# 一种非确定性的网络演算

樊葆华,张鹤颖,窦文华
(国防科技大学计算机学院,湖南长沙 410073)

**摘　要：** 采用随机网络演算可以计算非确定性系统的性能参数.在实际中,区间数学也可处理非确定性,本文构造了广义增函数集合的区间扩展,采用幂等数学研究了该扩展的性质.通过区间的卷积可以定义区间到达曲线与区间服务曲线,根据这两个概念提出了一种基于区间的网络演算,区间网络演算可以计算出通过区间表示的性能参数界限,可以在一定程度上处理不确定性,最后给出了区间演算的应用例子.

**关键词：** 网络演算；非确定性系统；幂等区间数学

**中图分类号：** TP323　　**文献标识码：** A　　**文章编号：** 0372-2112 (2010) 11-2691-06

# An Uncertain Network Calculus

FAN Bao-hua, ZHANG He-ying, DOU Wen-hua
(*School of Computer, National University of Defense Technology, Changsha, Hunan* 410073, *China*)

**Abstract:** Performance bounds for uncertain systems can be calculated by stochastic network calculus. In practice, interval mathematics can also deal with uncertainty. We construct the interval extension of wide-sense increasing functions, and study its properties by idempotent interval mathematics. For uncertain flows and servers, we can define arrival and service curve by convolution of function intervals, based on these two notions, we develop a new kind of network calculus which can be used to calculated performance bounds represented by intervals. Applications of interval network calculus are also given.

**Key words:** network calculus; uncertain system; idempotent interval mathematics

## 1　引言

确定性网络演算(Deterministic Network Calculus)可被用于计算网络性能参数的确界,这样计算出来的界限有时过于松弛,不符合某些实际应用的需求.采用随机网络演算,可以得到比确定性网络演算更为精确结果[1].

除了概率论之外,还存在其它可以处理不确定参数的方法,其中之一是区间数学(Interval Mathematics),如果对某个性能参数 $x$, $\exists\, x_l, x_u: x_l \leqslant x \leqslant x_u$.则闭区间 $[x_l, x_u]$ 代表 $x$ 的所有可能取值的集合.研究区间性质的数学分支称为区间数学.区间数学最早由文献[2]提出,用于确定计算机程序中的舍入和截取误差.到目前为止,区间数学已经成为研究大量非确定性问题的有效手段[3].文献[4]将区间数学与幂等分析理论结合,提出了幂等区间分析理论(Idempotent Interval Anaslyisis).文献[5]采用幂等区间分析的方法对一个非确定性的计时事件图(Timed Event Graph)进行了分析.

本文采用基于区间双子的网络演算计算某些非确定性参数的区间界.学术界已经提出了多种构建在不同双子上的网络演算:在文献[6]中,Chang研究了极大代数下的动态滤波器理论以及基于时变函数极小双子的网络演算;在文献[8]中,Fidler研究了基于勒让德(Legendre)变换的共轭(Conjugate)网络演算;在文献[9]中,Jiang将网络演算建立在模糊(Fuzzy)数学理论之上.

网络演算也是国内的研究热点.张信明等率先采用网络演算理论分析某些特殊的网络元素,如无缓冲区整形器、GPS服务器等[11,13].张连明等采用网络演算的理论对网络中的某些特殊流如自相似流等进行了分析[15].王子君等分析了其它网络环境下的演算[12].陈昕等采用网络演算分析了 AFDX 网络[14].从总体上看,国内研究大多集中在实际应用方面,理论研究相对缺乏.

本文提出一种基于广义增函数双子区间扩展的网络演算,区间之间的运算基于极小代数.通过定义区间到达曲线和区间服务曲线,可以计算端到端性能参数的区间界.因为区间可以表达不确定性,因此区间演算属于非确定性网络演算.区间演算的提出,为网络建模分析提供了一种复杂度介于确定性网络演算与随机网络演算之间的选择.因为广义增函数的区间扩展也是双

收稿日期:2009-07-28;修回日期:2009-10-27
基金项目:国家自然科学基金(No.60603064,No.60603061)

子,因此本文采用余理论作为主要的数学分析工具.

## 2 相关工作

首先通过表 1 给出本文用到的数学符号.

表 1 本文用到的数学符号

| 符号 | 表示的意义 |
|---|---|
| ★ | 极小卷积 |
| $\otimes$ | 表示双子乘法 |
| $\oplus$ | 极小运算或双子加法 |
| $\mathbb{R}$ | 实数集 |
| $\mathcal{D}$ | 一般集合 |
| $\vee$ | 极大运算 |
| $a^*$ | $a$ 的闭包 |
| $I_X$ | $X$ 到自身的恒等映射 |
| $\preceq,\succeq$ | 双子加法定义的序 |
| $I(X)$ | 双子 $X$ 的弱区间扩展 |
| $\mathrm{II}(X)$ | 双子 $X$ 的区间扩展 |
| $\oslash$ | 反卷积 |
| $\overline{\oslash}$ | 区间的反卷积 |
| $\overline{★}$ | 区间的卷积 |
| $f^\#,f^b$ | 映射 $f$ 的余与对偶余 |
| 黑体字母 | 表示区间 |

### 2.1 幂等数学

幂等(Idempotent)性是指对于某个代数结构中的加法 $\oplus$, $a\oplus a=a$[4].与之相关的代数结构是双子.

**定义 1**(双子) $\mathcal{D}$ 是一个集合,在其上定义两种运算$\oplus$和$\otimes$,二者都满足结合律并且分别有中立元 $\epsilon$ 和 $e$,$\oplus$可交换并且是幂等的,$\otimes$对$\oplus$满足分配律,对任意 $a\in\mathcal{D}$, $a\otimes\epsilon=\epsilon$.称满足以上条件的$\{\mathcal{D},\otimes,\oplus\}$为双子 Dioid.

网络演算中经常用到以下双子:

(1)极小代数:

$\overline{\mathbb{R}}=\{\mathbb{R}\cup+\infty,\min,\times\}$;

(2)考虑所有定义在$[0,+\infty)$的非负广义增函数(即非减函数)的集合 $\mathcal{F}$,在其中定义运算:

($a$)加法:$(f\oplus g)(t)=f(t)\oplus g(t)$;

($b$)卷积:$(f★g)(t)=\inf\limits_{0\leqslant s\leqslant t}\{f(s)+g(t-s)\}$;

($c$)反卷积:$(f\oslash g)(t)=\sup\limits_{u\geqslant 0}\{f(t+u)-g(u)\}$.

$\{\mathcal{F},\oplus,★\}$构成可交换双子,称为基于极小代数运算的广义增函数双子.

双子中的加法可以导出的一种序关系:$a\preceq b\Leftrightarrow a=a\oplus b$.定义$\preceq$的对偶序为$\succeq$,$a\succeq b\Leftrightarrow b\preceq a$.

双子中另一类重要的运算为闭包(Closure),对任意 $a\in\mathcal{D}$,定义:

$$a^*=e\oplus a\oplus a^2\cdots\oplus a^n\cdots$$

其中 $e$ 为$\mathcal{D}$ 的单位元,$a^n\otimes a^{n-1}$,$a^0=e$.

### 2.2 余理论

余理论是双子几何分析的主要工具,已经应用于多个应用数学领域[4,10].余理论的主要研究对象是余映射和对偶余映射.

**定义 2**(余映射和对偶余映射) $f$ 是从偏序集$\mathcal{X}\to\mathcal{Y}$ 的保序映射,如果对任意 $y\in\mathcal{Y}$,子集$\{x\in\mathcal{X}|f(x)\preceq y\}$存在最大元,则称 $f$ 是余映射(Residuated Mapping).该最大元记作 $f^\#(y)$,映射 $f^\#:\mathcal{Y}\to\mathcal{X}$ 被称为 $f$ 的余(Residual).如果对任意 $y\in\mathcal{Y}$,子集$\{x\in\mathcal{X}|f(x)\succeq y\}$存在最小元,则 $f$ 是对偶余映射(Dual-residuated Mapping).该最小元记作 $f^b(y)$,映射 $f^b:\mathcal{Y}\to\mathcal{X}$ 被称为$f$ 的对偶余(Dual-residual).

余映射在实际应用中较为常见,例如映射 $f:\mathbb{Z}\to\mathbb{R}$ ,$f(x)=x$ 是余映射也是对偶余映射.

文献[10]证明:映射 $\Pi:\mathcal{D}\to\mathcal{D}$ 是余映射的充要条件为其将$\epsilon$ 映为$\epsilon$,并且是下半连续映射(Lower semi-continuous),即对任意 $\mathcal{G}\subset\mathcal{D}$,$\Pi(\oplus_{x\in\mathcal{G}}x)=\oplus_{x\in\mathcal{G}}\Pi(x)$.余映射主要有以下性质:

**定理 1**(余映射的性质[10]) $f,g$ 为从完全双子 $\mathcal{A}$ 到完全双子$\mathcal{D}$ 的映射,如果 $f$ 是余映射,记 $f$ 的余为 $f^\#$;如果 $f$ 是对偶余映射,记 $f$ 的对偶余为$f^b$,如下性质成立:

(1)$f^b\circ f\preceq I_{\mathcal{D}}$,$f\circ f^b\succeq I_{\mathcal{D}}$;

(2)$f\circ f^\#\preceq I_{\mathcal{A}}$,$f^\#\circ f\succeq I_{\mathcal{D}}$;

(3)$f\circ f^\#\circ f=f$,$f^\#\circ f\circ f^\#=f^\#$;

(4)$f\circ f^b\circ f=f$,$f^b\circ f\circ f^b=f^b$;

(5)$(f\circ g)^b=g^b\circ f^b$;

(6)$(f\circ g)^\#=g^\#\circ f^\#$.

### 2.3 网络演算理论

网络演算采用到达曲线(Arrival Curve)描述数据流的流量(Traffic)特征,而服务器的服务能力则用服务曲线(Service Curve)描述,基于到达曲线和服务曲线可以得到确定性的性能保证(Deterministic Performance Guarantees).

本文采用如下网络模型:服务器是工作保持(Work Conserving)的,采用 FIFO 排队规则.网络中的数据流(Flow)用其流量累积函数(Cumulative Traffic Functions)表示.本文总是用 $A$ 代表服务器输入流,$D$ 代表相应的输出流,它们的流量累积函数分别记作 $A(t)$,$D(t)$,$A(t)$,$D(t)\in\mathcal{F}$.

**定义 3**(到达曲线) 设 $\alpha\in\mathcal{F}$ 是广义增函数,对于输入累积函数为 $A(t)$的流,如果对所有 $t\geqslant 0$,$A(t)\leqslant(A★\alpha)(t)$,则称 $\alpha$ 是$A(t)$的到达曲线.

**定义 4**(服务曲线) 假设网络元素 $S$ 的输入输出分别为$A$ 和$D$,称 $S$ 提供服务曲线$\beta$,当且仅当以下条件同时成立:

(1)$\beta\in\mathcal{F}$,$\beta(0)=0$;

(2)$D(t)\geqslant(A★\beta)(t)$.

根据到达曲线与服务曲线可得得到确定性的性能保证.

**定理 2**(确定性网络演算基本定理[7]) 输入服务器 $S$ 的流$A(t)$有到达曲线 $\alpha(t)$,$S$ 提供服务曲线$\beta(t)$,则:

(1)在时刻 $t$,$S$ 的最大积压满足:

$$B(t)\leqslant\sup_{0\leqslant s\leqslant t}\{\alpha(s)-\beta(s)\}\tag{1}$$

(2)在时刻 $t$ 分组的最大延迟上界为：

$$\sup_{0\leqslant s\leqslant t}\inf\{\tau\geqslant 0:\alpha(s)\leqslant\beta(s+\tau)\}\tag{2}$$

(3)$D(t)$有到达曲线$(\alpha\oslash\beta)(t)$.

## 3　双子的区间扩展

双子$\{\mathcal{D},\oplus,\otimes\}$中的闭区间定义为集合

$$\boldsymbol{x}=[x_1,x_2]=\{x\mid x\in\mathcal{D},x_1\preceq x\preceq x_2\}$$

$x_1,x_2\in\mathcal{D}$. 如果 $\boldsymbol{x}$ 和 $\boldsymbol{y}$ 都是 $\mathcal{D}$ 中的区间，则 $\boldsymbol{x}\subseteq\boldsymbol{y}$ 当且仅当 $y_1\preceq x_1\preceq x_2\preceq y_2$.

记$\{\mathcal{D},\oplus,\otimes\}$中所有区间构成的集合为 $I(\mathcal{D})$，在 $I(\mathcal{D})$中定义如下运算：

设 $\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\in I(\mathcal{D})$：

(1)$\boldsymbol{x}\ \overline{\otimes}\ \boldsymbol{y}=\bigcap\limits_{z\in I(\mathcal{D});\{x\otimes y\mid x\in x,y\in y\}\subseteq z}z$；

(2)$\boldsymbol{x}\ \overline{\otimes}\ \boldsymbol{y}=\bigcap\limits_{z\in I(\mathcal{D});\{x\oplus y\mid x\in x,y\in y\}\subseteq z}z$.

$\boldsymbol{x}\ \overline{\otimes}\ \boldsymbol{y}$ 是包含集合$\{x\otimes y\mid x\in\boldsymbol{x},y\in\boldsymbol{y}\}$的最小区间，而 $\boldsymbol{x}\ \overline{\otimes}\ \boldsymbol{y}$ 是包含集合$\{x\oplus y\mid x\in\boldsymbol{x},y\in\boldsymbol{y}\}$的最小区间. $I(\mathcal{D})$称为双子$\{\mathcal{D},\oplus,\otimes\}$的弱(weak)区间扩展，并且$\{I(\mathcal{D}),\overline{\oplus},\overline{\otimes}\}$仍然是双子，证明参见文献[4].

虽然弱区间扩展继承了双子$\{\mathcal{D},\oplus,\otimes\}$的许多属性，但是重要的属性如稳定性等都未被继承，因此需要定义更强的区间扩展. 双子 $\mathcal{D}$ 的区间扩展定义为：

$$\mathrm{II}(\mathcal{D})=\{[x_1,x_2]\mid x_1,x_2\in\mathcal{D},x_1\preceq x_2\prec\epsilon\}\cup[\epsilon,\epsilon]\tag{3}$$

$\{\mathrm{II}(\mathcal{D}),\overline{\oplus},\overline{\otimes}\}$同样构成双子，并且继承了双子 $\mathcal{D}$ 的更多性质.

## 4　$\{\mathcal{F},\oplus,\bigstar\}$的区间扩展

本节研究双子$\{\mathcal{F},\oplus,\bigstar\}$的区间扩展的性质，$\mathcal{F}$ 上的区间定义为集合：

$$\boldsymbol{f}=[f_1,f_2]=\{h\mid h\in\mathcal{F},f1\leqslant h\leqslant f_2\}$$

其中 $f_1,f_2\in\mathcal{F}$. $\mathcal{F}$ 的区间扩展记作$\mathrm{II}(\mathcal{F})$，即所有定义在 $\mathcal{F}$ 上的区间集合，对所有 $x=[x_1,x_2]\in\mathrm{II}(\mathcal{F})$，有 $x_1\leqslant x_2<\epsilon(t)$.

网络中数据流的累积函数可用$\mathrm{II}(\mathcal{F})$中的区间描述，流 $A$ 属于区间$\boldsymbol{A}=[A_1,A_2]$意味着在任意时间 $t$，累积函数 $\boldsymbol{A}(t)$的值属于区间 $A(t)=[A_1(t),A_2(t)]$.

对 $\boldsymbol{f},\boldsymbol{g}\in\mathrm{II}(\mathcal{F})$，定义如下运算：

(1)乘法/卷积：$\boldsymbol{f}\ \overline{\bigstar}\ \boldsymbol{g}=\bigcap\limits_{\boldsymbol{h}\in\mathrm{II}(\mathcal{F});\{f\bigstar g\mid f\in f,g\in g\}\subseteq\boldsymbol{h}}\boldsymbol{h}$；

(2)加法：$\boldsymbol{f}\ \overline{\oplus}\ \boldsymbol{g}=\bigcap\limits_{\boldsymbol{h}\in\mathrm{II}(\mathcal{F});\{f\oplus g\mid f\in f,g\in g\}\subseteq\boldsymbol{h}}\boldsymbol{h}$.

可以证明$\{\mathrm{II}(\mathcal{F}),\overline{\oplus},\overline{\bigstar}\}$是可换双子[4]，本文进一步证明$\{\mathrm{II}((\mathcal{F})),\overline{\oplus},\overline{\bigstar}\}$有如下属性：

**命题 1**　对任意 $\boldsymbol{f},\boldsymbol{g}\in\mathrm{II}(\mathcal{F})$，设 $\boldsymbol{f}=[f_1,f_2]$，$\boldsymbol{g}=[g_1,g_2]$，则：

(1)$\boldsymbol{f}\ \overline{\bigstar}\ \boldsymbol{g}=[f_1\bigstar g_1,f_2\bigstar g_2]$；

(2)$\boldsymbol{f}\ \overline{\oplus}\ \boldsymbol{g}=[f_1\oplus g_1,f_2\oplus g_2]$.

**证明**：(1)对任意 $\boldsymbol{f}\in\mathcal{F}$ 可得：

$$f_2\bigstar g_2\geqslant f_2\bigstar g\geqslant f_1\bigstar g\geqslant f_1\bigstar g_1\tag{4}$$

因为 $f_1\bigstar g_1,f_2\bigstar g_2\in\boldsymbol{f}\ \overline{\bigstar}\ \boldsymbol{g}$，所以 $f_1\bigstar g_1$ 是 $\boldsymbol{f}\ \overline{\bigstar}\ \boldsymbol{g}$ 的下确界，$f_2\bigstar g_2$ 是 $\boldsymbol{f}\ \overline{\bigstar}\ \boldsymbol{g}$ 的上确界，于是 $\boldsymbol{f}\ \overline{\bigstar}\ \boldsymbol{g}=[f_1\bigstar g_1,f_2\bigstar g_2]$.

(2)可根据相同过程证明. ■

根据运算$\overline{\oplus}$可以在$\mathrm{II}(\mathcal{F})$中定义一种序关系：$\boldsymbol{f}\leqslant\boldsymbol{g}$ 当且仅当$\boldsymbol{f}\ \overline{\oplus}\ \boldsymbol{g}=\boldsymbol{f}$，即$[f_1,f_2]\leqslant[g_1,g_2]$当且仅当 $f_1\leqslant g_1$ 并且 $f_2\leqslant g_2$.

在确定性网络演算中，映射 $\Pi_f(\boldsymbol{g})=\boldsymbol{f}\bigstar\boldsymbol{g}$ 为对偶余映射并且 $\Pi_f^b(g)=g\oslash f$，这一关系在$\mathrm{II}(\mathcal{F})$中仍然成立.

**定理 3**(区间的反卷积)　设函数区间 $\boldsymbol{f}=[f_1,f_2]\in\mathrm{II}(\mathcal{F})$，定义$\mathrm{II}(\mathcal{F})$到自身的映射 $F_{\boldsymbol{x}}(\boldsymbol{f})=\boldsymbol{x}\ \overline{\bigstar}\boldsymbol{f}$，其中 $\boldsymbol{x}=[x_1,x_2]\in\mathrm{II}(\mathcal{F})$. 则 $F_x$ 是对偶余映射其对偶余为：

$$F_{\boldsymbol{x}}^b(\boldsymbol{f})=[f_1\oslash x_1,(f_2\oslash x_2)\vee(f_1\oslash x_1)]\tag{5}$$

**证明**　容易证明 $F_x$ 是下半连续映射并且 $F(\epsilon)=\boldsymbol{\epsilon}$，所以 $F_{\boldsymbol{x}}$ 是对偶余映射. 根据 $\boldsymbol{x}\ \overline{\bigstar}\boldsymbol{f}\geqslant\boldsymbol{g}$ 可得：

$$x_1\bigstar f_1\geqslant g_1,x_2\bigstar f_2\geqslant g_2\tag{6}$$

于是 $f_2\geqslant f_1\geqslant g_1\ \overline{\oslash}x_1$，$f_2\geqslant g_2\ \overline{\oslash}x_2$. 所以：

$$f_2\geqslant\max\{g_1\oslash x_1,g_2\oslash x_2\}\tag{7}$$

$\boldsymbol{x}\ \overline{\bigstar}\boldsymbol{f}\geqslant\boldsymbol{g}$ 的最小解为区间：

$[g_1\oslash x_1,(g_1\oslash x_1)\vee(g_2\oslash x_2)$

将$[f_1\oslash x_1,(f_2\oslash x_2)\vee(f_1\oslash x_1)]$记作 $\boldsymbol{f}\ \overline{\oslash}\boldsymbol{x}$，称为区间的反卷积运算.

不难证明如果 $\boldsymbol{f},\boldsymbol{g},\boldsymbol{h}\in\mathrm{II}(\mathcal{F})$，则 $\boldsymbol{f}\ \overline{\bigstar}\ \boldsymbol{h}\geqslant\boldsymbol{g}$ 当且仅当$\boldsymbol{f}\geqslant\boldsymbol{g}\ \overline{\bigstar}\ \boldsymbol{h}$.

根据余理论，可以得到区间的卷积和反卷积的性质(证明略).

**推论 1**(区间运算的性质)　如果 $\boldsymbol{f},\boldsymbol{g},\boldsymbol{h}\in\mathrm{II}(\mathcal{F}$，则：

(1)$\boldsymbol{f}\ \overline{\oslash}\boldsymbol{h}\ \overline{\bigstar}\ \boldsymbol{h}\ \overline{\oslash}\boldsymbol{h}=\boldsymbol{f}\ \overline{\oslash}\boldsymbol{h}$；

(2)$\boldsymbol{f}\ \overline{\bigstar}\ \boldsymbol{h}\ \overline{\oslash}\boldsymbol{h}\ \overline{\bigstar}\ \boldsymbol{h}=\boldsymbol{f}\ \overline{\bigstar}\ \boldsymbol{h}$；

(3)$\boldsymbol{f}\ \overline{\bigstar}\ \boldsymbol{h}\ \overline{\oslash}\boldsymbol{h}\leqslant\boldsymbol{f}$，$\boldsymbol{f}\ \overline{\oslash}\boldsymbol{h}\ \overline{\bigstar}\ \boldsymbol{h}\geqslant\boldsymbol{f}$；

(4)$\boldsymbol{f}\ \overline{\oslash}(\boldsymbol{g}\ \overline{\bigstar}\ \boldsymbol{h})=\boldsymbol{f}\ \overline{\oslash}\boldsymbol{g}\ \overline{\oslash}\boldsymbol{h}$；

(5)$(\boldsymbol{f}\ \overline{\bigstar}\ \boldsymbol{g})\overline{\oslash}\boldsymbol{h}=\boldsymbol{g}\ \overline{\oslash}(\boldsymbol{f}\ \overline{\oslash}\boldsymbol{h})$.

## 5　区间网络演算

### 5.1　区间到达曲线和区间服务曲线

为了提出区间网络演算，需要定义区间到达曲线和区间服务曲线. 首先在$\mathrm{II}(\mathcal{F})$中定义区间的区间到达曲线.

**定义 5**(区间的区间到达曲线)　设 $\boldsymbol{A}=[A_1,A_2]$和

$\boldsymbol{f}=[f_1,f_2]$都是$\mathrm{II}(\mathcal{F})$中的区间,则 $\boldsymbol{A}$ 具有区间到达曲线$f$ 当且仅当$\boldsymbol{A}\,\overline{\bigstar}\,\boldsymbol{f}\geqslant\boldsymbol{A}$.

定义 5 定义了区间的区间到达曲线,这个概念脱离网络中的流而独立存在,表达了区间之间的一种约束关系.网络演算关心的对象是数据流,因此要将区间与数据流联系在一起,这一任务通过以下概念完成.

**定义 6**(双子元素的生成区间) $\boldsymbol{A}$ 为双子$\{\mathcal{D},\oplus,\otimes\}$中的任意元素,如果存在区间 $\boldsymbol{A}\in\mathrm{II}(\mathcal{D})$,$A\in\boldsymbol{A}$,则称区间 $\boldsymbol{A}$ 为 $A$ 的活动区间.称 $A$ 的所有活动区间的交为 $A$ 的生成区间.

**定义 7**(数据流的到达区间) 设数据流 $A$ 的生成区间为$\boldsymbol{A}=[A_1,A_2]$,如果 $\boldsymbol{A}$ 有到达区间$\boldsymbol{f}$,则称流 $A$ 有到达区间 $\boldsymbol{f}$.

对到达区间的概念可进行如下讨论:

(1)$A$ 有到达区间$\boldsymbol{f}$ 意味着 $A_1\leqslant A_1\bigstar f_1$,$A_2\leqslant A_2\bigstar f_2$ 同时成立;

(2)如果流 $A_1$ 有到达曲线 $f_1\in\mathcal{F}$,并且 $A_2$ 有到达曲线 $f_2\in\mathcal{F}$,则 $A$ 有区间到达曲线$[f_1\oplus f_2,f_1\vee f_2]$.

**定义 8**(服务器的区间服务曲线) 设 $S$ 为服务器,输入流 $A$ 的生成区间为$\boldsymbol{A}=[A_1,A_2]$,相应的输出流 $D$ 的生成区间为$\boldsymbol{D}=[D_1,D_2]$,如果存在区间 $\boldsymbol{S}=[S_1,S_2]\in\mathrm{II}(\mathcal{F})_0$,使得:

$$\boldsymbol{D}\geqslant\boldsymbol{A}\bigstar\boldsymbol{S} \tag{8}$$

则称服务器 $S$ 提供区间服务曲线 $\boldsymbol{S}$.

对区间服务曲线也可进行如下讨论:

(1)如输入为确定流,则输出流的生成区间的上下界代表了最大可能输出的上界和最小可能输出的上界;

(2)如果服务器能提供的最小服务曲线为 $S_1$,最大服务曲线为 $S_2$,则必有 $S_1\leqslant S_2$.这一点可用反证法证明:如不然,则 $S_1\oplus S_2\leqslant S_1$ 与 $S_1\vee S_2\geqslant S_2$ 都是可能的服务曲线,这与 $S_1$ 最小以及 $S_2$ 最大矛盾.

下面给出一个服务曲线的例子,如图 1 所示,服务器 $S$ 的服务速率在 1Mbpms 到 3Mbpms 之间,服务器的延迟固定为 10ms,则该服务器提供区间服务曲线:

$$\boldsymbol{S}=[(t-10)^+,3(t-10)^+] \tag{9}$$

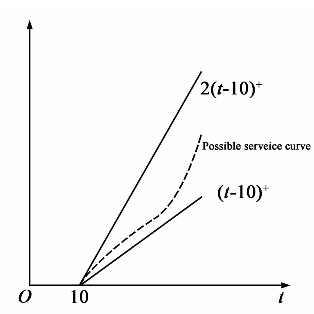


图1 区间服务曲线示例

在区间 $\boldsymbol{S}$ 中的所有广义增函数都有可能是 $S$ 在实际中提供的服务曲线.

## 5.2 区间演算的基本定理

本节推导区间演算的性能定理,首先要证明在$\mathrm{II}(\mathcal{F})$中如下不等式成立:

**引理 1** 设 $\boldsymbol{f},\boldsymbol{g},\boldsymbol{h}\in\mathrm{II}(\mathcal{F})$,则:

$$(\boldsymbol{f}\,\overline{\bigstar}\,\boldsymbol{h})\,\overline{\oslash}\,(\boldsymbol{g}\,\overline{\bigstar}\,\boldsymbol{h})\leqslant(\boldsymbol{f}\,\overline{\oslash}\,\boldsymbol{g}) \tag{10}$$

**证明** 根据推论 1 可得

$$\boldsymbol{f}\,\overline{\oslash}\,\boldsymbol{g}\,\overline{\bigstar}\,\boldsymbol{g}\geqslant\boldsymbol{f} \tag{11}$$

于是:

$$(\boldsymbol{f}\,\overline{\oslash}\,\boldsymbol{g})\,\overline{\bigstar}\,(\boldsymbol{g}\,\overline{\bigstar}\,\boldsymbol{h})\geqslant\boldsymbol{f}\,\overline{\bigstar}\,\boldsymbol{h} \tag{12}$$

所以:

$$\boldsymbol{f}\,\overline{\oslash}\,\boldsymbol{g}\geqslant(\boldsymbol{f}\,\overline{\bigstar}\,\boldsymbol{h})\,\overline{\oslash}\,(\boldsymbol{g}\,\overline{\bigstar}\,\boldsymbol{h})$$ ■

根据这一引理,可以得到区间服务器的输入输出特性.

**定理 4**(输出流的区间到达曲线) 具有区间到达曲线 $\boldsymbol{f}$ 的流通过一个提供区间服务曲线$\boldsymbol{S}$ 的服务器,输出流有区间到达曲线 $\boldsymbol{f}\,\overline{\oslash}\,\boldsymbol{S}$.

**证明** 显然对于输入输出流的生成区间 $\boldsymbol{A}$ 和$\boldsymbol{D}$,$\boldsymbol{A}\geqslant\boldsymbol{D}$.根据区间到达曲线和区间服务曲线的定义可得:

$$\boldsymbol{A}\,\overline{\bigstar}\,\boldsymbol{f}\geqslant\boldsymbol{A}\geqslant\boldsymbol{D}\geqslant\boldsymbol{A}\,\overline{\bigstar}\,\boldsymbol{S} \tag{13}$$

于是根据引理 1:

$$\boldsymbol{D}\,\overline{\oslash}\,\boldsymbol{D}\leqslant\boldsymbol{A}\,\overline{\oslash}\,\boldsymbol{D}\leqslant(\boldsymbol{A}\,\overline{\bigstar}\,\boldsymbol{f})\,\overline{\oslash}\,(\boldsymbol{A}\,\overline{\bigstar}\,\boldsymbol{S})\leqslant\boldsymbol{f}\,\overline{\oslash}\,\boldsymbol{S} \tag{14}$$

根据余映射的定义可得:

$$\boldsymbol{D}\leqslant(\boldsymbol{f}\,\overline{\oslash}\,\boldsymbol{S})\,\overline{\bigstar}\,\boldsymbol{D} \tag{15}$$

即输出有区间到达曲线 $\boldsymbol{f}\,\overline{\oslash}\,\boldsymbol{S}$. ■

**定理 5**(积压) 具有区间到达曲线 $\boldsymbol{f}$ 的流通过提供区间服务曲线 $\boldsymbol{S}$ 的服务器,设服务器积压的生成区间为 $\boldsymbol{B}=[b_1,b_2]$,则:

$$\boldsymbol{B}\leqslant(\boldsymbol{f}\,\overline{\oslash}\,\boldsymbol{S})(\boldsymbol{0})$$

**证明** 根据定理 4 的证明过程可得:

$$\boldsymbol{A}\,\overline{\oslash}\,\boldsymbol{D}\leqslant\boldsymbol{f}\,\overline{\oslash}\,\boldsymbol{S} \tag{16}$$

在 $t=0$ 时$(\boldsymbol{A}\,\overline{\oslash}\,\boldsymbol{D})(\boldsymbol{0})\leqslant(\boldsymbol{f}\,\overline{\oslash}\,\boldsymbol{S})(\boldsymbol{0})$以及 $\boldsymbol{B}=(\boldsymbol{A}\,\overline{\oslash}\,\boldsymbol{D})(\boldsymbol{0})$. ■

**定理 6**(延迟) 具有区间到达曲线 $f$ 的流通过提供区间服务曲线 $\boldsymbol{S}$ 的服务器,设最大延迟的生成区间为 $\boldsymbol{D}=[d_1,d_2]$,则:

$$\boldsymbol{D}\leqslant\inf\{\boldsymbol{d}:\boldsymbol{d}\geqslant 0,(\boldsymbol{f}\,\overline{\oslash}\,\boldsymbol{S})(-\boldsymbol{d})\leqslant 0\} \tag{17}$$

**证明** 因为 $\boldsymbol{A}\,\overline{\oslash}\,\boldsymbol{D}\leqslant\boldsymbol{f}\,\overline{\oslash}\,\boldsymbol{S}$,于是对某个实数区间 $\boldsymbol{k}\geqslant[0,0]$,如果$(\boldsymbol{f}\,\overline{\oslash}\,\boldsymbol{S})\leqslant 0$ 则$(\boldsymbol{A}\,\overline{\oslash}\,\boldsymbol{D})(-\boldsymbol{k})\leqslant[0,0]$.令:

$$A=\{\boldsymbol{d}:\boldsymbol{d}\geqslant[0,0],(\boldsymbol{f}\,\overline{\oslash}\,\boldsymbol{S})(-\boldsymbol{d})\leqslant[0,0]\},$$

$$B=\{\boldsymbol{d}:\boldsymbol{d}\geqslant[0,0],(\boldsymbol{A}\,\overline{\oslash}\,\boldsymbol{D})(-\boldsymbol{d})\leqslant[0,0]\}.$$

则 $A\subseteq B$,从而$\inf\{A\}\geqslant\inf\{B\}$,$\inf\{B\}$的表达式为:

$$\inf\{\boldsymbol{d},\boldsymbol{A}(\boldsymbol{t}-\boldsymbol{d})\}\leqslant\boldsymbol{D}(\boldsymbol{t}) \tag{18}$$

恰为最大延迟的表达式,从而结论得证. ■

图 2 描述了区间演算中关于延迟和积压的基本定理.

**定理 7**(串联网络元素) 两个网络元素 $S_1$,$S_2$ 分

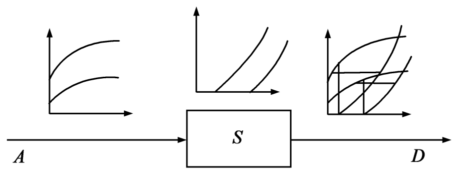


**图2　区间网络演算中的延迟与积压界**

别提供区间服务曲线 $\boldsymbol{s}_1,\boldsymbol{s}_2$，则两个网络元素串联而成的系统提供区间服务曲线 $\boldsymbol{s}_1 \overline{\bigstar} \boldsymbol{s}_2$.

**证明**　根据区间卷积的单调性可证明结论. ■

## 6　区间演算的应用

本节用一个例子解释区间网络演算在计算机网络分析中的应用.

**定理 8**(区间演算的应用)　固定速率的流，带有随机突发 $\boldsymbol{b}\in[0,b]$，通过提供确定性服务曲线 $s=c(t-D)^+$ 的服务器，根据区间演算可以得到：

(1)如果系统的积压的生成区间为 $\boldsymbol{B}$，则 $\boldsymbol{B}\leqslant\left[D, D+\frac{b}{c}\right]$；

(2)如果系统的延迟的生成区间为 $\boldsymbol{D}$，则 $\boldsymbol{D}\leqslant[rD, rD+b]$；

(3)输出流具有如下区间到达曲线：

$$\boldsymbol{S}=[f_1 \oslash s, f_2 \oslash s] \tag{19}$$

**证明：**根据图 3 可知延迟区间界为$[D,d_2]$，而积压区间界为$[b_1,b_2]$并且

$$d_2=D+\frac{b}{c};\ b_1=rD,\ b_2=rD+b \tag{20}$$

(3)可根据定理 4 证明. ■

如果服务器是一个非确定性服务器，区间服务曲线为：

$$\boldsymbol{S}=[c(t-D_1)^+, c(t-D_2)^+] \tag{21}$$

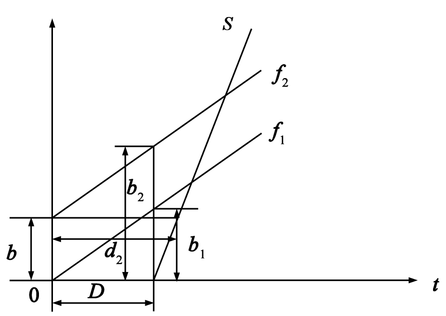


**图3　非确定流通过确定性服务器**

这时可以用相同的方法得出结果，如图 4 所描述，可以得到延迟的区间上界为：

$$\left[D_2+\frac{b}{c}, D_2+\frac{b}{c}\vee D_1\right] \tag{22}$$

积压的区间上界为：

$$[cD_1, cD_2+b\vee cD_1] \tag{23}$$

输出流的区间到达曲线为：

$$\boldsymbol{S}=[f_1 \oslash s_1, f_1 \oslash s_1 \vee f_2 \oslash s_2] \tag{24}$$

**说明**(与确定性及随机网络演算的比较)　如果存在函数 $f$ 使得 $\Pr\{x\leqslant b\}=f(b)$对所有 $b\in\boldsymbol{b}$ 成立，则可以用随机网络演算处理定理 7 的问题. 数据流可以被如下随机到达曲线描述[1]：

$$\Pr\{\sup_{0\leqslant s\leqslant t}\{A(s,t)-r(t-s)\}\geqslant b\}\leqslant f(b) \tag{25}$$

随机演算的缺点在于 $f$ 的确切表达式的通常比较复杂，因此实用性稍差.

本例也可以用确定性网络演算分析，确定性到达曲线 $rt+b$，但得到的结论不如区间演算精确.

根据以上讨论不难得出分析性能参数时，三种方法的区别如下：

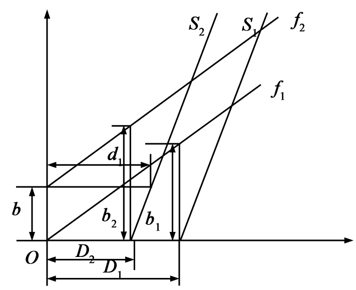


**图4　非确定流通过非确定服务器**

(1)随机网络演算考虑了 $x$ 的所有可能取值，因此复杂度最高；

(2)确定性网络演算只考虑在最坏情况下的 $x$ 的可能取值，因此复杂度最低；

(3)区间网络演算考虑最好与最坏两种情况下 $x$ 的可能取值，因此复杂度介于确定性网络演算与随机网络演算之间，

## 7　总结

本文提出了一种基于广义增函数区间扩展的网络演算理论，区间网络演算采用了幂等区间分析的数学理论，可以计算性能参数的生成区间的区间界，因为区间可以描述不确定参数，所以区间网络演算也可以称为非确定性网络演算. 本文采用的研究方法也可以用于其它基于双子的网络演算理论.

下一步研究可以将区间演算与随机网络演算相结合，这样就可以得到更为精确的对流的描述. 如对于 $\mathrm{II}(\mathcal{F})$中的区间，可以定义其绝对值 $|\boldsymbol{f}|=\sup_t\{f_2(t)-f_1(t)\}$，然后定义到达曲线 $\Pr\{|f_1,f_2|\leqslant b\}=h(b)$，在这个到达曲线定义的基础上再进一步研究.


**参考文献：**

[1] Y Jiang. A basic stochastic network calculus[J]. Acm Sigcomm Computer Communication Review, 2006, 36(4): 123 – 134.

[2] R E Moore. On the stability of linear recurrence equations with arbitrary time lags[J]. Journal of Computer and System Science, 1970, 4(4): 377 – 388.

[3] L Jaulin, M Kieffer, et al. Applied Interval Analysis with Ex-

amples in Parameter and State Estimation [M]. London: Springer, 2001.
[4] G L Litvinov, A N Sobolevskii. Idempotent interval analysis and optimization problems [J]. Reliable Computing, 2001, 7 (5): 353 – 377.
[5] M Lhommeau, L Hardouin, et al. Interval analysis and dioid: application to robust controller design for timed event graphs [J]. Automatica, .2004, 40(11): 1923 – 1930.
[6] C S Chang. Performance Guarantees in Communication Networks [M]. Springer, 2000.
[7] J Y L Boudec, P Thiran. Network calculus: A Theory of Deterministic Queuing System for the Internet [M]. London: Springer-Verlag, 2004.
[8] M Fidler, S Recker. Conjugate network calculus: a dual approach applying the Legendre transform [J]. Computer Networks, 2006, 50(8): 1026 – 1039.
[9] X Jiang. New perspectives on network calculus [J]. Acm Sigmetrics Performance Evaluation Review, 2008, 37(1): 95 – 97.
[10] F Baccelli, G Cohen, et al. Synchronization and Linearity, An Algebra for Discrete Event Systems [M]. West Sussex, Great Britain: John Wiley and Sons, 1992.
[11] 张信明,陈国良,等.基于网络演算的流量整形模型[J].软件学报,2002,13(12):2225 – 2230.
Zhang Xinming, Cheng guoliang, et al. A traffic shaping framework based on network calculus [J]. Journal of Software, 2002, 13(12): 2225 – 2230. (in Chinese)
[12] 王子君,许维胜,等.控制网络的确定性延迟演算理论研究[J].电子学报,2006,34(2):380 – 384.
Wang Zijun, Xu Weisheng, et al. Research on the deterministic delay calculus theory of control networks [J]. Acta Electronica Sinica, 2006, 34(2): 380 – 384. (in Chinese)
[13] 张信明,陈国良,等.基于网络演算计算保证服务端到端延迟上界[J].软件学报,2002,12(6):889 – 893.
Zhang Xinming, Cheng Guoliang, et al. On the computation of end-to-end delay bound in guaranteed service by network calculus [J]. Journal of Software, 2002, 12(6): 889 – 893. (in Chinese)
[14] 陈昕,周拥军,等.AFDX 协议性能分析及调度算法研究[J].电子学报,2009,37(5):1000 – 1005.
Chen xin, Zhou Yongjun, et al. Performance analysis of AFDX protocol and scheduling algorithm [J]. Acta Electronica Sinica, 2009, 37(5): 1000 – 1005. (in Chinese)
[15] 张连明,陈志刚,等.基于分形整形器 GPS 系统性能确定上界研究[J].通信学报,2007,28(2):51 – 57.
Zhang Lianming, Chen Zhigang, et al. Deterministic upper bounds on performance of generalized processor sharing based on fractal regulators [J]. Journal on Communications, 2007, 28 (2): 51 – 57. (in Chinese)

## 作者简介:

**樊葆华** 男,1977 年生于内蒙古呼和浩特,国防科学技术大学计算机学院博士研究生,研究方向为计算机网络建模、网络演算等.
E-mail: fanbaohua@nudt.edu.cn

**张鹤颖** 女,1976 年生于陕西西安.国防科学技术技术大学计算机学院助理研究员,研究方向为计算机网络拥塞控制,互连网络等.

**窦文华** 男,1946 年生于山西平定,国防科技大学计算机学院教授、博士生导师,主要研究方向为高速网络互连,计算机体系结构等.