

# 基于方向滤波器组的无冗余拉普拉斯金字塔框架设计

杨 阳<sup>1</sup>, 彭玉华<sup>1</sup>, 刘云霞<sup>1</sup>, 许建华<sup>2</sup>

(1. 山东大学信息学院, 山东济南 250100; 2. 电子测试技术国家重点实验室, 山东青岛 266555)

**摘 要:** 拉普拉斯金字塔(Laplacian Pyramid, LP)是多分辨率分析的有效工具,并且得到了广泛的应用,例如应用在 contourlet 变换中.然而,拉普拉斯金字塔固有的冗余特性,限制了其在图像压缩等领域的应用.本文提出一种基于方向滤波器组的无冗余拉普拉斯金字塔框架.首先,分析了目前常见的金字塔结构的冗余的来源;然后,回顾了临界抽取理论;进而,结合 DFB 与无冗余的金字塔结构提出了一种具有多分辨率以及多方向性的实现结构;最后,在图像的非线性近似(NLA)方面的试验表明,该方案在一定程度上优于 contourlet 变换以及小波变换.

**关键词:** 无冗余; 金字塔; contourlet; 非线性近似

**中图分类号:** TN911.73 **文献标识码:** A **文章编号:** 0372-2112(2009)05-1046-05

## Non-Redundant Laplacian Pyramid Design Based on Directional Filter Bank

YANG Yang<sup>1</sup>, PENG Yurhua<sup>1</sup>, LIU Yurxia<sup>1</sup>, XU Jianhua<sup>2</sup>

(1. School of Information Science and Engineering, Shandong University, Jinan, Shandong 250100, China;

2. National Key Laboratory for Electronic Measurement Technology, Qingdao, Shandong 266555, China)

**Abstract:** Laplacian pyramid(LP) is an effective tool to form a multi-resolution system and is widely used since its proposal such as the structure of contourlet transform, however the drawback of its implicit oversampling prevents it from being used for image compression and etc. In this paper, a non-redundant and multi-directional pyramid structure is proposed. We illustrate the source of the redundancy of the pyramid structure first, and then make a review about the maximal decimation theory and give the solution of solving the redundancy of LP. Then we suggest a pyramid based non-redundancy structure and combine this with the DFB to form a new system to achieve the multi-resolution and multi-directional features. The results of our experimental work show its superiority over contourlets and wavelets in the nonlinear approximation (NLA).

**Key words:** non-redundant; pyramid; contourlet; nonlinear approximation

### 1 引言

高效的图像表示需要以下的特性:多分辨率,多方向性,无冗余,高效的实现形式等<sup>[1,2]</sup>.拉普拉斯金字塔<sup>[3]</sup>具有良好的多分辨率特性,在图像处理领域得到广泛应用并具有多种变形<sup>[4,5]</sup>.然而,LP结构固有的存在冗余的问题制约了其在图像压缩方面的应用,同时,LP结构也缺乏方向信息.方向滤波器(Direction Filter Banks, DFB)可以实现方向分解并且无冗余,但缺乏多分辨率分析的能力.为解决上述矛盾,目前已经有一些研究,例如 Do 等人提出的 contourlet 变换<sup>[6]</sup>,将 LP 与 DFB 结合起来,实现了多分辨率多方向性的图像分析.

目前许多研究集中在如何解决 LP 的冗余的问题上.无冗余 contourlet (Crisp contourlet<sup>[7]</sup>)舍弃了 LP 结构,采用组合的不可分滤波器组实现无冗余的多分辨率以

及多方向分解,由于方向分解在低通分量上进行,因此存在直流分量能量泄露的问题.其它代表性的方法包括倍频程方法(Octave band method<sup>[8]</sup>)以及各向同性 DFB (uDFB<sup>[9]</sup>)等,也存在低通分量的方向分解,因此存在同样的问题.各向异性 DFB (nuDFB<sup>[9]</sup>)首先将低频的能量移出,因此解决了直流分量能量泄露的问题,但其采用的特殊频响的滤波器限制了其执行效率.五株型各向同性 DFB (quDFB<sup>[10]</sup>)方法可以实现高效的格形实现结构,但也存在低频能量泄露的问题.这些方法都舍弃了 LP 结构,而采用某些特殊的滤波器来实现其无冗余的目的.

本文首先分析了 LP 结构中冗余的来源,进而基于临界抽样理论给出了去除冗余的方案.本文提出的结构保留了传统的 LP 的结构以克服传统的 DFB 的低频能量泄露的问题,并具有无冗余、多方向以及多分辨率特

性,可以应用于 DFB 应用的场合(例如去噪声),也可以作为一种无冗余的多分辨率的分解系统应用于图像压缩领域.

## 2 拉普拉斯金字塔框架冗余的来源

拉普拉斯金字塔最早由 Burt 和 Adelson<sup>[3]</sup> 在 1983 年提出并用于图像编码. Do 和 Vetterli 将框架理论应用于拉普拉斯金字塔并提出了框架金字塔结构<sup>[5]</sup>, 并指出其在存在噪声的情况下优于文献<sup>[3]</sup> 中的传统的拉普拉斯金字塔. 图 1 给出了框架金字塔的实现框图. 支路 (a) 给出了分解过程: 首先原始信号  $x$  经过低通滤波  $H$  以及  $M$  采样滤波器采样之后得到概貌信号  $c$ , 然后, 将  $c$  通过  $M$  插值滤波器以及滤波器  $G$  得到输入信号  $x$  的一个近似信号  $P$ ,  $P$  与  $x$  的差值设为  $d$ , 即为分析支路的细节部分, 综合端 (b) 是分解端的逆过程. 由于框架金字塔是传统的金字塔的一种改进形式, 而且应用于 contourlet 中, 因此本文以框架金字塔为研究目标.

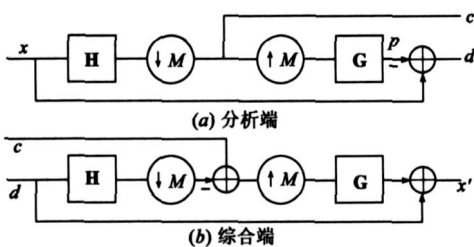


图1 框架金字塔框图

由图 1 可以看出, 低通支路进行了抽取因此不存在冗余, 然而高通支路没有进行抽取, 所以在高通支路存在冗余, 这就是拉普拉斯金字塔冗余的来源. 对二维图像而言, 进行第一级金字塔分解引入的冗余度是  $1/4$ , 第二级金字塔分解引入的冗余度是  $1/16$ , 以此类推, 总的冗余为  $1/4 + 1/16 + 1/64 + \dots = 1/3$ . 很显然, 我们希望在保留 LP 结构的同时实现无冗余.

为了进一步说明传统的 LP 冗余性的问题, 对 contourlet 结构进行一下简单的介绍. Contourlet 变换是由金字塔形方向滤波器组(PDFB)把图像分解成各个尺度下的方向子带, 由两个步骤实现: 首先拉普

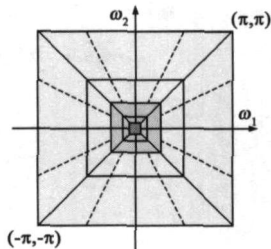


图2 contourlet结构的频谱划分

拉斯金字塔(LP)实现尺度分解, 得到如图 1 中所示的概貌信号  $c$  和细节信号  $d$ , 然后, 对于细节信号  $d$  通过 DFB 实现方向分解, 得到各个方向上的子带系数, 概貌信号  $c$  则作为下一个尺度下的输入端, 重复上述的过程, 得到各个尺度下的子带系数. contourlet 频谱划分结构如图 2 所示. 可以看到 DFB 按照楔形对在尺度进

行了方向分解, 各个尺度整个覆盖低频部分而且是无冗余的, 但由于 LP 结构存在冗余, 因此 contourlet 结构的冗余完全来源于 LP 结构.

## 3 临界抽取理论回顾

这里对临界抽取的基本理论不加证明的进行一下回顾, 完整的描述参见文献<sup>[7, 11]</sup>. 对于频谱  $X(\omega)$ , 用点集  $x = \{\omega: \omega \in X(\omega) \text{ 的支集}\}$  代表其支集区域. 注意到  $x$  以  $2\pi \times 2\pi$  为周期, 令  $F = \{\omega: \omega \in [-\pi, \pi]^2\}$  表示基本的周期, 则  $X(\omega)$  在一个周期内的支集可以定义为  $x_F = x \cap F$ . 在此基础上, 得到以下的定义:

**定义 1** 如果  $x$  的支集的各个平移没有重叠, 那么  $x_F$  允许无混叠的  $M$  抽取

**定义 2** 在满足定义 1 的无混叠抽取的条件下, 如果  $x_F$  的支集的各个平移覆盖了整个频率平面而没有空洞, 那么  $x_F$  允许临界  $M$  抽取

换句话说, 临界抽取 需要  $x_F$  支集的各个平移的分量, 对频率平面的完全的无重叠的覆盖. 本文中用到的  $M$  矩阵为以下两种,

$$Q = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \quad D = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \quad (1)$$

## 4 本文提出的无冗余多方向多分辨率的分析框架

LP 结构具有保持各尺度下的子带系数的分布形状不变, 有利于克服 DFB 的频率混扰以及低频能量泄漏问题等优点<sup>[12]</sup>. 另外, LP 是一种有效的去除低频分量的结构, 很容易与 DFB 配合使用, 因此我们希望保留 LP 结构.

### 4.1 实现无冗余的 LP

第二节提到过, 解决 LP 冗余的问题需要在高通通道进行抽取. 对于图像 LP 金字塔结构, 采用  $2 \times 2$  抽取, 低通通道的支集变为原来的  $1/2 \times 1/2 = 1/4$ , 采样率应该为  $1/4$ . 对于高通通道, 如果要满足临界采样的条件, 要求采样率应为  $1 - 1/4 = 3/4$ , 其支集应该是原来的  $3/4$ . 存在多种抽取插值组合的方式实现. 本文以 2 和 4 抽取组合方式为例, 如图 3 所示. 输入图像经支路 L 处的低通滤波器, 然后经过 4 抽取并输出; 输入图像经高通滤波之后送入支路 1 和支路 2, A 和 B 为相应的滤波器, 设支路 1 和支路 2 分别占有原始频带的  $1/2$  和  $1/4$ , 而支路 L 占有剩余的  $1/4$  的频带. 因此, 如果实现临界采样, 需要在支路 1 进行 2 抽取, 在支路 2 进行 4 抽取.

接下来的问题是如何设计滤波器 A 和 B. 首先, A 和 B 是对称的以满足线性相位的要求, 其次 A 和 B 的应该易于实现, 再次 A 和 B 应该是互补的这样可以通过其中一个获得另外一个, 最后 A 和 B 应该满足完全

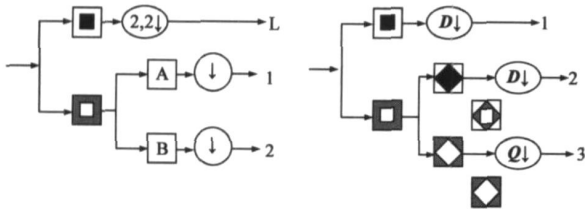


图3 无冗余金字塔结构示意图

图4 LP结合钻石型滤波器的无冗余结构图

重建条件. 基于这些考虑, 本文给出一种实现结构, 如图4所示, 采用LP与钻石型滤波器的组合.

对于图4的支路2在进入采样矩阵D之前的频谱示于图5(a). 经过采样矩阵D以后得到4个分量, 其中之一示于图5(b), 以 $f - 2\pi, 2\pi$ 为周期, 其余三个分量是该分量沿 $(2\pi, 0), (0, 2\pi)$ 以及 $(2\pi, 2\pi)$ 的平移的成分. 将这四个分量合并在一起, 得到图5(c)所示的等效频谱图. 可以发现, 频谱没有重叠而且是完全布满的, 以 $f - \pi, \pi$ 为周期, 因此, 满足第三节提到的临界抽取的定义1和定义2, 这样, LP结构中的冗余被去除了. 类似的结论也可以推广到支路3.

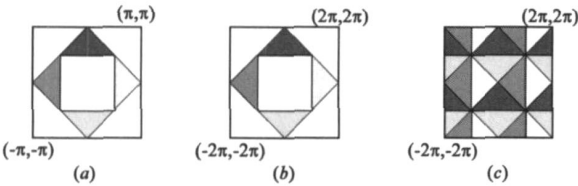


图5 图4中的支路2的频谱的变化情况图.

- (a) 进入采样矩阵D之前的频谱划分;
- (b) 经过采样矩阵D后得到的其中一个分量的频谱划分;
- (c) 经过采样矩阵D后得到的等效的总的频谱划分

上述去掉LP冗余的方法可以进一步推广, 例如, 可以将LP结构与滑动棋盘型滤波器<sup>[7]</sup>组合, 本文不作详细讨论. 关键在于, 本文给出了一种保留LP结构同时能够去除冗余的方法.

### 4.2 输出系数的非矩形化的解决方案

DFB的应用过程中存在子带系数非矩形化的问题, 来源于采样矩阵非对角阵的情况, 此时的滤波结果由于采样矩阵的作用会出现旋转以及伸缩的情况. 以五株形采样结构为例, 采样矩阵的系数在对角线之外的位置上也有非零值, 在采样之后必然存在系数的旋转, 如图6所示.

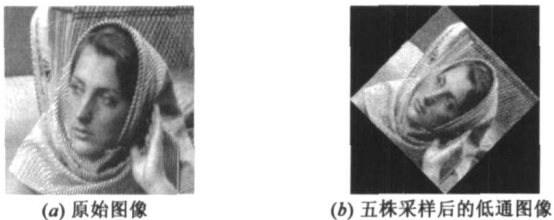


图6 五株采样效果图

为解决这个问题, 即实现输出系数的矩形化, 文献

[13]引入了一个幺模矩阵, 称为后采样矩阵, 作用于采样后的子带系数, 实际上是一种强制实现等效采样矩阵对角线化的方法. 这种方法的问题在于引入了新的矩阵结构, 增加了额外的计算.

由于五株结构存在45度方向的对称性, 四角存在大片的零值区, 因此存在一种很简单也很直观的做法, 即通过几何平移, 将四角的零值区填充原来的非零的数据, 效果如图7(c)所示. 具体的, 对于图7(a), 分为ABCDXYMN八个区域, 其中, ABCD为非零区域, XYMN为零区域, 在平移的过程中, 将A和B保持不变, 把C平移到X的位置, 把D平移到Y的位置, 只保留平移后的ABCD四个区域, 即图7(b)所示, 图7(c)所示为图7(b)处理后的结果.

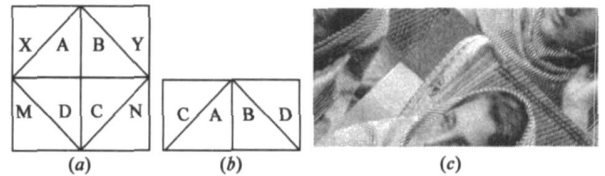
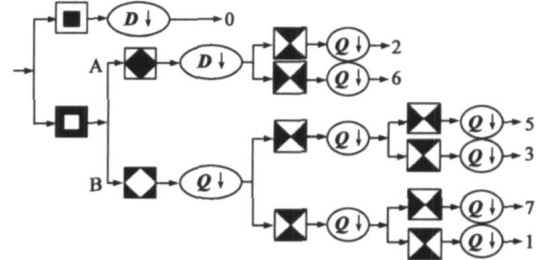


图7 五株采样后进行几何平移操作效果图

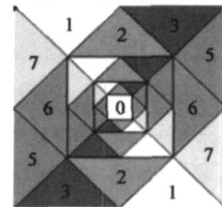
值得注意的是, 低通图像四个边缘内部的相关性很强而四个边缘互相的相关性很弱, 在几何平移之后, 会出现伪边缘的情况; 与低通图像不同, 高通图像4个边界内的相关性和4个边界之间的相关性都是很低的, 几何平移之后不会出现明显的伪边缘的情况. 因此, 本文提出的几何平移的方式, 需要应用于高通图像, 这与应用DFB时需要首先将图像的低频信息去除的要求一致.

### 4.3 基于DFB的无冗余LP结构

基于上述讨论, 以图3为例, 导出如何将DFB与无冗余的LP结合起来. 本文的方法是将DFB作用于LP的高通支路, 例如可以采用contourlet<sup>[6]</sup>中采用的Bamberger型DFB, 也可以采用其他类型的滤波器, 这里集中



(a) 本文提出的结构图



(b) 频谱划分示意图

图8 本文提出的结构的实现框图和频频划分示意图

讨论本文提出的系统构架, 示于图 8(a), 相应的频谱的剖分如图 8(b) 所示. 即在图 3 的高通支路上采用扇形滤波器, 图 9 给出了各通道的频谱变化示意图.

输出 0 是 LP 的低通支路, 可以作为下一级的输入, 可以迭代的进行, 以实现多分辨率的目的, 其频谱是原频谱范围的 1/4, 如图 8(a) 所示. 对于支路 A, 钻石型滤波器之后的频谱示于图 9(a) 1, 经过采样矩阵  $D$  之后的频谱变为图 9(a) 2 再经过两个扇形滤波器以及采样矩阵  $Q$  之后, 支集变为(a) 3 和(a) 4. 由于输出的系数的排布为钻石型, 因此本文进行一个几何平移来实现输出系数的矩形化, 输出为输出 2 和输出 6 对于支路 B, 也可以得到类似的结论.

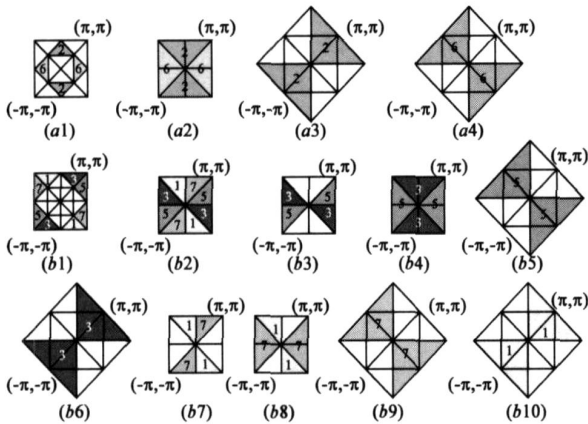


图9 各通道的频谱变化示意图

### 5 试验与比较

下面将本文的算法和小波、contourlet<sup>[6]</sup>以及 quDFB<sup>[10]</sup> (因为其频率剖分和本文的方法类似) 在非线形近似方面进行了比较. 本文对自然图像以及纹理图像都做了大量的实验. 首先以 Brodatz 库中的 D95 图像为例给出纹理图像实验结果, 采用 9 7 小波进行 4 层分解. 横坐标表示重建过程中应用的系数的个数, 纵坐标表示 PSNR. 为了比较的公平, 采用 Do 的 contourlet 工具箱<sup>[14]</sup>. 从图 10 可以看出, quDFB 方法与本文的方法在保留较少系数时效果优于小波和 contourlet 方法, 而 quDFB 方法在采用较多的系数时性能比 contourlet 方法要差, 例如保留 7000 个具有最大幅度的系数时(保留总的系数个数的约 1.7%). 各种方法的重建图像及相应

的 PSNR 示于图 11. 注意红色圆圈标注的内容, 可以看到, 本文方法相对于其他方法可以给出更清楚的水平以及垂直的边缘, PSNR 值也说明了这个问题.

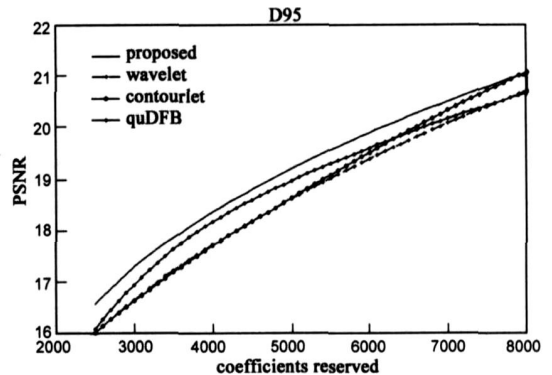


图10 四种方法在D95图像的非线性近似的结果比较

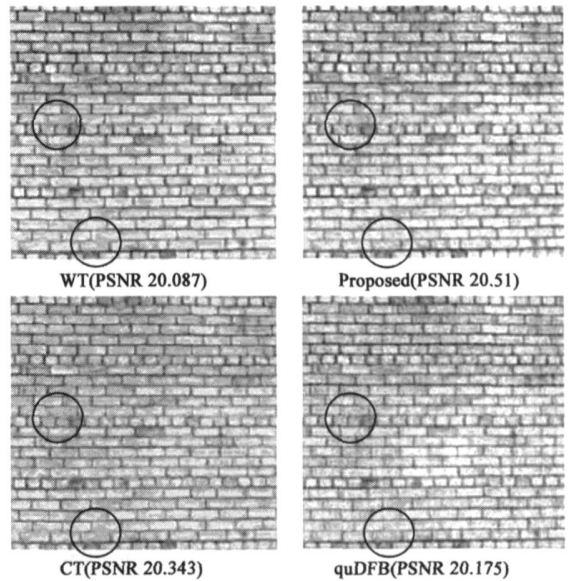


图11 D95图像各种方法的重建图像(进行三层分解,保留总的系数个数的1.7%最大系数)

本文也对自然图像进行了非线性近似的实验, 图像尺寸为 512 × 512, 从南加州大学 USC-SIPI 图像库获得<sup>[15]</sup>, 实验结果示于表 1. 从结果中可以看到, 本文方法在保留较少的系数个数时可以得到优于其它方法的图像质量. Contourlet 方法与 wavelet 方法类似而 quDFB 的结果最差. 保留的系数越多, wavelet 方法越优于其它方法. 这表明, wavelet 方法比 DFB 的方法更适合于在保留较大量的数据时的非线性近似.

表 1 四种方法对自然图像的非线性近似的结果

	1024				1664				2048			
	Proposed	Wavelet	Contourlet	quDFB	Proposed	Wavelet	Contourlet	quDFB	Proposed	Wavelet	Contourlet	quDFB
Baboon	<b>20.49</b>	20.46	20.46	18.60	<b>21.45</b>	21.40	21.40	20.98	<b>21.70</b>	21.66	21.64	21.28
Bridge	<b>19.33</b>	19.05	19.05	18.29	<b>21.05</b>	20.85	20.84	20.53	<b>21.45</b>	21.32	21.31	20.97
Lena	<b>22.63</b>	22.23	22.23	20.11	<b>25.76</b>	25.62	25.63	24.12	26.56	26.55	<b>26.59</b>	24.9
Couple	<b>21.08</b>	20.93	20.93	19.03	<b>23.18</b>	23.11	23.12	22.03	23.74	23.73	<b>23.75</b>	22.61

## 6 结论

本文应用 DFB 以及临界采样理论提出了一种无冗余的 LP 结构, 具有无冗余, 多方向以及多分辨率的特点. 本文方法的特色在于保留了 LP 结构, 因此具有计算高效等优点; LP 结构与传统的 DFB 配合使用克服了 DFB 固有的问题; 无冗余的特点, 使这种结构具有在数据压缩方面的潜在的应用价值. 从非线性近似的实验结果来看, 虽然 quDFB 的频谱划分与本文类似, 但是由于本文采用了 LP 结构, 比 quDFB 方法获得了更好的效果. 希望本文的方法能够在 1-D 和 2-D 滤波器的混合应用方面引起更多的注意, 而且更好的应用 LP 结构.

### 参考文献:

- [ 1 ] 焦李成, 谭山. 图像的多尺度几何分析: 回顾和展望 [ J ]. 电子学报, 2003, 31(12A): 1975- 1981.  
Jiao Li Cheng, Tan shan, Development and Prospect of. Image Multir scale Geometric Analysis [ J ]. Acta Electronica Sinica, 2003, 31( 12A ): 1975- 1981 (in Chinese) .
- [ 2 ] 刘云霞, 彭玉华, 孟庆芳, 尹勇. 一种基于角度的正交 FRIT 变换及其在图像去噪中的应用 [ J ]. 电子学报, 2007, 35( 1 ): 40- 43.  
Liu Yun xia, Peng Yu hua, Meng Qing fang, Yin Yong. Angle based orthogonal FRIT and its application in image denoising [ J ] Acta Electronica Sinica. 2007, 35 ( 1 ): 40- 43. ( in Chinese )
- [ 3 ] Burt P J. The Laplacian pyramid as a compact image code [ J ]. IEEE Transactions on Communications. 1983, 31 ( 4 ): 532 - 540.
- [ 4 ] Goutsias J, Heijmans HJAM. Nonlinear multiresolution signal decomposition schemes. I. Morphological pyramids [ J ]. IEEE Transactions on Image Processing, 2000, 9(11): 1862- 1876.
- [ 5 ] M N Do, M Vetterli. Framing pyramids [ J ]. IEEE Transactions on Signal Processing, 2003, 51( 9 ): 2329- 2342.
- [ 6 ] M N Do, M Vetterli. The contourlet transform: an efficient directional multiresolution image representation [ J ]. IEEE Transactions on Image Processing. 2005, 14( 12 ): 2091- 2106.
- [ 7 ] Y Lu, M N Do. CRISP contourlets: a critically sampled directional multiresolution image representation [ A ]. Proceedings of SPIE Conference on Wavelets Applications in Signal and Image Processing [ C ]. San Diego, 2003. 655 - 665.
- [ 8 ] Hong P S, Smith MJT. An octave band family of nonredundant directional filter banks [ A ]. IEEE International Conference on Acoustics, Speech, and Signal Processing ( ICASSP ' 02 ) [ C ]. Orlando, FL, USA, 2002. ( 2 ): 1165- 1168.

- [ 9 ] Nguyen T T, Orintara S. Multiresolution direction filter banks: theory, design, and applications [ J ]. IEEE Transactions on Signal Processing, 2005, 53( 10 ): 3895- 3905.
- [ 10 ] Nguyen T T, Orintara S. A class of directional filter banks [ J ]. IEEE Transactions on Signal Processing, 2007, 55( 3 ): 949- 961.
- [ 11 ] P P Vaidyanathan. Multirate Systems and Filter Banks [ M ]. Prentice Hall. 1993: 188- 272.
- [ 12 ] R H Bamberger, M J T Smith. A filter bank for the directional decomposition of images: Theory and design [ J ]. IEEE Transactions on Signal Processing, 1992, 40( 4 ): 882- 893.
- [ 13 ] Sang Il Park; Smith, MJT, Mersereau RM. Improved structures of maximally decimated directional filter Banks for spatial image analysis [ J ]. IEEE Transactions on Image Processing, 2004, 13( 11 ): 1424- 1431.
- [ 14 ] M N Do, Contourlet Toolbox [ CP ]. [http://www. ifp. uiu. c. edu/~ minhdo](http://www.ifp.uui.c.edu/~minhdo)
- [ 15 ] USC-SIPI image database [ DB ]. [http:// sipi. usc. edu/ database](http://sipi.usc.edu/database).

### 作者简介:



杨 阳 男, 1982 年生于山东淄博, 博士生, 现就读于山东大学信息科学与工程学院, 研究方向为图像处理、多尺度分析、视频压缩等。  
E mail: yangyang@mail. sdu. edu. cn



彭玉华 女. 教授、博士生导师, 中国电子学会会士、中国电子学会高级会员、电子测量与仪器学会微波毫米波测试专业委员会副主任委员、中国通信学会会员. 现为山东大学信号处理与计算机视觉研究所所长, 研究兴趣包括多尺度分析、小波分析与数字信号处理、低信噪比信号分析、图像压缩编码技术、数字图像处理及生物医学工程. E mail: pyuhua@sdu. edu. cn



刘云霞 女, 1983 生于河北泊头. 博士生, 现就读于山东大学信息科学与工程学院, 研究方向为视频处理、多尺度分析、医学图像处理等。  
E mail: liuyunxia1983@mail. sdu. edu. cn