

基于改进 WKB 的非均匀等离子体中脉冲波形研究

方 宁, 王宝发

(北京航空航天大学电子信息工程学院 205 教研室, 北京 100191)

摘 要: WKB 是研究非均匀等离子体中电磁波传播现象时经常采用的一种经典计算方法, 但是该方法忽略了电磁波传播过程中前向波和后向波的耦合效应. 为了提高计算结果的准确度, 可利用差分传输矩阵技术, 将 WKB 解由原来的一阶近似提升至二阶近似, 使得计算结果中包含了由于耦合效应引起的衰减部分. 通过此改进 WKB 方法, 以对称分布参数等离子体层模型为例, 对电磁波信号经等离子体层传播后波形的变化进行了计算和分析. 并通过快速傅里叶变换, 给出了时域高斯脉冲信号波形的具体算例, 计算结果表明通过该方法能够有效的分析信号波形变化.

关键词: 等离子体; WKB; 非均匀

中图分类号: TN001 **文献标识码:** A **文章编号:** 0372-2112 (2010) 03-0706-04

Pulse Waveform Characteristics through Inhomogeneous Plasma with Modified WKB

FANG Ning WANG Bao-fa

(School of Electronic and Information Engineering, Beijing University of Aeronautics and Astronautics, Beijing 100191, China)

Abstract: WKB method is often used to calculate the electromagnetic wave propagation in the inhomogeneous plasma, but the coupling effect between the forward wave and backward wave is neglected in the propagation process of the electromagnetic wave in the medium. Making use of the differential transfer matrix methodology, the solution of modified WKB can be improved to the second order approximation and be more accurate than that of WKB for taking into account the coupling effect. Based on this modified WKB method, the waveform of an electromagnetic pulse through an inhomogeneous plasma region is analyzed. The fast Fourier transform algorithm is used to obtain the distortion of the transmission signal waveforms such as the Gaussian pulse signal through a symmetrical plasma distribution and the results show that the amplitude of signal becomes lower under the consideration of coupling effect and so the modified WKB method is suited to analyze the waveform of the transmitted pulse.

Key words: plasma; WKB; inhomogeneous

1 引言

在研究非均匀等离子层中电磁波传播特性时, WKB 是一种普遍采用的近似计算方法^[1,2]. 该方法假设介质的介电常数在一个波长区间缓慢变化, 电磁波在传播过程中不存在耦合效应即沿传播方向不存在反射波, 因此 WKB 解是一阶近似解. 为了更准确地分析等离子体层对脉冲信号的影响, 在传统 WKB 解的基础上, 应用差分传输矩阵方法^[3~5] (differential transfer matrix methodology, DTMM), 将 WKB 解由原来的一阶解提高至二阶解, 从而将 WKB 解的有效计算范围扩展. 分析的脉冲信号采用高斯包络信号, 在频域内由改进的 WKB 解获得频域输出响应, 再通过傅里叶变换得到时域的信号波形.

2 改进的 WKB 方法

WKB 方法是在频域内分析电磁波的变化特性, 因

而在分析经非均匀等离子体层传输后的时域信号波形变化特性中, WKB 解提供了传输信号的频域传输函数. 首先以 TE 波 (电场 y 方向极化) 为例, 当电磁波以入射角 θ_i 斜入射至等离子体层边界, 并从边界面 $z = 0$ 传播到 $z = d$ 处时, 如图 1 所示, 在考虑反射效应时, 即存在向前和向后传播的两种波, 等离子体层中电磁场可表示为

$$E_y = E_y^+ + E_y^- \quad (1)$$

$$H_x = H_x^+ + H_x^- \quad (2)$$

式中, (H_y^+, E_y^+) 表示向前传播的电磁波 (沿 $+z$ 方向), (H_y^-, E_y^-) 为向后传播的电磁波 (沿 $-z$ 方向). 根据麦克斯韦方程组, (H_y^+, E_y^+) 和 (H_y^-, E_y^-) 的关系式如下

$$\frac{dE_y^+}{dz} + j \frac{\omega}{c} q E_y^+ + \frac{q'}{2q} E_y^+ = \frac{q'}{2q} E_y^- \quad (3)$$

$$\frac{dE_y^-}{dz} - j \frac{\omega}{c} q E_y^- + \frac{q'}{2q} E_y^- = \frac{q'}{2q} E_y^+ \quad (4)$$

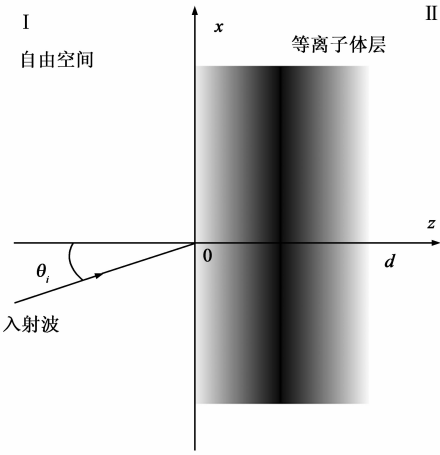


图1 电磁波斜入射至等离子体层示意图

式中, $q^2(z) = n^2(z) - \sin^2 \theta_i$, $n(z)$ 为等离子体的折射率 $n^2(z) = \epsilon_r(z)$, ϵ_r 为相对介电常数, c 为真空中的光速, ω 为入射电磁波角频率. 若忽略耦合效应, 则方程(3)和(4)中等号右边项为零, 其解即为传统的 WKB 解, 解的有效条件为

$$\left(\frac{c}{\omega} \right)^2 \left| \frac{3}{4} \left(\frac{1}{q^2} \frac{dq}{dz} \right)^2 - \frac{1}{2} \frac{1}{q^3} \frac{d^2 q}{dz^2} \right| \ll 1 \quad (5)$$

为了得到式(3)和(4)的解, 可将 WKB 解中的幅度常值项看做是 z 的函数, 即

$$E_y^+ = A(z) q^{-1/2} \exp \left[-j \frac{\omega}{c} \int_0^z q dz \right] \quad (6)$$

$$E_y^- = B(z) q^{-1/2} \exp \left[+j \frac{\omega}{c} \int_0^z q dz \right] \quad (7)$$

其中 $A(z)$ 和 $B(z)$ 表示关于 z 的幅度变化项.

再将式(6)和(7)代入式(3)和(4)中得

$$\frac{dA(z)}{dz} = \frac{q'}{2q} \exp \left[+j2 \frac{\omega}{c} \int_0^z q dz \right] B(z) \quad (8)$$

$$\frac{dB(z)}{dz} = \frac{q'}{2q} \exp \left[-j2 \frac{\omega}{c} \int_0^z q dz \right] A(z) \quad (9)$$

将方程(8)和(9)以矩阵的形式给出

$$\frac{d}{dz} \begin{bmatrix} A(z) \\ B(z) \end{bmatrix} = \mathbf{U}_{TE}(z) \begin{bmatrix} A(z) \\ B(z) \end{bmatrix} \quad (10)$$

其中

$$\mathbf{U}_{TE}(z) = \frac{q'}{2q} \begin{bmatrix} 0, & \exp[+j\varphi] \\ \exp[-j\varphi], & 0 \end{bmatrix}$$

$$\varphi = 2 \frac{\omega}{c} \int_0^z q dz$$

此时方程(10)的解即为考虑了耦合效应的二阶 WKB 解. 利用差分传输矩阵方法可解方程(10), 其结果为^[3]

$$\begin{bmatrix} A(z) \\ B(z) \end{bmatrix} = \mathbf{Q}_{0 \rightarrow z} \begin{bmatrix} A(0) \\ B(0) \end{bmatrix} \quad (11)$$

其中 $\mathbf{Q}_{0 \rightarrow z}$ 为从 0 至 z 的传输矩阵

$$\mathbf{Q}_{0 \rightarrow z} = \exp \left\{ \begin{bmatrix} 0 & m_{12}(z) \\ m_{21}(z) & 0 \end{bmatrix} \right\} =$$

$$\begin{bmatrix} \cosh(\sqrt{m_{12}}\sqrt{m_{21}}) & \frac{\sqrt{m_{12}} \sinh(\sqrt{m_{12}}\sqrt{m_{21}})}{\sqrt{m_{21}}} \\ \frac{\sqrt{m_{21}} \sinh(\sqrt{m_{12}}\sqrt{m_{21}})}{\sqrt{m_{12}}} & \cosh(\sqrt{m_{12}}\sqrt{m_{21}}) \end{bmatrix} \quad (12)$$

$$m_{12}(z) = \int_0^z \frac{q'}{2q} \exp[+j\varphi] d\zeta$$

$$m_{21}(z) = \int_0^z \frac{q'}{2q} \exp[-j\varphi] d\zeta$$

当 TE 波从边界 $z=0$ 处传播至 $z=d$ 处, 根据式(10)和(12), 其传输函数为^[6]

$$H(\omega, d) = e^{-j\phi(d)} \sqrt{\frac{q(0)}{q(d)}} \frac{1}{\cosh(\sqrt{m_{12}(d)}\sqrt{m_{21}(d)})} \quad (13)$$

$$\text{其中 } \phi = \frac{\omega}{c} \int_0^z q d\zeta.$$

若入射波为 TM 波时, 与 TE 波分析相同, 可得

$$H(\omega, d) = e^{-j\phi(d)} \sqrt{\frac{q(0)\epsilon_r(d)}{q(d)\epsilon_r(0)}} \frac{1}{\cosh(\sqrt{m_{12}(d)}\sqrt{m_{21}(d)})} \quad (14)$$

$$m_{12}(z) = \int_0^z \left(\frac{q'}{2q} - \frac{\epsilon'_r}{2\epsilon_r} \right) \exp[+j\varphi] d\zeta$$

$$m_{21}(z) = \int_0^z \left(\frac{q'}{2q} - \frac{\epsilon'_r}{2\epsilon_r} \right) \exp[-j\varphi] d\zeta$$

其解的有效条件为

$$\left(\frac{c}{\omega} \right)^2 \left| \frac{3}{4} \left(\frac{1}{q^2} \frac{dq}{dz} \right)^2 - \frac{1}{2} \frac{1}{q^3} \frac{d^2 q}{dz^2} + \frac{1}{q^2} \left[\frac{1}{n} \frac{d^2 n}{dz^2} - \frac{1}{2} \left(\frac{1}{n} \frac{dn}{dz} \right)^2 \right] \right| \ll 1 \quad (15)$$

式(13)和(14)即两种极化下的频域传输函数 $H(\omega, d)$, 当时域脉冲信号 $e(t, 0)$ 为输入时, 对 $H(\omega, d)E(\omega, 0)$ 进行傅里叶变换即可得到时域传输信号

$$e(t, d) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} H(\omega, d) E(\omega, 0) \exp(j\omega t) d\omega \quad (16)$$

其中 $E(\omega, 0)$ 为 $e(t, 0)$ 的频谱.

3 仿真计算

众所周知, 等离子体的相对介电常数 ϵ_r 的分布取决于入射频率、电子碰撞频率 ν 和电子数密度分布 $n_e(z)$, 当电子数密度沿 z 轴呈对称分布时, 即

$$n_e(z) = M \frac{e^{4\pi z/z_0}}{(1 + e^{4\pi z/z_0})^2} \quad (17)$$

其中 z_0 和 M 为形状影响因子.

则相对介电常数 ϵ_r 表示为

$$\epsilon_r(z) = 1 - M' \frac{e^{4\pi z/z_0}}{(1 + e^{4\pi z/z_0})^2} \tag{18}$$
$$M' = M \left(\frac{1}{\omega^2 + \nu^2} + j \frac{\nu}{\omega} \frac{1}{\omega^2 + \nu^2} \right) \frac{q_e^2}{m_e \epsilon_0}$$

其中为电子数密度, q_e 为电子电量, m_e 为电子质量, ϵ_0 为自由空间介电常数. 当碰撞频率 $\nu = 0$ 时, 对称分布的等离子体层相对介电常数如图 2 所示.

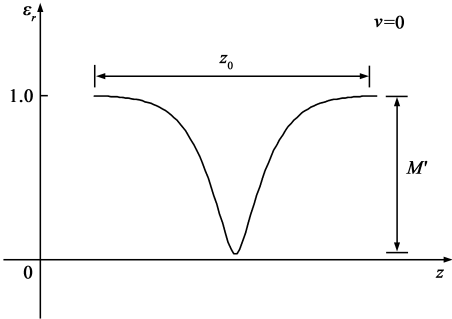


图2 对称等离子体层的相对介电常数示意图

入射脉冲信号以高斯信号为例: $e(t, 0) = e^{-(t/\tau)^2} \cos(2\pi f_c t)$, 其中 f_c 为载波频率, τ 为脉冲波形参数. 由于脉冲信号的能量主要集中在以载波频率 f_c 为中心的一个窄带区, 只有当 f_c 大于等离子体频率时, 脉冲信号的主要能量才能穿透等离子体层即不存在反转点, 因而在以下的仿真计算中 f_c 的取值使得脉冲信号能够穿过等离子体层.

令 $f_0 = \alpha/z_0$, α 为实数, 当给定 f_0 后, 参数 M 的取值则保证 ϵ_r 在 $z = z_0/2$ 处为零. 在后面仿真计算中取 $f_0 = 5\text{GHz}$, 高斯脉冲波形参数 $\tau = 2 \times 10^{-5}$. 为了观察方便, 传输信号的脉冲幅度在时域里均由入射脉冲最大幅值归一化, 时间变量由参考时间 $t' = t - d/c$ 代替. 首先, 取 $z_0 = \lambda_0$, $f_c = 5.5\text{GHz}$, 电磁波垂直入射至无碰撞频率的等离子体层来计算验证改进 WKB 方法的适用性较之 WKB 方法更广泛. 图 3 给出了精确解^[1]、WKB 解和改进 WKB 解三种方法在频域中信号波形. 从图中可知, 改进 WKB 方法计算的结果与精确解相吻合, 而传统的 WKB 解由于没有考虑耦合效应, 在中心频率附近

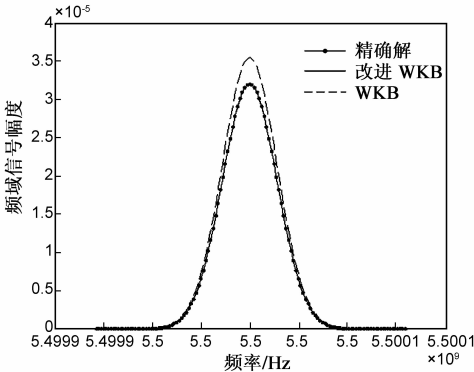


图3 频域传输信号

则高于精确解, 从而说明改进 WKB 解更加准确. 碰撞频率的存在使得等离子体成为有耗介质, 对信号幅度将产生一定的衰减, 图 4 给出了在与图 3 同等计算条件下无碰撞频率和有碰撞频率两种时域脉冲波形. 从图中可以看出碰撞频率使得脉冲幅度有明显的降低. 而图 5 给出了四种不同载波频率下传播信号的波形变化, 其他参数保持不变. 图中曲线表明随着载波频率的越低信号畸变越大.

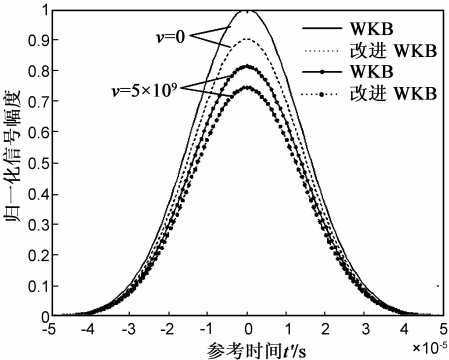


图4 有、无碰撞频率下时域传输信号波形

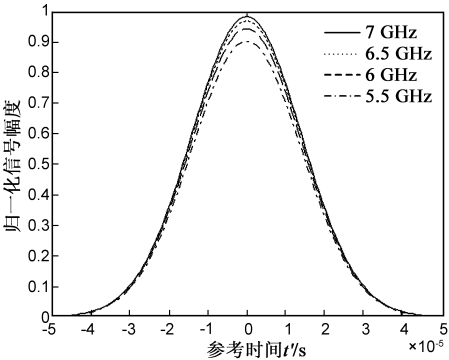


图5 不同载波频率下传输信号波形 $f_c=7\text{GHz}$, $f_c=6.5\text{GHz}$, $f_c=6\text{GHz}$, $f_c=5.5\text{GHz}$

当等离子体层厚度即传播距离 z_0 不同时, 信号在考虑耦合效应时也存在一定差别. 分别设定 $\theta_i = 0, \nu = 0, f_c = 5.5\text{GHz}$, 传输信号如图 6 所示. 从图中可以看出, 随着传播距离的缩减, 信号波形越容易产生变化. 这是因为传播距离的增加使得介电常数变化减缓, 耦合效

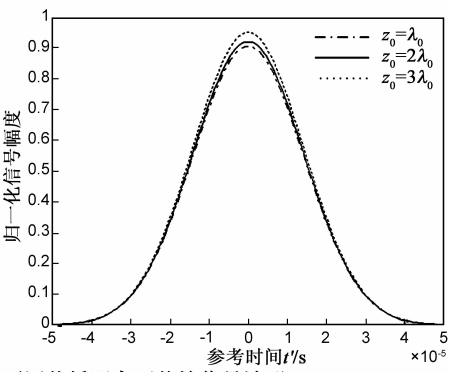


图6 不同传播距离下传输信号波形: $z_0=\lambda_0$, $z_0=2\lambda_0$, $z_0=3\lambda_0$

应减弱,因此信号波形变化越不明显.

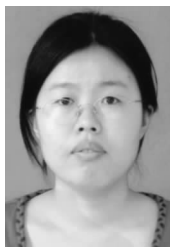
4 结论

WKB 是研究信号传播特性的有效方法,差分传输矩阵方法的引入使得 WKB 解由一阶近似提高至二阶近似,从而可更加准确地分析脉冲信号波形.以高斯脉冲信号在非均匀等离子体中传播后的波形变化为例,计算结果表明改进的 WKB 解较之传统的 WKB 解对信号的幅度可给出更加合理的结果,为工程应用提供了有效的分析手段.

参考文献:

- [1] V L Ginzburg. The Propagation of Electromagnetic Waves in Plasmas[M]. Oxford: Pergamon Press, 1970.
- [2] McIntosh R, El-Khamy S. Compression of transmitted pulses in plasmas[J]. IEEE Transactions on Antennas and Propagation, 1970, 18(3): 236 – 241.
- [3] Eghlidi Mohammad Hadi, Mehrany Khashayar, Rashidian Bizhan. Modified WKB method for solution of wave propagation in inhomogeneous structures with arbitrary permittivity and permeability profiles[A]. Proceedings of the 37th European Microwave Conference[C]. Munich: Causal Productions Pty Ltd, 2007. 1373 – 1376.
- [4] M H Eghlidi, K Mehrany, B Rashidian. Modified differential transfer matrix method for solution of one dimensional linear inhomogeneous optical structures[J]. J Opt Soc Amer B, Opt Phys, 2005, 22(7): 1521 – 1528.
- [5] S Khorasani, K Mehrany. Differential transfer-matrix method for solution of one-dimensional linear nonhomogeneous optical structures[J]. J Opt Soc Amer B, Opt Phys, 2003, 20(1): 91 – 96.
- [6] Eghlidi M H, Mehrany K, Rashidian B. Analytical approach for analysis of nonuniform lossy/lossless transmission lines and tapered microstrips[J]. IEEE Transactions on Microwave Theory and Techniques, 2006, 54(12): 4122 – 4129.

作者简介:



方 宁 女, 1979 年出生, 辽宁省鞍山市人, 2007 年 6 月, 北京航空航天大学电子信息工程学院, 博士后. 2002 年本科毕业于北京航空航天大学电子工程系, 2002 年 9 月 ~ 2007 年 6 月, 北京航空航天大学电磁场与微波技术专业直读博士. 主要从事雷达目标散射特性、角闪烁特性、等离子体散射特性的研究.

E-mail: fangn31@163.com



王宝发 男, 1938 年出生, 天津人, 北京航空航天大学电子信息工程学院博士生导师. 长期从事电磁波传播与散射、微波与天线应用、电磁兼容及计算电磁学的教学科研工作.

E-mail: b.f.wang@163.com