

平方根求积分卡尔曼滤波器

巫春玲, 韩崇昭

(西安交通大学电子与信息工程学院, 陕西西安 710049)

摘要: 针对具有加性噪声的非线性高斯动态系统的状态估计问题, 本文提出一种近似递归的高斯滤波器: 平方根求积分卡尔曼滤波器(SRQKF). 该滤波器是在求积分卡尔曼滤波器(QKF)基础上的平方根实现形式, 使用统计线性回归的方法, 通过一套参数化高斯密度的高斯-厄米特积分点来线性化非线性函数的; 滤波器采用平方根的实现方法, 不仅增强了数值的鲁棒性, 确保了状态协方差矩阵的半正定性, 而且在一定程度上提高了滤波精度. 仿真实验表明, SRQKF的滤波精度比QKF提高约12%, 且均高于无味滤波器(UF)和扩展卡尔曼滤波器(EKF), 但这两者的计算复杂度均比UF和EKF大. 对滤波精度要求比较高的非线性场合, 新滤波器是一种很有效的非线性滤波算法.

关键词: 高斯-厄米特积分点; 统计线性回归; 无味滤波器; 求积分卡尔曼滤波器

中图分类号: TP391 **文献标识码:** A **文章编号:** 0372-2112 (2009) 05-0987-06

Square-Root Quadrature Kalman Filter

WU Chun-ling, HAN Chong-zhao

(School of Electronics and Information Engineering, Xi'an Jiaotong University, Xi'an, Shaanxi 710049, China)

Abstract: Develop an approximate, recursive Gaussian filters for nonlinear dynamics with additive noise, square-root quadrature Kalman filter (SRQKF). This filter is the square-root implementation on the basis of the quadrature Kalman filter (QKF), it linearizes the nonlinear functions using statistical linear regression method through a set of Gaussian-Hermite quadrature points that parameterize the Gaussian density. The square-root implementation of the new filter not only enhances the numerical stability, guarantees positive semi-definiteness of the state covariance, but also increases the filtering accuracy. The simulation shows that the tracking accuracy of the SRQKF is 12% higher than that of QKF, and the tracking accuracy of QKF is higher than that of the unscented Kalman filter (UF) and extended Kalman filter (EKF), but the computational cost of them are all higher than that of UF and EKF. The new filter is an effective nonlinear filtering algorithm in the place required high filtering accuracy.

Key words: Gauss-Hermite quadrature point; statistical linear regression; unscented filter; quadrature Kalman filter

1 引言

非线性滤波在统计信号处理、目标跟踪及卫星导航等领域有着广泛的应用. 目前最常用的非线性滤波器是扩展卡尔曼滤波器(Extended Kalman Filter, EKF)^[1-3]. EKF是用一阶Taylor级数展开法, 在当前状态估计处, 线性化非线性过程和测量模型, 以便运用卡尔曼滤波递推公式. 然而, 它的精度很大程度上取决于非线性的“严重”程度. 当非线性程度很高时, 线性函数的近似就不太好, EKF估计会发散. 并且, 由于Taylor级数展开对非线性函数的近似只对参考点附近的一些点比较准确, 所以它没法捕获这个函数的全局特性. 另外, EKF算法需要求解Jacobians矩阵和Hessians矩阵(二阶EKF). Jacobians和Hessians矩阵的计算通常数值不稳定, 且计算量很

大. 在有些系统中, Jacobians和Hessians矩阵根本不存在.

无味滤波器(Unscented Filter, UF)^[4-6]是近些年发展起来的另一种很流行的非线性滤波算法. 其基本思想是: 选择确定的采样(Sigma)点, 这些采样点捕获了高斯密度的均值和方差. 当这些点通过非线性函数传播时, 就捕获了非线性函数真实的均值和方差, 精度达到二阶. UF的精度高于EKF, 而且Sigma点的方法也可用于函数不连续的情况. 但对于状态向量的维数超过三阶时, 这个方法要求很好的“调整”, 以避免非正定协方差矩阵的传播.

最近, 在文献[7]的基础上, 文献[8]提出一种求积分卡尔曼滤波器(Quadrature Kalman Filter, QKF). 其基本思想是, 在高斯假设条件下, 使用高斯-厄米特数值积分

规则严格计算递归贝叶斯估计积分,与文献[7]中的算法不同在于,文献[8]是从统计线性回归(Statistical Linear Regression, SLR)的角度,运用高斯-厄米特积分点推导出新的求积分卡尔曼滤波器.本文,在 QKF 算法基础上,运用平方根滤波的数值鲁棒性,提出基于平方根滤波的求积分卡尔曼滤波器(Square-Root Quadrature Kalman Filter, SRQKF),实验证明这是一种有效的非线性滤波算法.下面,首先给出高斯-厄米特求积分规则,以及统计线性回归的基本理论,然后给出新滤波器的详细描述.

2 高斯-厄米特求积分规则

给定在区间 (a, b) 上的加权可积函数 $g(x)$, 它的积分为:

$$I(g) = \int_a^b W(x) g(x) dx \quad (1)$$

式中 $W(x)$ 是加权函数. m 点的数值积分对 $I(g)$ 的近似为:

$$I(g) \approx \sum_{i=1}^m w_i g(x_i) \quad (2)$$

式中 x_i 是积分点, w_i 是相关的权.

考虑一个标量随机变量 x , 其具有高斯概率密度 $N(x; \bar{x}, P_{xx})$. 则对于函数 $g(x)$, 其期望值可如下近似

$$E(g(x)) = \int_{-\infty}^{\infty} g(x) N(x; \bar{x}, P_{xx}) dx \approx \sum_{i=1}^m w_i g(x_i) \quad (3)$$

文献[10]给出了一种计算积分点 x_i 和权 w_i 的计算上很有效的方法,这个方法利用了正交多项式和三对角线矩阵之间的关系.假定 J 是一个对称三对角线矩阵,其对角线元素为零,且有

$$J_{i,i+1} = \sqrt{i/2}, \quad 1 \leq i \leq (m-1)$$

设 λ_i 是 J 的第 i 个特征值, v_i 是 λ_i 对应的标准化特征向量,那么积分点 x_i 的取值为 $x_i = \sqrt{2} v_i$, 相应的权为 $w_i = (v_i)_1^2$, $(v_i)_1$ 是 v_i 的第一个元素.

对于 x 是向量高斯变量的情况,文献[8]也给出了积分点和权的具体解法.

3 统计线性回归

3.1 统计线性回归基本理论

这部分简单回顾一下统计线性回归的基本理论,这是后面要介绍的新滤波器的基础.统计线性回归在线性化一个非线性函数时,考虑到了先验随机变量的不确定性.这样的话,结果得到的线性化函数在统计意义上就比简单使用一阶 Taylor 级数展开线性化更精确^[11].

x 是 n_x 维高斯随机变量,均值为 \bar{x} , 方差为 P_{xx} . 假定另一随机变量 y 与 x 之间有如下的非线性变换

$$y = g(x) \quad (4)$$

则按统计线性回归的理论,对 y 的线性估计 \hat{y} 为

$$\hat{y} = Ax + b \quad (5)$$

式中, A 和 b 为待求的回归系数, A 为矩阵, b 为向量,按照如下的最小均方误差准则确定.

$$\{A, b\} = \arg \min E(e^T e) \quad (6)$$

这里的 E 为取期望操作,上标“ T ”为转置运算, e 为线性化误差,定义为

$$e = y - \hat{y} \quad (7)$$

按照最小化均方误差的准则,可求得

$$b = \bar{y} - A\bar{x}, \quad A = P_{xy}^T P_{xx}^{-1} \quad (8)$$

式中: $\bar{x} = E(x)$, $\bar{y} = E(y)$

$$P_{xx} = E[(x - \bar{x})(x - \bar{x})^T]$$

$$P_{xy} = E[(x - \bar{x})(y - \bar{y})^T]$$

则可得 y 的线性估计

$$\hat{y} = P_{xy}^T P_{xx}^{-1} (x - \bar{x}) + \bar{y} \quad (9)$$

估计误差协方差矩阵为

$$P_{ee} = E[(y - \hat{y})(y - \hat{y})^T] = P_{yy} - AP_{xx}A^T \quad (10)$$

3.2 使用高斯-厄米特积分计算回归系数

对于 n_x 维高斯随机变量 $x \sim N(x; \bar{x}, P_{xx})$, 选择 3-点高斯-厄米特积分点集 $\{x_i, \mathbf{X}_i\}_{i=1}^m$, 使得满足以下条件:

$$\bar{x} = E(x) = \sum_{i=1}^m w_i \mathbf{X}_i \quad (11)$$

$$P_{xx} = E[(x - \bar{x})(x - \bar{x})^T] = \sum_{i=1}^m w_i (\mathbf{X}_i - \bar{x})(\mathbf{X}_i - \bar{x})^T \quad (12)$$

对于 3-点高斯-厄米特积分, m 取值为 $m = 3^{n_x}$. 点集 $\{x_i, \mathbf{X}_i\}_{i=1}^m$ 通过非线性函数 $\mathbf{Y} = g(\mathbf{X})$ 传播后得到 $\mathbf{Y}_i = g(\mathbf{X}_i)$, 使用高斯-厄米特积分规则,可近似计算 \mathbf{Y} 的统计特性如下:

$$\bar{y} = E(y) = \sum_{i=1}^m w_i \mathbf{Y}_i \quad (13)$$

$$P_{yy} = E[(y - \bar{y})(y - \bar{y})^T] = \sum_{i=1}^m w_i (\mathbf{Y}_i - \bar{y})(\mathbf{Y}_i - \bar{y})^T \quad (14)$$

$$P_{xy} = E[(x - \bar{x})(y - \bar{y})^T] = \sum_{i=1}^m w_i (\mathbf{X}_i - \bar{x})(\mathbf{Y}_i - \bar{y})^T \quad (15)$$

由此,给定了加权点集 $\{\mathbf{X}_i, \mathbf{Y}_i\}_{i=1}^m$ 和相关的权 $\{w_i\}_{i=1}^m$, 就可得到 y 对 x 的线性回归

$$\hat{y} = Ax + b$$

式中,回归系数 A 和 b 分别为

$$A = P_{xy}^T P_{xx}^{-1} = \left[\sum_{i=1}^m w_i (\mathbf{Y}_i - \bar{y})(\mathbf{X}_i - \bar{x})^T \right]$$

$$\mathbf{x} \left[\sum_{i=1}^m i (\mathbf{X}_i - \bar{\mathbf{x}}) (\mathbf{X}_i - \bar{\mathbf{x}})^T \right]^{-1}$$

$$\mathbf{b} = \bar{\mathbf{y}} - \mathbf{A}\bar{\mathbf{x}}$$

4 求积分卡尔曼滤波器

这部分从统计线性回归的角度,推出求积分卡尔曼滤波器.这里的回归点就是高斯-厄米特积分点,用来参数化高斯密度.

考虑如下的非线性离散状态空间模型:

$$\mathbf{x}_k = f(\mathbf{x}_{k-1}) + \mathbf{w}_k \quad (16)$$

$$\mathbf{z}_k = h(\mathbf{x}_k) + \mathbf{v}_k \quad (17)$$

式中, \mathbf{x}_k 是 n_x 维状态向量, \mathbf{z}_k 是 n_z 维观测向量, $f(\cdot)$ 和 $h(\cdot)$ 分别为非线性的过程函数和量测函数, \mathbf{w}_k 和 \mathbf{v}_k 分别是过程噪声序列和量测噪声序列.假定 \mathbf{w}_k 和 \mathbf{v}_k 都是零均值高斯的,并满足

$$E(\mathbf{w}_k \mathbf{w}_j^T) = \mathbf{Q}_k \delta_{kj}$$

$$E(\mathbf{v}_k \mathbf{v}_j^T) = \mathbf{R}_k \delta_{kj}$$

$$E(\mathbf{w}_k \mathbf{v}_j^T) = 0, \text{ for all } k, j$$

这里 δ_{kj} 是 Kronecker-delta 函数.初始状态 \mathbf{x}_0 具有先验密度函数 $p(\mathbf{x}_0)$.下面运用高斯-厄米特积分点,使用统计线性回归的方法来线性化过程和量测函数,分两个步骤:时间更新和量测更新.

4.1 QKF 的时间更新

对于非线性方程(16),先不考虑加性噪声,最后再把噪声的影响加进去.在状态空间中找到 m 个回归点 $\{\mathbf{X}_{i,k-1|k-1}\}_{i=1}^m$,及其相关的权 $\{i\}_{i=1}^m$,这些回归点的均值和方差分别为 $\hat{\mathbf{x}}_{k-1|k-1}$ 和 $\mathbf{P}_{k-1|k-1}$,有

$$\mathbf{X}_{i,k-1|k-1} = \sqrt{\mathbf{P}_{k-1|k-1}} \mathbf{i} + \hat{\mathbf{x}}_{k-1|k-1} \quad (18)$$

式中, $\sqrt{\mathbf{P}_{k-1|k-1}}$ 是 $\mathbf{P}_{k-1|k-1}$ 的平方根,满足 $\mathbf{P}_{k-1|k-1} = \sqrt{\mathbf{P}_{k-1|k-1}} \left(\sqrt{\mathbf{P}_{k-1|k-1}} \right)^T$.

回归点 $\{\mathbf{X}_{i,k-1|k-1}\}_{i=1}^m$ 通过非线性过程模型(16)传播,得到一步预测回归点 $\{\mathbf{X}_{i,k|k-1}\}_{i=1}^m$

$$\mathbf{X}_{i,k|k-1}^* = f(\mathbf{X}_{i,k-1|k-1}), i=1, \dots, m \quad (19)$$

由于 QKF 在卡尔曼滤波框架下推导,其非线性函数由统计线性回归的方法线性化,也即式(16)可由下面的线性函数表达:

$$\mathbf{x}_k = f(\mathbf{x}_{k-1}) = \mathbf{A}_{f,k-1} \mathbf{x}_{k-1} + \mathbf{b}_{f,k-1} + \mathbf{e}_k \quad (20)$$

式中, \mathbf{e}_k 表示线性化误差.由第 3 部分知道, $\mathbf{A}_{f,k-1}$ 和 $\mathbf{b}_{f,k-1}$ 分别如下:

$$\mathbf{A}_{f,k-1} = \mathbf{P}_{\mathbf{x}_{k-1}\mathbf{x}_k}^T \mathbf{P}_{\mathbf{x}_{k-1}\mathbf{x}_k}^{-1} \mathbf{P}_{k-1|k-1}^{-1} \quad (21)$$

$$\mathbf{b}_{f,k-1} = \hat{\mathbf{x}}_{k|k-1} - \mathbf{A}_{f,k-1} \hat{\mathbf{x}}_{k-1|k-1}$$

$$\mathbf{P}_{\mathbf{x}_{k-1}\mathbf{x}_k} = E[(\mathbf{x}_{k-1} - \hat{\mathbf{x}}_{k-1|k-1})(\mathbf{x}_k - \hat{\mathbf{x}}_{k|k-1})^T]$$

$$= \sum_{i=1}^m i (\mathbf{X}_{i,k-1|k-1} - \hat{\mathbf{x}}_{k-1|k-1})$$

$$(\mathbf{X}_{i,k|k-1}^* - \hat{\mathbf{x}}_{k|k-1})^T \quad (22)$$

对式(20)取直到 $k-1$ 时刻的量测为条件的条件期望,得到预测状态估计 $\hat{\mathbf{x}}_{k|k-1}$ 如下:

$$\hat{\mathbf{x}}_{k|k-1} = \mathbf{A}_{f,k-1} \hat{\mathbf{x}}_{k-1|k-1} + \mathbf{b}_{f,k-1} \quad (23)$$

式(23)中 $\hat{\mathbf{x}}_{k|k-1}$ 可以用回归点的加权和和计算得到,见第 3.2 部分

$$\hat{\mathbf{x}}_{k|k-1} = \sum_{i=1}^m i \mathbf{X}_{i,k|k-1}^* \quad (24)$$

从式(20)和式(23),可得预测误差协方差为

$$\mathbf{P}_{k|k-1} = \mathbf{A}_{f,k-1} \mathbf{P}_{k-1|k-1} \mathbf{A}_{f,k-1}^T + \mathbf{P}_{ee} \quad (25)$$

上式中 $\mathbf{P}_{k|k-1}$ 可按回归点的加权和求得,即

$$\mathbf{P}_{k|k-1} = \sum_{i=1}^m i (\mathbf{X}_{i,k|k-1}^* - \hat{\mathbf{x}}_{k|k-1})(\mathbf{X}_{i,k|k-1}^* - \hat{\mathbf{x}}_{k|k-1})^T \quad (26)$$

最后,加上过程噪声的影响,得到预测误差协方差矩阵为

$$\mathbf{P}_{k|k-1} = \sum_{i=1}^m i (\mathbf{X}_{i,k|k-1}^* - \hat{\mathbf{x}}_{k|k-1})(\mathbf{X}_{i,k|k-1}^* - \hat{\mathbf{x}}_{k|k-1})^T + \mathbf{Q}_k \quad (27)$$

这样, QKF 最终近似了预测密度:

$$p(\mathbf{x}_k | \mathbf{z}_{1:k-1}) = \mathbf{N}(\mathbf{x}_k; \hat{\mathbf{x}}_{k|k-1}, \mathbf{P}_{k|k-1})$$

4.2 QKF 的量测更新

由于点集 $\{\mathbf{X}_{i,k|k-1}^*\}_{i=1}^m$ 并未反应加性过程噪声的影响,所以 QKF 要找出另一组回归点 $\{\mathbf{X}_{i,k|k-1}\}_{i=1}^m$ 和相关的权 $\{i\}_{i=1}^m$,近似均值为 $\hat{\mathbf{x}}_{k|k-1}$,方差为 $\mathbf{P}_{k|k-1}$ 的概率密度函数.

$$\mathbf{X}_{i,k|k-1} = \sqrt{\mathbf{P}_{k|k-1}} \mathbf{i} + \hat{\mathbf{x}}_{k|k-1}, i=1, \dots, m \quad (28)$$

然后,用与过程函数线性化相似的方法,线性化量测函数 $h(\cdot)$.量测更新步骤如下:

(1) 一步预测回归点的传播

$$\mathbf{Z}_{i,k|k-1} = h(\mathbf{X}_{i,k|k-1}), i=1, \dots, m \quad (29)$$

(2) 通过回归点的加权和,求得预测量测的估计

$$\hat{\mathbf{z}}_{k|k-1} = \sum_{i=1}^m i \mathbf{Z}_{i,k|k-1} \quad (30)$$

(3) 新息协方差的计算

$$\mathbf{P}_{zz,k|k-1} = \mathbf{R}_k + \sum_{i=1}^m i (\mathbf{Z}_{i,k|k-1} - \hat{\mathbf{z}}_{k|k-1})(\mathbf{Z}_{i,k|k-1} - \hat{\mathbf{z}}_{k|k-1})^T \quad (31)$$

(4) 互协方差矩阵计算

$$\mathbf{P}_{xz,k|k-1} = \sum_{i=1}^m i (\mathbf{X}_{i,k|k-1} - \hat{\mathbf{x}}_{k|k-1})(\mathbf{Z}_{i,k|k-1} - \hat{\mathbf{z}}_{k|k-1})^T \quad (32)$$

(5) 由于 $\{\mathbf{x}_k, \mathbf{z}_k\}^T$ 假定是联合高斯的,所以其充分统计量按其均值和协方差分别表示为 $[\bar{\mathbf{x}}_{k|k-1}, \bar{\mathbf{z}}_{k|k-1}]^T$ 和

$\begin{bmatrix} P_{xx,k|k-1} & P_{xz,k|k-1} \\ P_{zx,k|k-1} & P_{zz,k|k-1} \end{bmatrix}$. 结果, k 时刻的后验密度

$p(x_k|z_{1:k})$ 可如下递归计算:

$$\hat{x}_{k|k} = \hat{x}_{k|k-1} + K_k(z_k - \hat{z}_{k|k-1}) \quad (33)$$

$$P_{k|k} = P_{k|k-1} - K_k P_{zz,k|k-1} K_k^T \quad (34)$$

式中: K_k 为增益, 定义如下:

$$K_k = P_{xz,k|k-1} P_{zz,k|k-1}^{-1} \quad (35)$$

这样就得到了 k 时刻的后验概率密度:

$$p(x_k|z_{1:k}) = N(x_k; \hat{x}_{k|k}, P_{k|k})$$

5 有效平方根实现:SRQKF 算法

在 QKF 算法中, 每一步都要计算状态估计协方差矩阵 $P_{k|k}$, 以及一步预测协方差阵 $P_{k|k-1}$ 的平方根. 这不仅大大增加了计算量, 而且数值不稳定. 采用平方根的实现方法, 即 SRQKF, 给定 $S_{k|k} S_{k|k}^T = P_{k|k}$, 及 $S_{k|k-1} \cdot S_{k|k-1}^T = P_{k|k-1}$, 则 $S_{k|k}$ 和 $S_{k|k-1}$ 将直接被传播, 避免了在每一步运行时都要进行因式分解.

QKF 的平方根实现是在参考文献[9]的启发下推导的, 算法具体实现如下:

(1) 求得 m 个标准高斯密度的高斯-厄米特积分点 $\{i\}_{i=1}^m$ 和权 $\{w_i\}_{i=1}^m$.

(2) 假定在 k 时刻时已知后验密度 $p(x_{k-1}|z_{1:k-1}) \sim N(x_{k-1}; \hat{x}_{k-1|k-1}, P_{k-1|k-1})$, 分解因式

$$S_{k-1|k-1} = \text{chol}(P_{k-1|k-1}) \quad (36)$$

(3) 计算积分点 $\{X_{i,k-1|k-1}\}_{i=1}^m$

$$X_{i,k-1|k-1} = S_{k-1|k-1} i + \hat{x}_{k-1|k-1} \quad (37)$$

(4) 通过非线性函数传播后的积分点 $\{X_{i,k|k-1}^*\}_{i=1}^m$

$$X_{i,k|k-1}^* = f(X_{i,k-1|k-1}), i = 1, \dots, m \quad (38)$$

(5) 状态预测

$$\hat{x}_{k|k-1} = \sum_{i=1}^m w_i X_{i,k|k-1}^* \quad (39)$$

(6) 估计预测误差协方差矩阵的平方根

定义矩阵:

$$X_{k|k-1}^* = [(X_{1,k|k-1}^* - \hat{x}_{k|k-1}) \sqrt{w_1} \quad (X_{2,k|k-1}^* - \hat{x}_{k|k-1}) \sqrt{w_2} \dots (X_{m,k|k-1}^* - \hat{x}_{k|k-1}) \sqrt{w_m}]$$

则有

$$S_{k|k-1} = \text{qr}([X_{k|k-1}^* \quad \sqrt{Q_k}]) \quad (40)$$

式中的 $\text{qr}(\cdot)$ 表示 QR 分解.

(7) 计算积分点:

$$X_{i,k|k-1} = S_{k|k-1} i + \hat{x}_{k|k-1} \quad (41)$$

(8) 传播积分点:

$$Z_{i,k|k-1} = h(X_{i,k|k-1}), i = 1, \dots, m \quad (42)$$

(9) 预测量测估计

$$\hat{z}_{k|k-1} = \sum_{i=1}^m w_i Z_{i,k|k-1} \quad (43)$$

(10) 新息协方差矩阵平方根

定义矩阵:

$$Z_{k|k-1} = [(Z_{1,k|k-1} - \hat{z}_{k|k-1}) \sqrt{w_1} \quad (Z_{2,k|k-1} - \hat{z}_{k|k-1}) \sqrt{w_2} \dots (Z_{m,k|k-1} - \hat{z}_{k|k-1}) \sqrt{w_m}]$$

则有

$$S_{zz,k|k-1} = \text{qr}([Z_{k|k-1} \quad \sqrt{R_k}]) \quad (44)$$

(11) 互协方差矩阵平方根

定义矩阵:

$$X_{k|k-1} = [(X_{1,k|k-1} - \hat{x}_{k|k-1}) \sqrt{w_1} \quad (X_{2,k|k-1} - \hat{x}_{k|k-1}) \sqrt{w_2} \dots (X_{m,k|k-1} - \hat{x}_{k|k-1}) \sqrt{w_m}]$$

$$P_{k|k-1} = X_{k|k-1} Z_{k|k-1}^T \quad (45)$$

(12) 卡尔曼增益

$$K_k = (P_{xz,k|k-1} / S_{zz,k|k-1}^T) / S_{zz,k|k-1} \quad (46)$$

(13) 状态估计

$$\hat{x}_{k|k} = \hat{x}_{k|k-1} + K_k(z_k - \hat{z}_{k|k-1}) \quad (47)$$

(14) 状态估计误差协方差矩阵的平方根矩阵

$$U = K_k S_{zz,k|k-1} \quad (48)$$

$$S_{k|k} = \text{cholupdate}(S_{k|k-1}, U, -1)$$

以上步骤(1)-(6)为时间更新, 步骤(7)-(14)为量测更新, 最终得到 $p(x_k|z_{1:k}) = N(x_k; \hat{x}_{k|k}, P_{k|k})$.

6 实验与分析

通过对非线性系统的状态估计, 将本文的新算法与 EKF, UF, QKF 等算法进行了实验比较, 采用以下两个例子来进行仿真.

6.1 具有加性高斯噪声的一维非线性滤波例子 系统模型^[12]如下:

$$x_k = 0.5x_{k-1} + 25x_{k-1}/(1+x_{k-1}^2) + 8\cos(1.2(k-1)) + w_k$$

$$y_k = x_k^2/20 + v_k$$

式中, w_k 与 v_k 均为零均值的高斯白噪声, 方差均为 1, 这是一个一维高度非线性的例子. 真实的系统初始状态 $x_{0|0} \sim N(0.5, 2)$, 积分点数选为 3. 仿真目标跟踪步长 50 步, 运行 50 次蒙特卡罗仿真. 主要从均方根误差 (Root Mean Square Error, RMSE), 计算复杂性两方面比较四种算法的性能.

图 1 给出了三种滤波表 1 四种算法的平均跟踪误差器估计与真实状态的比较, 为清楚起见, 没有给出 EKF 的估计. 可以看出, SRQKF 与真实状态最接近. 图 2 给出四种算法的均方根误差 (RMSE) 比较. 由图 2(a) 看出 QKF 的 RMSE 最小, EKF 的 RMSE 最大; 由图 2(b) 看出, SRQKF 的 RMSE 比 QKF 小.

滤波器	\bar{E}_{RMSE}	\bar{t}/s
EKF	1.699 30	0.016
UF	1.031 60	0.141
QKF	0.516 05	0.438
SRQKF	0.453 43	0.359

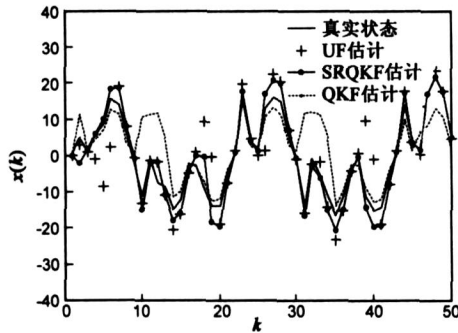
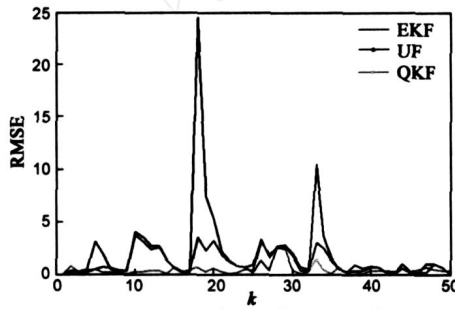
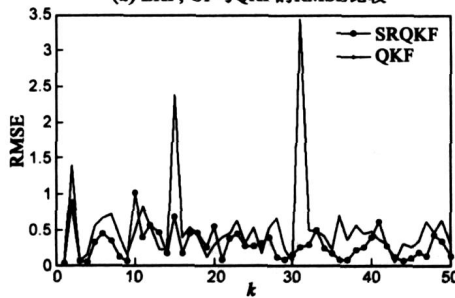


图1 真实状态及三种算法的估计值比较

对于定量的精度比较及计算复杂度的比较见表 1 所示. 均方根误差的平均值用符号 \bar{E}_{RMSE} 表示, 计算时间的平均值表示为 \bar{t}/s . 如表 1 所列数据, SRQKF 的估计精度最高, 比 QKF 的估计精度提高了约 12%, 而 QKF 的精度比 UF 和 EKF 都高, EKF 的精度最低. 而在 50 次 Monte Carlo 仿真的平均计算时间上, 这二者的计算复杂性均高于 UF 和 EKF.



(a) EKF, UF与QKF的RMSE比较



(b) SRQKF与QKF的RMSE比较
图2 四种算法的RMSE比较

6.2 二维目标跟踪实例

这是一个二维再入弹道目标跟踪问题, 模型如下^[13]:

$$x_{k+1} = x_k + Gf(x_k) + G \begin{bmatrix} 0 \\ -g \end{bmatrix} + w_k \quad (49)$$

$$z_k = Hx_k + v_k \quad (50)$$

式中: $x_k = [x_k, \dot{x}_k, y_k, \dot{y}_k]^T$ 是状态向量; x_k 和 y_k 是目标位置; \dot{x}_k 和 \dot{y}_k 是目标速度; $f(w_k), k=0$ 是过程噪声, 为零均值的高斯白噪声序列, 与量测噪声和初始状态独立, 协方差矩阵为:

$$Q_k = q \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix}, \quad G = \begin{bmatrix} T^3/3 & T^2/2 \\ T^2/2 & T \end{bmatrix}$$

T 是连续两个雷达量测的时间间隔; q 是过程噪声强度参数. g 为重力加速度, 为已知常数; 矩阵 G 和 G 分别为:

$$G = \begin{bmatrix} 1 & T & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & T \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad G = \begin{bmatrix} T^3/2 & 0 \\ T & 0 \\ 0 & T^2/2 \\ 0 & T \end{bmatrix}$$

$f(x_k)$ 代表气动阻力的影响, 为一非线性函数,

$$f(x_k) = -0.5 \frac{\rho}{\rho_0} (y_k) (x_k^2 + y_k^2)^{1/2} \begin{bmatrix} \dot{x}_k \\ \dot{y}_k \end{bmatrix}$$

式中: (y_k) 是空气密度^[13].

雷达观测量为斜距 r 和俯仰角 θ ; 他们的量测误差标准离差分别为 σ_r 和 σ_θ ; 将雷达量测转换到笛卡尔坐标系下为横坐标 $d_k = r \cos \theta$ 和纵坐标 $h_k = r \sin \theta$, 故量测方程式(49)为线性等式. 其中,

$$z_k = [d_k \quad h_k]^T, \quad H = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

v_k 是量测噪声, 为零均值的高斯白噪声序列, 与过程噪声和初始状态独立, 其协方差矩阵为 R_k .

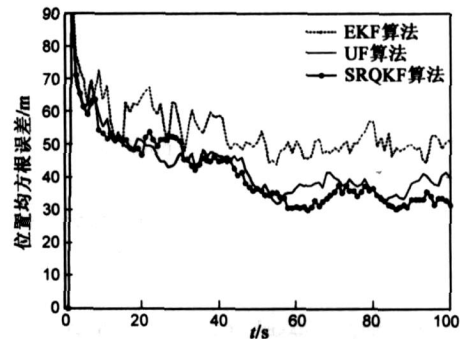


图3 三种算法的位置RMSE比较

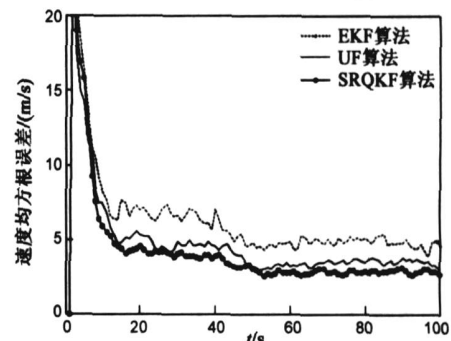


图4 三种算法的速度RMSE比较

实验设定扫描周期 $T=2s$, 雷达量测的伪距误差标准离差为 $\sigma_r = 100m$, 俯仰角误差标准离差为 $\sigma_\theta = 0.05rad$, 目标弹道系数 $\rho = 40000kgm^{-1}s^{-2}$. 初始状态 x_0 是高斯随机向量, 其均值为 $m_0 = [232000, 2290 \cos(190^\circ), 88000, 2290 \sin(190^\circ)]^T$, 位置的单位为 m , 速度单位为 m/s ; 方差为 $\Sigma = \text{diag}([1000^2, 20^2, 1000^2, 20^2])$, 仿真

目标跟踪步长 100 步,运行 100 次蒙特卡罗仿真.假定目标检测概率为 1,雷达虚警概率为 0.仍然是从均方根误差,计算复杂性两方面比较了 EKF,UF 及 SRQKF 算法的性能.

观察图 3 和图 4,可以看出,SRQKF 的位置均方根误差和速度均方根误差均比其它几种滤波器小,表明 SRQKF 的跟踪精度比 UF 和 EKF 的跟踪精度都高.而在计算复杂度上,SRQKF 要比 UF 和 EKF 高些.

7 结论

本文引进了 QKF 算法的平方根形式.提出了平方根求积分卡尔曼滤波器,用于非线性系统的滤波.新滤波器按照统计线性回归的方法,运用高斯-厄米特积分点使非线性函数线性化,而且平方根的实现形式使得滤波器的数值更加鲁棒,并确保了状态协方差阵的半正定性,且在一定程度上提高了估计精度.仿真结果表明,QKF 和 SRQKF 的估计精度均高于 UF 和 EKF,SRQKF 的估计精度比 QKF 的估计精度提高了约 12%;但 SRQKF 算法的计算复杂性要稍高于 UF 和 EKF,EKF 运行最快.在估计精度要求比较高的非线性滤波场合,SRQKF 算法是个很好的选择.

参考文献:

- [1] B D O Anderson, J B Moore. Optimal Filtering [M]. Englewood Cliffs, NJ: Prentice-Hall, 1979.
- [2] Y B Shalom, X-R Li, T Kirubarajan. Estimation with Applications to Tracking and Navigation [M]. New York: Wiley and Sons, 2001.
- [3] P Costa. Adaptive model architecture and extended Kalman-Bucy filters [J]. IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems, 1994, 30(2): 525 - 533.
- [4] S J Julier, J K Uhlmann, H F Durrant-Whyte. A new method for the nonlinear transformation of means and covariances in filters and estimators [J]. IEEE Transactions on Automatic Control, 2000, 45(3): 477 - 482.
- [5] S J Julier, J K Uhlmann. Unscented filtering and nonlinear estimation [J]. Proceedings of the IEEE, 2004, 92(3): 401 - 422.
- [6] 马野,王孝通,戴耀.基于 UKF 的神经网络自适应全局信息融合方法 [J]. 电子学报, 2005, 33(10): 1914 - 1916.
Ma Ye, Wang Xiao-tong, Dai Yao. Study on nonlinear optimal

estimation for neural networks data fusion [J]. Acta Electronica Sinica, 2005, 33(10): 1914 - 1916. (in Chinese).

- [7] Ito K, Xiong K. Gaussian filters for nonlinear filtering problems [J]. IEEE Transactions on Automatic Control, 2000, 45(5): 910 - 927.
- [8] Arasaratnam. I, Haykin. S, Elliott. R. J. Discrete-time nonlinear filtering algorithms using Gauss-Hermite quadrature [J]. Proceedings of the IEEE, 2007, 95(5): 953 - 977.
- [9] Van der Merwe R, Wan E A. The square-root unscented kalman filter for state and parameter estimation [A]. In Proc. IEEE International Conference on ICASSP [C]. Salt Lake City, UT, USA, 2001. 3461 - 3464.
- [10] G H Golub, J H Welsch. Calculation of gauss quadrature rules [J]. Math. Comput, 1969, 23(106): 221 - 230.
- [11] A Gelb, Ed, Applied Optimal Estimation [M]. Cambridge, MA: MIT Press, 1974.
- [12] N J Gordon, D J Salmond, A F M Smith. Novel approach to nonlinear/norm Gaussian Bayesian state estimation [J]. IEE Proceedings on Radar and Signal Processing, 1993, 140(2): 107 - 113.
- [13] Farina A, Benvenuti D, Ristic B. Tracking a ballistic target: comparison of several nonlinear filters [J]. IEEE Trans Aerospace and Electronic Systems, 2002, AES-38: 854 - 867.

作者简介:



巫春玲 女,1978 年生于宁夏中宁.现为西安交通大学电子与信息工程学院博士研究生.主要研究方向为目标跟踪、估计与滤波.
E-mail: informationway@163.com



韩崇昭 男,1943 年生于陕西省乾县,西安交通大学电子与信息工程学院教授,博士生导师.主要研究领域是随机控制与自适应控制,工业过程控制与优化,非线性频谱分析,遥感处理以及决策理论与决策支持系统等.近年来主要从事信息融合理论研究.