

单入单出模糊控制器控制函数与插值式的偏差分析

王加银¹, 刘 民², 李洪兴³

(1. 北京师范大学数学科学学院数学与复杂系统教育部重点实验室, 北京 100875;
2. 清华大学自动化系, 北京 100084; 3. 大连理工大学电信学院, 辽宁大连 116023)

摘 要: 本文进一步分析了单入单出模糊控制器的插值机理, 借助符号计算推导了模糊蕴涵算子分别选择最小算子和乘积算子时, 单入单出模糊控制器控制函数的解析式; 得到了控制函数与插值函数间的偏差表达式. 最后本文给出了偏差的一个上界估计以及模糊控制器实际使用时确定规则数的公式.

关键词: 模糊控制器; 模糊划分; 插值式

中图分类号: O159 **文献标识码:** A **文章编号:** 0372-2112 (2009) 02-0424-05

Analysis of Difference Between Control Function and Interpolation Expression of SISO Fuzzy Controller

WANG Jia-yin¹, LIU Min², LI Hong-xing³

(1. School of Mathematical Sciences, Beijing Normal University, Key Laboratory of Mathematics and Complex System, Ministry of Education, Beijing 100875, China; 2. Department of Automation, Tsinghua University, Beijing 100084, China; 3. School of Electronic and Information Engineering, Dalian University of Technology, Dalian, Liaoning 116023, China)

Abstract: The interpolation mechanism of the single-input-single-output (SISO) fuzzy controller is further analyzed. Based on the symbol calculation, analytic expressions for the control function of the SISO fuzzy controller and the differences between the control function and the interpolation expression are derived, when the implication operator is specified as the min operator or the multiply operator. Then an upper bound estimation of the differences is given and the number of the fuzzy inference rules is selected.

Key words: fuzzy controller; fuzzy partition; interpolation expression

1 引言

模糊控制综合了领域专家的实践经验, 具有结构简洁、鲁棒性强、反应快、便于程序或硬件实现等优点, 是模糊理论中非常成功的领域之一. 从结构上讲, 模糊控制器包含了输入信号的模糊化、基于规则库的模糊推理以及清晰化为输出信号三部分; 另一方面, 从数学上讲, 模糊控制器实现了一个由输入论域到输出论域的映射.

文[1, 2]从数学上证明了目前常用的模糊控制算法都可以归结为某种插值方法. 基于模糊控制的插值机理, 文[3~5]建立了变论域自适应模糊控制理论, 并对包括四级倒立摆在内的一类非线性控制系统进行了仿真和实物实验, 取得了很好的效果. 此外, 基于模糊控制的插值机理, 文[6]还揭示了模糊控制器与PID调节器的关系, 文[7]描述了模糊逻辑系统与前向式神经网络之间的联系, 文[8]将模糊控制系统应用于动态系统的

模型建立. 此外, 模糊控制的插值式还广泛应用于文[9~14]; 文[9]分析了如何从数据中获取模糊推理规则库; 文[10]证明了一类模糊系统的泛逼近性; 文[11]设计了稳定的自适应模糊控制器; 文[12~14]主要讨论T-S模型如何应用于模糊控制器的设计以及非线性动态系统的建模. T-S模型最成功之处在于将基于数据的参数优化方法以及模糊控制系统的稳定性分析引入模糊系统中, 这与文[9~11]有一定类似. 在本文中我们将证明: 规则库完备时, 文[9~14]中模糊系统的输入输出映射就是一个插值式.

模糊控制的插值机理在分析证明时, 借助了有限和近似积分的性质. 这一近似建立在规则数目较庞大这一基础上. 当模糊控制器推理规则较少时, 模糊控制器和插值式间将有较大差距, 因此, 为了获取更佳的逼近, 需要领域专家提供尽量多的推理规则. 而庞大的推理规则库在实际应用中是难于获取的. 我们需要一个折衷, 一

方面规则数目不过于庞大,另一方面,插值式能较好的代替模糊控制器.基于以上目标,本文主要分析单入单出模糊控制器和插值式之间的偏差,以及在实用中推理规则数目的选取.

2 模糊控制器的插值表达式

设单入单出模糊控制器输入论域为 $X = [a, b]$, X 上模糊划分为 $A = \{A_i | 1 \leq i \leq n\}$, 其中 $A_i \in F(X)$ 为正规模糊集(即 $\exists ! x_i \in X, A_i(x_i) = 1$, 称 x_i 为模糊集 A_i 的峰点);输出论域为 $Y = [c, d]$, Y 上模糊划分为 $B = \{B_i | 1 \leq i \leq n\}$, 其中 $B_i \in F(Y)$ 为正规模糊集,峰点为 $y_i \in Y$.此外,模糊划分为单调的^[3],即 A 和 B 满足: $x_1 < x_2 < \dots < x_n$ 以及 $y_1 < y_2 < \dots < y_n$. 选取模糊化方式为单值模糊化,模糊蕴涵算子为取小算子或乘积算子,聚合算子为取大运算,去模糊化方式为重心法,假设推理规则库共有 n 条规则,分别为

$$\text{Rule } i: \text{if } x \text{ is } A_i \text{ then } y \text{ is } B_i, 1 \leq i \leq n \quad (1)$$

由此得到 $X \times Y$ 上规则 i 确定的模糊关系 $R_i \in F(X \times Y)$ 且 $R_i(x, y) = (A_i(x), B_i(y))$, 并聚合为总模糊关系 $R = R_1 \cup R_2 \cup \dots \cup R_n$; 由此可以诱导输入论域 X 到输出论域 Y 的模糊映射

$$F(X) \rightarrow F(Y) \quad (2)$$

$$A \mapsto (A) \triangle A \circ R$$

因此, $\forall x \in X$, 以单值模糊化方式得到模糊集 A_x , 由式(2)可计算出 $B = (A_x) = A_x \circ R$. 最后,以重心法去模糊化,由此得到单入单出模糊控制器的控制函数

$$y = f(x) = \frac{\int y B(y) dy}{\int B(y) dy} = \frac{\int y \prod_{i=1}^n (A_i(x), B_i(y)) dy}{\int \prod_{i=1}^n (A_i(x), B_i(y)) dy} \quad (3)$$

此外,基于式(1)的单入单出模糊控制器一元分段插值表达式为

$$y = F(x) = \sum_{i=1}^n A_i(x) y_i \quad (4)$$

无论是单入单出还是多入单出模糊控制器,一般我们对论域模糊划分 A 或 B 的要求沿用文[15]在分析模糊聚类时所给出的模糊划分定义,即

$$\forall i \in \{1, 2, \dots, n\}, A_i \cap \emptyset \text{ 且 } \forall x \in X, \sum_{i=1}^n A_i(x) = 1$$

二相基元组是一类特殊的模糊划分^[1-8], 满足有 $\forall x \in X$ 有 $|\{i | A_i(x) > 0, 1 \leq i \leq n\}| = 2$, 其中 $|S|$ 中表示有限集 S 的元素个数. 最常用的二相基元组为三角形模糊划分, 即

$$\left. \begin{aligned} A_1(x) &= \text{trinf}(x, [x_1 - 1, x_1, x_2]); \\ A_i(x) &= \text{trinf}(x, [x_{i-1}, x_i, x_{i+1}]); 1 < i < n \\ A_n(x) &= \text{trinf}(x, [x_{n-1}, x_n, x_n + 1]); \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

其中,三角形函数 $\text{trinf}(x, [a, b, c])$ 是 Matlab 模糊工具箱中多个隶属函数之一.

3 单入单出模糊控制器插值式的偏差分析

下面,我们首先证明规则库完备^[3]前提下,文[9~14]涉及的多入单出模糊系统的输入输出映射就是一个插值式,然后给出单入单出模糊控制器插值式的偏差表达式以及一个上界估计.

设多入单出模糊系统输入变量为 $x = (x_1, x_2, \dots, x_k)$, 输入论域为 $X = X_1 \times X_2 \times \dots \times X_k$, 输出变量为 y , 论域为 Y , 模糊规则库是由如下 n 条模糊 IF-THEN 规则组成:

$$\text{Rule } i: \text{if } x_1 \text{ is } A_1^{(i)} \text{ and } x_2 \text{ is } A_2^{(i)} \text{ and } \dots \text{ and } x_k \text{ is } A_k^{(i)} \text{ then } y \text{ is } B_i \quad (6)$$

其中 $A_s^{(i)}$ 为论域 X_s 上模糊集, B_i 为输出论域上模糊集, $1 \leq s \leq k, 1 \leq i \leq n$. 由文[9~14]可知,选择单值模糊化、乘积型模糊蕴涵算子和中心平均去模糊化的模糊系统以及多入单出零阶 TS 模型均为:

$$y = f(x) = \sum_{i=1}^n y_i \prod_{i=1}^k A_i(x) \quad (7)$$

其中 y_i 为模糊集 B_i 的峰点, $\prod_{i=1}^k A_i(x) \triangleq \prod_{s=1}^k A_s^{(i)}(x_s)$. 当规则库式(6)完备时,存在一组模糊划分 $\{A_1, \dots, A_k\}$ 满足 $\forall s \in \{1, \dots, k\}, A_s = \{\tilde{A}_s^{(i)} | 1 \leq i \leq p_s\} \subset F(X_s)$, 满足 $p_1 \dots p_k = n$ 且 $\tilde{A}_s^{(i)} = A_s^{(i)}$, 其中 $\sum_{s=1}^{k-1} (i_s - 1) p_s + i_k = i$. 因此,

$$\begin{aligned} \prod_{i=1}^k A_i(x) &= \prod_{i_1=1}^{p_1} \prod_{i_2=1}^{p_2} \dots \prod_{i_k=1}^{p_k} \tilde{A}_1^{(i_1)}(x_1) \tilde{A}_2^{(i_2)}(x_2) \dots \tilde{A}_k^{(i_k)}(x_k) \\ &= \prod_{i_1=1}^{p_1} \dots \prod_{i_{k-1}=1}^{p_{k-1}} \tilde{A}_1^{(i_1)}(x_1) \dots \tilde{A}_{k-1}^{(i_{k-1})}(x_{k-1}) \tilde{A}_k^{(i_k)}(x_k) \\ &= \prod_{i_1=1}^{p_1} \dots \prod_{i_{k-1}=1}^{p_{k-1}} \tilde{A}_1^{(i_1)}(x_1) \dots \tilde{A}_{k-1}^{(i_{k-1})}(x_{k-1}) \\ &= 1 \end{aligned}$$

故式(7)可转化为 $y = f(x) = \sum_{i=1}^n y_i \prod_{i=1}^k A_i(x)$, 即多元分片插值式.

为计算单入单出模糊控制器的一元分段插值函数 $F(x)$ 与控制函数 $f(x)$ 之间差异,先给出描述控制函数 $f(x)$ 解析式的两个引理.

引理 1 给定单入单出模糊控制器,其控制规则为式(1),约定模糊蕴涵算子为乘积算子, A 为二相基元组且 B 为三角形模糊划分,则 $\forall x \in X, \exists i \in \{1, \dots, n-1\}$, 有 $x \in [x_i, x_{i+1}]$ 且控制函数 $f(x) = y_i +$

$$- \frac{h_i^2 + (2 - 2 + 3) h_{i+1}^2 + 3(1 -) h_{i+1} h_{i+2} + (1 -) h_{i+2}^2}{3 h_i + 3(1 - + 2) h_{i+1} + 3(1 -) h_{i+2}} \quad (8)$$

其中 $\triangle A_i(x), h_k \triangle y_k - y_{k-1}, 1 \le k \le n + 1, y_0 \triangle y_1, y_{n+1} \triangle y_n$. 特别,若输出论域上模糊划分的峰点为等距分布时,约定 $h \triangle y_2 - y_1$ (如无特别声明,本文中符号 y_0, y_{n+1}, h_k, h 含义不变,以后不再约定),控制函数有简洁表达式:

$$f(x) = \begin{cases} y_1 + h(6 - 6 + 3)/(6 - 6 + 3^2), i = 1; \\ y_i + h(6 - 7 + 3)/(6 - 3 + 3^2), i = 2, \dots, n - 2; \\ y_{n-1} + h(2 - 3 + 3)/(3 + 3^2), i = n - 1. \end{cases} \quad (9)$$

证明 假设 $x \in [x_i, x_{i+1}]$ 且 $2 \le i \le n - 2$. 由 A、B 为二相基元组及式(3),有

$$f(x) = \int_Y yB(y) dy / \int_Y B(y) dy.$$

其中 $B(y) = \prod_{i=1}^n A_i(x) \cdot B_i(y) = B_i(y) (1 -) B_{i+1}(y)$. 从而有

$$B(y) = \begin{cases} \frac{1}{h_i} (y - y_{i-1}), y \in [y_{i-1}, y_i]; \\ \frac{1}{h_{i+1}} (y_{i+1} - y), y \in [y_i, y_{i+1} + (1 -) y_i]; \\ \frac{1 - }{h_{i+1}} (y - y_i), y \in [y_{i+1} + (1 -) y_i, y_{i+1}]; \\ \frac{1 - }{h_{i+2}} (y_{i+2} - y), y \in [y_{i+1} + y_{i+2}]; \\ 0, \text{ otherwise.} \end{cases}$$

因此

$$\int_Y B(y) dy = 1/2 (h_i + (1 - + 2) h_{i+1} + (1 -) h_{i+2}) \quad (10)$$

$$\int_Y yB(y) dy = 1/2 y_i (h_i + (1 - + 2) h_{i+1} + (1 -) h_{i+2}) + 1/6 (- h_i^2 + (2 + 3 - 2) h_{i+1}^2 + 3(1 -) h_{i+1} h_{i+2} + (1 -) h_{i+2}^2) \quad (11)$$

综合式(10)以及式(11)可得式(8). 此外,当 $i = 1$ 即 $x \in [x_1, x_2]$ 时 $h_1 = 0$, 当 $i = n - 1$ 即 $x \in [x_{n-1}, x_n]$ 时 $h_{n+1} = 0$, 类似可得式(8).

注 1 对于峰点 x_{i+1} 而言,有 $x_{i+1} \in [x_i, x_{i+1}]$, 且 $\triangle A_i(x_{i+1}) = 0$, 由式(8)

$$f(x_{i+1}) = y_i + \frac{2 h_{i+1}^2 + 3 h_{i+1} h_{i+2} + h_{i+2}^2}{3 h_{i+1} + 3 h_{i+2}} = y_i + \frac{1}{3} (2 h_{i+1} + h_{i+2}) = \frac{y_i + y_{i+1} + y_{i+2}}{3},$$

而同时 $x_{i+1} \in [x_{i+1}, x_{i+2}]$ 且 $\triangle A_{i+1}(x_{i+1}) = 1$, 由式(8)

$$f(x_{i+1}) = y_{i+1} + \frac{h_{i+2} - h_{i+1}^2}{3 h_{i+1} + 3 h_{i+2}} = y_{i+1} + \frac{1}{3} (h_{i+2} - h_{i+1})$$

$$= \frac{y_i + y_{i+1} + y_{i+2}}{3}$$

从而验证了控制函数 $y = f(x)$ 在峰点处取值无歧义.

引理 2 给定单入单出模糊控制器,其控制规则为式(1),约定模糊蕴涵算子为取小算子, A 为二相基元组且 B 为三角形模糊划分,则 $\forall x \in X, \exists i \in \{1, \dots, n - 1\}$, 有 $x \in [x_i, x_{i+1}]$ 且控制函数

$$f(x) = y_i + [(- 3 + 3^2 - 3) h_i^2 + (2 - 3^2 + 2^3) h_{i+1}^2 + 3(1 - 2) h_{i+1} h_{i+2} + (1 - 3) h_{i+2}^2] / [(6 - 3^2) h_i + 3 h_{i+1} + (3 - 3^2) h_{i+2}] \quad (12)$$

特别,若输出论域上模糊划分的峰点为等距分布时,控制函数有简洁表达式:

$$f(x) = \begin{cases} y_1 + (6 - 6^2 + 3)/(6 - 3^2) h, i = 1; \\ y_i + (6 - 3 - 3^2)/(6 + 6 - 6^2) h, i = 2, \dots, n - 2; \\ y_{n-1} + (2 - 3 + 3)/(3 + 6 - 3^2) h, i = n - 1. \end{cases} \quad (13)$$

证明 类似引理 1 证明,当 $x \in [x_i, x_{i+1}]$ 且 $2 \le i \le n - 2$ 时,

$$B(y) = \prod_{i=1}^n (A_i(x) \cdot B_i(y)) = (B_i(y)) ((1 -) B_{i+1}(y))$$

◀情况 1, 当 $< 1/2$ 时,

$$\int_Y B(y) dy = 1/2 ((2 - 2) h_i + h_{i+1} + (1 - 2) h_{i+2}) \quad (14)$$

$$\int_Y yB(y) dy = 1/2 y_i ((2 - 2) h_i + h_{i+1} + (1 - 2) h_{i+2}) + 1/6 ((- 3 + 3^2 - 3) h_i^2 + (2 - 3^2 + 2^3) h_{i+1}^2 + 3(1 - 2) h_{i+1} h_{i+2} + (1 - 3) h_{i+2}^2). \quad (15)$$

◀情况 2, 当 $> 1/2$ 时,表达式 $\int_Y B(y) dy$ 和 $\int_Y yB(y) dy$ 分别同于式(14)和式(15).

综合式(14)与式(15),可计算出式(12).

从引理 1 以及引理 2 证明过程容易看出:当输入信号 $x = x_i$ 时,有 $= A_i(x_i) = 1$, 因此,模糊蕴涵算子选择取小算子时, $B(y) = (A_i(x_i) \cdot B_i(y)) (A_{i+1}(x_i) \cdot B_{i+1}(y)) = B_i(y)$, 而模糊蕴涵算子选择乘积算子时,亦有 $B(y) = (A_i(x_i) \cdot B_i(y)) (A_{i+1}(x_i) \cdot B_{i+1}(y)) = B_i(y)$. 因此,不难理解如下推论:

推论 1 给定单入单出模糊控制器,其控制规则为式(1), A 为二相基元组且 B 为三角形模糊划分,则无论选择乘积算子还是取小算子,均有 $f(x_i) = (y_{i-1} + y_i + y_{i+1}) / 3, 1 \le i \le n$.

有了引理 1 和引理 2 的准备,我们可以给出单入单出模糊控制器控制函数 $y = f(x)$ 和插值式 $y = F(x)$ 之间偏差 $d(x) \triangleq f(x) - F(x)$ 的解析式.

定理 1 给定单入单出模糊控制器,其控制规则

为式(1),约定 \odot 为乘积算子, A 为二相基元组且 B 为三角形模糊划分,则 $\forall x \in X, \exists i \in \{1, \dots, n-1\}$, 有 $x \in [x_i, x_{i+1}]$ 且偏差

$$d(x) = [- h_i^2 - 3(-^2) h_i h_{i+1} + p() h_{i+1}^2 + 3(-^2) h_{i+1} h_{i+2} + (1 -) h_{i+2}^2] / [3 h_i + 3(1 - +^2) h_{i+1} + 3(1 -) h_{i+2}] \quad (16)$$

其中 $p() = - 1 + 4 - 6^2 + 4^3 \in [- 1, 1]$. 若记 $h_{\min} \triangleq \min_i h_i, h_{\max} \triangleq \max_i h_i$, 则

$$| d(x) | \leq 2 h_{\max}^2 / (3 h_{\min}), \forall x \in X. \quad (17)$$

证明略,见附录.

定理 2 给定单入单出模糊控制器,其控制规则为式(1),约定 \odot 为取小算子, A 为二相基元组且 B 为三角形模糊划分,则 $\forall x \in [x_i, x_{i+1}], i = 1, 2, \dots, n-1$, 控制函数与插值式间偏差为

$$d(x) = [1() h_i^2 + 2() h_i h_{i+1} + 3() h_{i+1}^2 + (3 - 3^3) h_{i+1} h_{i+2} + (1 -^3) h_{i+2}^2] / [(6 - 3^2) h_i + 3 h_{i+1} + (3 - 3^2) h_{i+2}] \quad (18)$$

其中 $1() \triangleq - 3 + 3^2 -^3, 2() \triangleq - 6 + 9^2 - 3^3, 3() \triangleq - 1 + 3 - 3^2 + 2^3$. 此外,

$$| d(x) | \leq 2 h_{\max}^2 / (3 h_{\min}), \forall x \in X \quad (19)$$

因类似附录 1 中定理 1 的证明,略.

定理 1 和定理 2 给出了单入单出模糊控制器控制函数与插值式间偏差的一个上界估计,这对模糊系统在实际使用时规则数的确定有一定的指导意义:比如,输出论域为等距划分时,为了插值式与控制函数达到指定的靠近程度 L (参数 L 为输出论域区间长度),规则数 n 可选择为 $n = \lceil 2 / (3 L) \rceil + 1$;例如, $L = 10\%$, 则 $n = 7$.

例 1 选择输入论域为 $X = [- 1, 1]$, 输出论域为 $Y = [- 2, 2]$, 输入输出论域上模糊划分均为三角形模糊划分,模糊蕴涵算子分别为取小算子 θ_{13} 和乘积算子 θ_{14} , 模糊化方法为单值模糊化,规则库为完备的单调规则库,去模糊化方法为重心法. 图 1 分别模糊蕴涵算子分别为 θ_{13} 和 θ_{14} 且 $n = 3, 7, 9$ 时,模糊系统的控制函数与插值函数的对比.

4 结论

众所周知,重心法是模糊控制器中最早也是最成熟去模糊化方法,文[16]还证明了重心法在平均平方意义下是最优的方法,同时也指出:正是因为重心法,沟通了 Fuzzy 系统与概率论之间的联系.但重心法的分子分母均为积分式,这亦为模糊系统的分析,如模糊控制器的输入输出对应关系的解析式、模糊集参数的学习和优化、模糊控制器的自适应律设计以及模糊控制

系统的稳定性分析等,带来很大的不便.因此,在实际应用中,模糊控制器的插值式、0 阶或 1 阶 TS 模型以及中心平均去模糊化的模糊系统时常取代形如式(3)的积分分式.本文首先证明了规则完备前提下,0 阶 TS 模型以及中心平均去模糊化的模糊系统就是一个多元分片插值式;其次,还分析了模糊蕴涵算子分别选择取小算子和乘积算子时,模糊控制器控制函数的解析式以及控制函数与插值函数间的偏差;此外,本文还给出了偏差的一个上界估计,这对模糊系统在实际使用时规则数的确定有一定的指导意义.

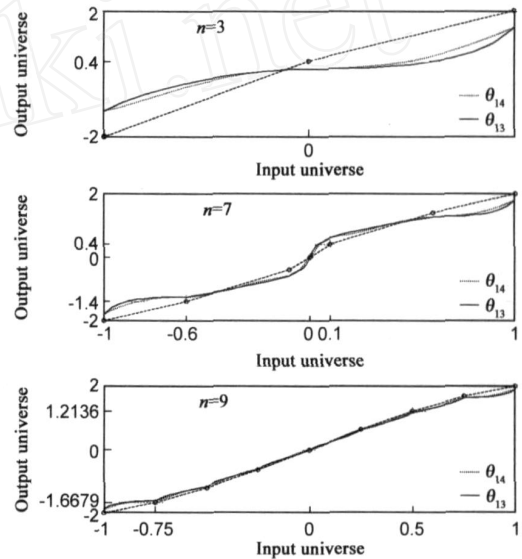


图 1 模糊蕴涵算子分别为 θ_{13} 和 θ_{14} 且 $n=3, 7, 9$ 时,控制函数以及插值函数对比

附录 1 关于定理 1 的证明:当 $i = 1$ 时,

$$| d(x) | = \left| \frac{p() h_2^2 + 3(-^2) h_2 h_3 + (1 -) h_3^2}{3(1 - +^2) h_2 + 3(1 -) h_3} \right| \leq \frac{1 + 3(-^2) + (1 -)}{3(1 - +^2) + 3(1 -)} \cdot \frac{h_{\max}^2}{h_{\min}} \leq 0.61 \frac{h_{\max}^2}{h_{\min}}$$

当 $i = n - 1$ 时,

$$| d(x) | = \left| \frac{- h_{n-1}^2 - 3(-^2) h_{n-1} h_n + p() h_n^2}{3 h_{n-1} + 3(1 - +^2) h_n} \right| \leq \frac{+ 3(-^2) + 1}{3 + 3(1 - +^2)} \cdot \frac{h_{\max}^2}{h_{\min}} \leq 0.61 \frac{h_{\max}^2}{h_{\min}}$$

当 $1 < i < n - 1$ 时,

$$| d(x) | = \left| \frac{- h_i^2 - 3(-^2) h_i h_{i+1} + p() h_{i+1}^2 + 3(-^2) h_{i+1} h_{i+2} + (1 -) h_{i+2}^2}{3 h_i + 3(1 - +^2) h_{i+1} + 3(1 -) h_{i+2}} \right| \leq \frac{+ 3(-^2) + 1 + 3(-^2) + (1 -)}{3 + 3(1 - +^2) + 3(1 -)} \cdot \frac{h_{\max}^2}{h_{\min}} \leq \frac{2 h_{\max}^2}{3 h_{\min}}$$

因此, $| d(x) | \leq 2 h_{\max}^2 / (3 h_{\min}), \forall x \in X$.

参考文献:

- [1] 李洪兴. 从模糊控制的数学本质看模糊逻辑的成功[J]. 模糊系统与数学, 1995, 9(4): 1 - 14.
Li Hong-xing. To see the success of fuzzy logic from mathematical essence of fuzzy control[J]. Fuzzy Systems and Mathematics, 1995, 9(4): 1 - 14. (in Chinese)
- [2] Li Hong-xing. Interpolation mechanism of fuzzy control[J]. Science in China (Series E), 1998, 41(3): 312 - 320.
- [3] Li Hong-xing. Adaptive fuzzy controllers based on variable universe[J]. Science in China (Series E), 1999, 42(1): 10 - 20.
- [4] Li Hong-xing, Miao Zhi-hong, Wang Jia-yin. Variable universe stable adaptive fuzzy control of nonlinear system[J]. Science in China (Series E), 2002, 45(3): 225 - 240.
- [5] Li Hong-xing, Miao Zhi-hong, Wang Jia-yin. Variable universe adaptive fuzzy control on the quadruple inverted pendulum[J]. Science in China (Series E), 2002, 45(2): 213 - 224.
- [6] Li Hong-xing. The relationship between fuzzy controllers and PID controllers[J]. Science in China (Series E), 1999, 42(2): 215 - 224.
- [7] Li Hong-xing, C L. Philip Chen. The equivalence between fuzzy logic systems and feedforward neural networks[J]. IEEE Transactions on Neural Networks, 2000, 11(2): 356 - 365.
- [8] Li Hong-xing, Wang Jia-yin, Miao Zhi-hong. Modeling on fuzzy control systems[J]. Science in China (Series A), 2002, 45(12): 1506 - 1517.
- [9] Wang Li-xin, Mendel J M. Generating fuzzy rules by learning from examples[J]. IEEE Transactions on Systems, Man and Cybernetics, 1992, 22(6): 1414 - 1427.
- [10] Wang Li-xin, Mendel J M. Fuzzy basis functions, universal approximation, and orthogonal least-squares learning[J]. IEEE Transactions on Neural Networks, 1992, 3(5): 807 - 814.
- [11] Wang Li-xin. Stable adaptive fuzzy control of nonlinear systems[J]. IEEE Transactions on Fuzzy System, 1993, 1(2): 146 - 155.
- [12] T Takagi, M Sugeno. Fuzzy Identification of systems and its application to modeling and control[J]. IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics, 1985, 15(1): 116 - 132.
- [13] M Sugeno, G T Kang. Structure identification of fuzzy model[J]. Fuzzy Sets and Systems, 1988, 28(1): 15 - 33.
- [14] K Takagi, M Sugeno. Stability and stabilizability of fuzzy-neural linear control systems[J]. IEEE Transactions on Fuzzy Systems, 1995, 3(4): 438 - 447.
- [15] Ruspini E H. A new approach to clustering[J]. Information & Control, 1969, 15(1): 22 - 32.
- [16] Li Hong-xing. Probability representations of fuzzy systems[J]. Science in China (Series F), 2006, 49(3): 339 - 363.

作者简介:



王加银 男, 副教授, 主要研究方向为计算机辅助建模与仿真、模糊推理与模糊控制。
E-mail: wjy @bnu. edu. cn.



李洪兴 男, 教授, 博士生导师, 北方工业大学自动化系客座教授, 主要研究方向为模糊系统、智能控制、知识表示与数据挖掘等。
E-mail: lihx @dlut. edu. cn