and Information Engineering, Chongqing University of Posts and Telecommunications, Chongqing 400065, China;

3. College of Mobile and Telecommunications, Chongqing University of Posts and Telecommunications, Chongqing 400065, China)

Abstract: A five-dimensional hyperchaotic system is constructed by introducing two controllers into the Lorenz system. Existence of hyperchaotic behavior is proved by Lyapunov exponents. Equilibria and dissipation of hyperchaotic system are analyzed. Based on the stability criterion of linear system, projective synchronization of hyperchaotic system is achieved through linear separation methods.

Key words: hyperchaotic system; Lyapunov exponents; linear separation; projective synchronization

1 引言

与混沌系统相比,超混沌系统具有两个或者更多个正的 Lyapunov 指数,它的运动轨道(以下简称相轨)在多个方向上分离,表现出更复杂的动力学行为. 复杂的超混沌信号可以提高混沌保密通信和混沌信息加密的安全性,因此超混沌在信息工程领域将有着非常广阔的应用前景. 近年来,不少学者对这一领域进行了广泛而深入的研究^[1~3],在理论和实践方面都取得了许多成果,如 Rossler 首次提出超 Rossler 系统^[4];Li 等利用简单周期信号产生了超混沌吸引子^[5],利用混沌控制的方法将统一系统控制到超混沌^[6];Liu 等通过设计一种延迟模糊控制器产生超混沌^[7]. 在上述研究的基础上,本文在 Lorenz 系统中添加两个控制器构造出一个五维系统,数值计算得到它有两个正的 Lyapunov 指数,由此表明它是超混沌的. 对它的平衡点和耗散性结构这两个基本特性进行了分析.

考虑到超混沌同步通信具有容量大,效率高,保密性能好等优点,而在混沌保密通信中投影同步可以把数从二进制扩展到 M 进制以实现更有效,更可靠,更安全的传输. 为此,有必要对超混沌系统的投影同步进行研

究. 本文基于线性系统的稳定性准则,利用线性分离方法实现了该超混沌系统的投影同步,数值仿真结果进一步证明了该方法的正确性.

2 超混沌系统的提出及超混沌特性分析

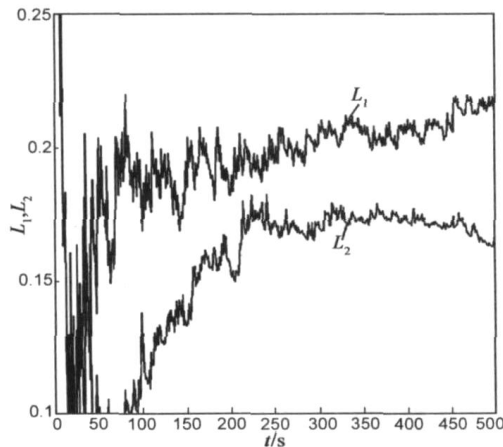
2.1 超混沌系统的提出

著名的 Lorenz 系统^[8]为

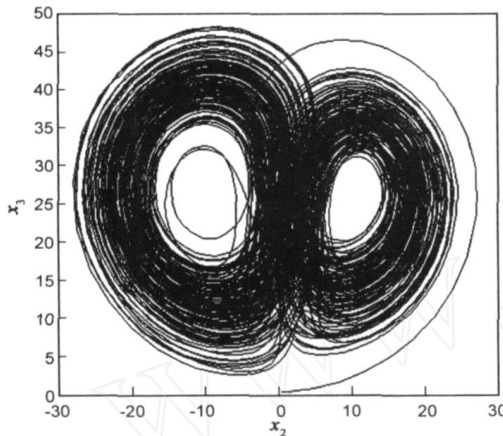
$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= a(x_2 - x_1) \\ \dot{x}_2 &= cx_1 - x_2 - x_1x_3, \\ \dot{x}_3 &= x_1x_2 - bx_3 \end{aligned} \quad (1)$$

当 $a = 10$, $b = 8/3$ 和 $c = 28$ 时, Lorenz 系统处于混沌状态,其混沌吸引子参见文献^[8]. 在系统(1)的第一个方程右端引入控制器 x_4 和 x_5 , 第二,三个方程右端引入控制器 x_5 , 并令 x_4 和 x_5 的变化律分别为 $\dot{x}_4 = -x_2x_3 + dx_4$ 和 $\dot{x}_5 = -3x_1$, 则产生新的系统为

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= a(x_2 - x_1) + x_4 + x_5 \\ \dot{x}_2 &= cx_1 - x_2 - x_1x_3 + x_5 \\ \dot{x}_3 &= x_1x_2 - bx_3 + x_5 \\ \dot{x}_4 &= -x_2x_3 + dx_4 \\ \dot{x}_5 &= -3x_1 \end{aligned} \quad (2)$$



(a) 系统(2)的两个正Lyapunov指数 L_1, L_2 随时间的变化情况



(b) 超混沌吸引子在 x_2-x_3 平面的投影

图1

产生超混沌的必要条件是系统具有耗散性结构, 维数不少于四, 系统具有两个或者更多个正的 Lyapunov 指数. 仍然让 $a = 10, b = 8/3$ 和 $c = 28$, 只有当梯度函数

$$(\text{能量函数}) \nabla V = \frac{\partial \dot{x}_1}{\partial x_1} + \frac{\partial \dot{x}_2}{\partial x_2} + \frac{\partial \dot{x}_3}{\partial x_3} + \frac{\partial \dot{x}_4}{\partial x_4} + \frac{\partial \dot{x}_5}{\partial x_5} = d - 13.667 < 0$$

时, 才满足耗散性结构, 也才有可能产生超混沌行为. 参数 d 的上限是 13.667, 对 d 取不同的值, 作者得到当 $d = -6$ 时, 系统(2)的 Lyapunov 指数分别为 $L_1 = 0.2392, L_2 = 0.1773, L_3 = 0, L_4 = -4.539, L_5 = -15.72$ 可见系统(2)产生了超混沌行为. 系统(2)的两个正的 Lyapunov 指数 L_1, L_2 随时间变化, 结果如图 1(a), 其超混沌吸引子在 x_2-x_3 平面的投影结果如图 1(b).

2.2 平衡点

系统平衡点的分布和线性化特性都影响着它的动力学行为. 首先找出系统的平衡点, 从而分析平衡点附近的线性化特性. 求解以下代数方程

$$\begin{aligned} a(x_2 - x_1) + x_4 + x_5 &= 0, \\ cx_1 - x_2 - x_1x_3 + x_5 &= 0, \\ x_1x_2 - bx_3 + x_5 &= 0, \\ -x_2x_3 + dx_4 &= 0, \\ -3x_1 &= 0. \end{aligned}$$

得到系统(2)的两个平衡点分别为 $O(0, 0, 0, 0, 0)$ 和 $E(0, 176, 66, -1936, 176)$.

在平衡点 $O(0, 0, 0, 0, 0)$ 处, 对系统(2)进行线性化得其雅可比矩阵为

$$J_O = \begin{bmatrix} -a & a & 0 & 1 & 1 \\ c - x_3 & -1 & -x_1 & 0 & 1 \\ x_2 & x_1 & -b & 0 & 1 \\ 0 & -x_3 & -x_2 & d & 0 \\ -3 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -10 & 10 & 0 & 1 & 1 \\ 28 & -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -8/3 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -6 & 0 \\ -3 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

为了求在平衡点 $O(0, 0, 0, 0, 0)$ 相应的特征根, 令 $\det(J_O - I) = 0$, 得相应的特征根分别为 $\lambda_1 = 11.6578, \lambda_2 = 0.1242, \lambda_3 = -2.667, \lambda_4 = -6, \lambda_5 = -22.7829$. 这表明平衡点 $O(0, 0, 0, 0, 0)$ 是个鞍点, 系统(2)在该点处于不稳定状态, 具有两个不稳定相轨.

在平衡点 $E(0, 176, 66, -1936, 176)$ 处, 同样对系统(2)进行线性化得其雅可比矩阵为

$$J_E = \begin{bmatrix} -a & a & 0 & 1 & 1 \\ c - x_3 & -1 & -x_1 & 0 & 1 \\ x_2 & x_1 & -b & 0 & 1 \\ 0 & -x_3 & -x_2 & d & 0 \\ -3 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -10 & 10 & 0 & 1 & 1 \\ -38 & -1 & 0 & 0 & 1 \\ 176 & 0 & -8/3 & 0 & 1 \\ 0 & -66 & -176 & -6 & 0 \\ -3 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

为了求在平衡点 $E(0, 176, 66, -1936, 176)$ 相应的特征根, 令 $\det(J_E - I) = 0$, 得相应的特征根分别为 $\lambda_1 = 7.1446 + 30.1172i, \lambda_2 = 7.1446 - 30.1172i, \lambda_3 = 0.0172, \lambda_4 = -0.9705, \lambda_5 = -33.0026$. 这表明平衡点 $E(0, 176, 66, -1936, 176)$ 是个鞍点, 系统(2)在该点处于不稳定状态, 具有三个不稳定相轨, 从而验证了系统(2)的超混沌行为.

2.3 耗散性

系统(2)具有耗散性结构的, 因为梯度函数(能量函数) $\nabla V = -19.667$. 这意味着, 当时间 $t \rightarrow \infty$, 包含轨道的每个体积元以指数速率 -19.667 收敛到零, 系统的所有轨线最终会被限制在一个体积为零的极限子集上, 这说明了超混沌吸引子的存在性. 为了说明系统(2)丰富的动力学行为, 给出它的典型功率谱, 结果如图 2(a).

3 基于线性分离的投影同步

3.1 线性分离的投影同步理论

设混沌系统可以描述为

$$\dot{x}(t) = f(x(t), t) \quad (3)$$

这里 $x(t) \in \mathbf{R}^n$ 是系统的 n 维状态矢量, $f: \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^n$ 定义了一个 n 维矢量空间的矢量域. 把函数 $f(x(t), t)$ 分解为 $f(x(t), t) = g(x(t)) + h(x(t), t)$. 其中 $g(x(t)) = Ax(t)$ 是 $f(x(t), t)$ 的线性部分, A 是常满秩矩阵, 并且它的所有特征值实部均为负. 所以 $h(x(t), t) = f(x(t), t) - g(x(t))$ 为 $f(x(t), t)$ 的非线性部分. 这样系统(3)可以重新写为 $\dot{x}(t) = g(x(t)) + h(x(t), t)$. 构造一个新的系统为

$$\dot{y}(t) = g(y(t)) + h(x(t), t) \quad (4)$$

这里 $y(t) \in \mathbf{R}^n$ 是系统(4)的 n 维状态矢量, λ 是预先给定的同步比例因子, 系统(3)与系统(4)的同步误差被定义为 $e(t) = x(t) - \lambda y(t)$, 它的解由等式

$$\begin{aligned} \dot{e}(t) &= \dot{x}(t) - \lambda \dot{y}(t) = g(x(t)) - \lambda g(y(t)) \\ &= A(x(t) - \lambda y(t)) = Ae(t) \end{aligned}$$

确定 $e(t)$ 的零点就是 $\dot{e}(t)$ 的平衡点, 因为 A 所有特征值实部都为负, 根据线性系统稳定性准则, 同步误差在零点是渐进稳定的, 并且有 $\lim_{t \rightarrow \infty} e(t) = 0$, 即系统(3)的状态矢量 $x(t)$ 和系统(4)的状态矢量 $y(t)$ 按照预先给定的同步比例因子 λ 达到了投影同步.

3.2 投影同步的实现

用 $g(x(t))$ 和 $h(x(t))$ 将系统(2)进行分解, 其中 $g(x(t))$ 和 $h(x(t))$ 分别为

$$g(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = \begin{pmatrix} -a & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -b & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & d & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix}$$

$$h(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = \begin{pmatrix} ax_2 + x_4 + x_5 \\ cx_1 - x_1 x_3 + x_5 \\ cx_5 + x_1 x_2 \\ x_1 x_2 \\ -3x_1 + x_5 \end{pmatrix}$$

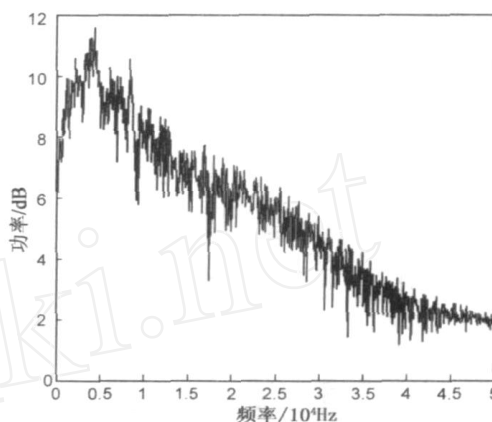
A 有负的特征值 $-a, -1, -b, d, -1$ 构造新的系统为

$$\begin{aligned} \dot{y}_1 &= -ay_1 + (ax_2 + x_4 + x_5) / \lambda, \\ \dot{y}_2 &= -y_2 + (cx_1 - x_1 x_3 + x_5) / \lambda, \\ \dot{y}_3 &= -by_3 + (cx_5 + x_1 x_2) / \lambda, \\ \dot{y}_4 &= dy_4 + x_1 x_2 / \lambda, \\ \dot{y}_5 &= -y_5 + (-3x_1 + x_5) / \lambda, \end{aligned} \quad (5)$$

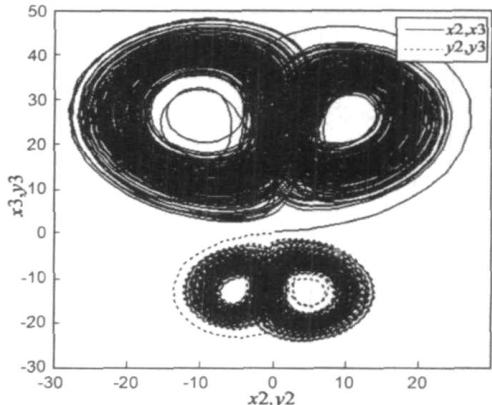
根据线性系统的稳定性准则知, 同步误差 $\lim_{t \rightarrow \infty} e(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} [x(t) - \lambda y(t)] = 0$, 即系统(5)与系统(2)按照预先给定的同步比例因子 λ 达到投影同步.

3.3 数值仿真

系统(5)和系统(2)的初始值分别选取为 $(1, 2, 3, 2, 1)$ 和 $(3, 2, 1, 2, 3)$, 同步比例因子 λ 取 -0.5 , 仿真结果如图 2(b). 可见系统(5)状态矢量的幅值是系统(2)的 0.5 倍, 即系统(2)和系统(10)分别按指定的比例因子 $\lambda = -0.5$ 快速达到了投影同步.



(a) 超混沌吸引子的典型功率谱



(b) 超混沌投影同步结果

图 2

4 结论

本文通过在 Lorenz 系统中引入控制器的方法构造出一个五维超混沌系统, 其超混沌特性通过 Lyapunov 指数得到验证, 还对系统的平衡点, 耗散性进行了分析. 该方法具有普适性, 对于其他低维混沌系统产生超混沌运动具有启示意义.

利用的线性分离方法实现投影同步与现有的投影同步方法相比有许多优势: (1) 方法简单, 鲁棒性强, 且不需要设计 Lyapunov 函数; (2) 能实现一类非线性系统的投影同步, 且不要求系统必须是部分线性的, 且同步具有全局性, 即初始条件不必在同一吸引域内. (3) 可

以实现所有状态变量的投影同步.

本文根据线性系统的稳定性判定准则,通过对超混沌系统进行适当线性分离,利用投影同步理论实现了超混沌系统的投影同步.该方法可以在混沌保密通信中,用于将二进制数扩展到 M 进制数以实现更有效,更可靠,更安全的传输.

参考文献:

- [1] 王光瑞,于熙龄,等.混沌的控制、同步与利用[M].北京:国防工业出版社,2001.167 - 173.
- [2] 王兴元.复杂线性系统中的混沌[M].北京:电子工业出版社,2003.155 - 159.
- [3] 李清都,杨晓松.二维混沌信号产生器的设计[J].电子学报,2005,32(7):1299 - 1302.
LI Qing-du, YANG Xiao-song. 3D chaotic signals generator design[J]. Acta Electronica Sinica, 2005, 32(7): 1299 - 1302. (in Chinese)
- [4] ROSSLER OE. An equation for hyperchaos[J]. Physics Letter A, 1976, 57(6): 397 - 398.
- [5] LI Y X, TAN W, CHEN G R. Generating hyperchaotic via a simple periodic force signal[J]. IEEE Trans, 2007, 79(6): 380 - 384.
- [6] LI Y X, CHEN G R, TAN W. Controlling a unified system to hyperchaotic[J]. IEEE Trans, 2005, 52(4): 207 - 207

- [7] LIU X W, GAO X. Delayed fuzzy controller design for hyperchaotic systems[J]. IEEE Trans, 2006, 4(6): 2394 - 2397.
- [8] LORENZ EN. Deterministic nonperiodic flow[J]. Atmos Sci, 1963, 29(5): 130 - 141.

作者简介:



李华青 男,1987年生于重庆市巴南区.现为重庆邮电大学05级信息与计算科学专业本科生.主要研究兴趣:混沌及其同步、电路与系统.
E-mail:lhq.jsack@126.com

罗小华 男,重庆人,高级工程师,副教授,重庆邮电大学通信与信息工程学院教师,发表学术论文10余篇.主要研究方向:混沌电路与保密通信.
E-mail:luoxh.0630@yahoo.cn



代祥光 男,1986年生于重庆市江北区.重庆邮电大学04级计算机科学与技术专业本科生.主要研究兴趣:多混沌信号的生成,电路与系统.
E-mail:daixianguang@163.com