

L1 投影问题的分裂 Bregman 方法

李亚峰^{1,2}, 冯象初¹

(1. 西安电子科技大学应用数学系, 陕西西安 710071; 2. 宝鸡文理学院计算机科学系, 陕西宝鸡 721013)

摘 要: 为了解决一般的 L1 投影问题, 提出交替分裂 Bregman L1 投影算法, 并给出了算法的收敛性分析和证明. 该算法适用于宽泛的 L1 投影的线性逆问题, 以全变差投影为例, 该算法比目前所提出的对偶投影算法收敛速度更快, 图像恢复的质量更高. 通过图像去噪、去模糊和修补的实验结果表明, 相比于目前的对偶投影算法, 不论是信噪比还是视觉效果, 该算法的结果更优.

关键词: L1 投影; 分裂 Bregman; 线性逆问题; 全变差; 图像去噪; 图像去模糊; 图像修补

中图分类号: TN911 **文献标识码:** A **文章编号:** 0372-2112 (2010) 11-2471-05

The Split Bregman Method for L1 Projection Problems

LI Ya-feng^{1,2}, FENG Xiang-chu¹

(1. Department of Applied Mathematics, Xidian University, Xi'an, Shaanxi 710071, China;

2. Department of Computer Science, Baoji University of Arts and Science, Baoji, Shaanxi 721013, China)

Abstract: In order to solve general L1 projection problems, this paper proposes Alternating Split Bregman L1 projection algorithm. The convergence of the iteration scheme is analyzed and proved. The algorithm can solve a very broad class of L1-projection problems. Total variation projection as an example, using the proposed algorithm, we can get faster convergence rate and better result of image restoration. Numerical results show that our algorithm is better than state of the art TV projection method (Dual projection algorithm) to solve denoising, deconvolution and inpainting problems.

Key words: L1 projection; split Bregman; linear inverse problems; total variation; denoising; deconvolution; inpainting

1 引言

ROF 模型^[1]能较好的去除噪声并保持图像的边缘. 该模型用全变差作为正则项, 解一个凸优化问题

$$\min_{f \in BV(\Omega)} |f|_{TV} + \frac{\lambda}{2} \|f - f_0\|^2 \quad (1)$$

这里 f_0 为原始图像, $|f|_{TV}$ 是 f 的 BV 半范, 参数 λ 须匹配于噪声水平. 自 ROF 模型提出后有大量的工作都围绕着这一模型展开^[2~5]. 在算法方面, 该模型有许多的算法例如 Chambolle^[6]的投影算法. 在模型方面, 式(1)中全变差正则项和数值保真项均作为优化问题的目标函数给出, 其本质是便于求解如下的约束优化问题

$$\min_{f \in BV(\Omega)} |f|_{TV} \quad \text{s.t.} \quad \|f - f_0\|^2 \leq \delta$$

最近, 文献[7]的作者发现优化问题

$$\min_{|f|_n \leq \tau} \|f - f_0\|^2 \quad (2)$$

在某些情形下比 ROF 模型更具有优势, 除了能够解决更具挑战性的逆问题, 还可以用于纹理合成. 在文献[7]中, 作者提出了一个对偶的投影算法, 其本质是在对偶向量域求解一个一阶非光滑优化问题.

目前, 由于压缩感知 (“Compressed Sensing”^[8]) 的出现, L1 正则化的优化问题吸引了众多学者的注意. Tom Goldstein 和 Stanley Osher 在文献[9]中提出了 L1 正则化的分裂 Bregman 方法. 尽管原文没有给出算法的收敛性证明, 但在实际应用中, 由于该算法收敛速度快、重构效果好, 已成为学者们所关注的热点.

本文讨论一般的 L1 投影优化问题:

$$\min_{|Lf|_1 \leq \tau} \|Af - f_0\|^2 \quad (3)$$

其中 A 与 L 为两个线性算子, τ 为投影球的半径. 利用分裂 Bregman 方法的思想, 本文给出了 L1 投影分裂 Bregman 算法, 并且基于 Douglas-Rachford-Splitting 算法^[10], 给出了新算法的收敛性分析和证明.

2 L1 投影问题的分裂 Bregman 算法

一幅 $N = n \times n$ 的图像可以用 R^N 的向量表示, 在此情形下, 问题(3)可以写为:

$$\min_{f \in R^N, |Lf|_1 \leq \tau} \|Af - f_0\|^2 \quad (4)$$

引入一个新的变量 $d = Lf$, 问题(4)等价于约束优化问

题:

$$\min_{f \in R^n, \|d\|_1 \leq \tau} \|Af - f_0\|^2 \quad \text{s.t.} \quad d = Lf \quad (5)$$

增加 $L2$ 惩罚项得到

$$\min_{f \in R^n, \|d\|_1 \leq \tau} \frac{1}{2} \|Af - f_0\|^2 + \frac{\lambda}{2} \|d - Lf\|^2$$

这是式(5)的近似. 为了满足约束条件, λ 必须取很大, 但这又会产生计算稳定性问题. 为此定义凸泛函

$$E(f, d) = \chi\{\|d\|_1 \leq \tau\} + \frac{1}{2} \|Af - f_0\|^2$$

其中 $\chi\{\|d\|_1 \leq \tau\}$ 是 $C = \{d \mid \|d\|_1 \leq \tau\}$ 的指示函数, 即

$$\chi\{\|\cdot\|_1 \leq \tau\} = \begin{cases} 0, & \text{如果 } \|d\|_1 \leq \tau \\ +\infty, & \text{否则} \end{cases}$$

定义凸泛函 $E(f, d)$ 的 Bregman 距离

$$D_E^k(f, d, f^k, d^k) = E(f, d) - \langle P_f^k, f - f^k \rangle + \langle P_d^k, d - d^k \rangle$$

这里 P_f 和 P_d 是 $E(f, d)$ 分别关于 f 和 d 的次梯度. 考虑下面变分序列的优化问题:

$$(f^{(k+1)}, d^{(k+1)}) = \min_{f, d} E(f, d)$$

$$- \langle P_f^k, f - f^k \rangle + \langle P_d^k, d - d^k \rangle + \frac{\lambda}{2} \|d - Lf\|^2$$

如果记 $v_f^k = \frac{P_f^k}{\lambda}$, $v_d^k = \frac{P_d^k}{\lambda}$ 和 $v_f^0 = v_d^0 = 0$, 经过简化并舍掉常数项, 上式可以写为

$$\begin{cases} (f^{(k+1)}, d^{(k+1)}) = \min_{f, \|d\|_1 \leq \tau} \frac{1}{2} \|Af - f_0\|^2 + \frac{\lambda}{2} \|d - Lf - b^k\|^2 \\ b^{(k+1)} = b^{(k)} + Lf^{(k+1)} - d^{(k+1)} \end{cases} \quad (6)$$

可以证明上述无约束优化问题(6)的 Bregman 迭代收敛到约束优化问题(5)的解^[9]. 本文使用下面的算法求解问题(6), 然后证明该算法收敛到原问题的解.

算法 ($L1$ 投影的交替分裂 Bregman 算法)

$$\text{第一步: } f^{(k+1)} = \arg \min_{f \in R^n} \frac{1}{2} \|Af - f_0\|^2 + \frac{\lambda}{2} \|d^{(k)} - Lf - b^{(k)}\|^2$$

$$\text{第二步: } d^{(k+1)} = \arg \min_{\|d\|_1 \leq \tau} \frac{\lambda}{2} \|d - Lf^{(k+1)} - b^{(k+1)}\|^2 \quad (7)$$

$$\text{第三步: } b^{(k+1)} = b^{(k)} + Lf^{(k+1)} - d^{(k+1)}$$

$$\text{停止标准: } |f^{(k+1)} - f^{(k)}| \leq \epsilon$$

第一步是可微的优化问题, 可以使用例如 Fourier 变换、Gauss-Seidel 迭代或共轭梯度法来求解.

第二步是一个直接的投影问题, 对于给定的 $\tau < \|Lf_0\|_1$ (避免平凡解), 都可以找到一个 Lagrange 乘子 $\mu(\tau)$ 使得

$$\arg \min_{\|d\|_1 \leq \tau} \frac{\lambda}{2} \|d - Lf^{(k+1)} - b^{(k+1)}\|^2$$

$$= \arg \min_d \|d - Lf^{(k+1)} - b^{(k+1)}\|^2 + \mu(\tau) \|d\|_1$$

事实上 τ 与 $\mu(\tau)$ 的对应是一个双射^[7]. 以 L 为梯度算

子 ∇ 为例 ($\|L \cdot\|_1$ 是 BV 半范), 从小波的阈值算法可以直接推广到梯度向量域的阈值算法^[7,11], 这里写为离散形式, 记

$$\begin{aligned} (\nabla f^{(k+1)} - b^{(k+1)})[i, j] &= u[i, j] \\ &= (u_1, u_2)[i, j] \in R^{N \times 2} \end{aligned}$$

这个阈值算法可以简单的描述如下:

$$\begin{aligned} \arg \min_d \|d - \nabla f^{(k+1)} - b^{(k+1)}\|^2 + \mu(\tau) \|d\|_1 \\ &= S_{\mu(\tau)}(u_1, u_2)[i, j] \\ &= \max\left(0, 1 - \frac{\mu(\tau)}{|u[i, j]|}\right) u[i, j] \end{aligned} \quad (8)$$

其中 $|u[i, j]| = \sqrt{u_1^2[i, j] + u_2^2[i, j]}$, $\mu(\tau) = p[t] + (p[t+1] - p[t]) \frac{\tilde{p}[t+1] - \tau}{p[t+1] - p[t]}$, 这里 $p[0] \leq p[1] \leq \dots \leq p[N-1]$ 是 $\{u[i, j]\}_{i,j=0}^{n-1}$ 的排序, 即 $\{p[t]\}_{t=0}^{N-1} = \{u[i, j]\}_{i,j=0}^{n-1}$, $\tilde{p}[k] = \sum_{t=k+1}^{N-1} p[t]$, 式(8)中的 t 满足 $D[t+1] \leq \tau < D[t]$, 可以直接验证式(8)的阈值算子满足约束条件 $|S_{\mu(\tau)}|_1 = \tau$, 因此第二步的优化问题是直接使用式(8)的阈值算子实现.

以上分析表明, 算法(7)形式简单、实现容易, 从而保证了 Bregman 迭代的快速收敛.

3 收敛性分析与证明

定理 1 假设 (f^*, d^*, b^*) 是算法式(7)的不动点, 那么 (f^*, d^*) 是优化问题(5)的解, 它也是原始投影问题(4)的解.

证明: 由假设 (f^*, d^*, b^*) 是算法(7)的不动点, 由第三步得 (f^*, d^*) 满足 $Lf^* = d^*$, 即 (f^*, d^*) 满足优化问题(5)的约束条件. 如果 $(\tilde{f}, \tilde{d}, \tilde{b})$ 是原始问题(4)的解, 则 $L\tilde{f} = \tilde{d}$, 从算法(7)第二步和第三步, 可以分别得到下面的不等式

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \|Af^* - f_0\|^2 + \frac{\lambda}{2} \|d^* - Lf^* - b^*\|^2 \\ \leq \frac{1}{2} \|\tilde{A}\tilde{f} - f_0\|^2 + \frac{\lambda}{2} \|d^* - \tilde{L}\tilde{f} - b^*\|^2 \end{aligned}$$

与

$$\begin{aligned} \chi\{\|d^*\|_1 \leq \tau\} + \frac{\lambda}{2} \|d^* - Lf^* - b^*\|^2 \\ \leq \chi\{\|\tilde{d}\|_1 \leq \tau\} + \frac{\lambda}{2} \|\tilde{d} - Lf^* - b^*\|^2 \end{aligned}$$

两个不等式的和为

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \|Af^* - f_0\|^2 + \chi\{\|d^*\|_1 \leq \tau\} + \lambda \|d^* - Lf^* - b^*\|^2 \\ \leq \frac{1}{2} \|\tilde{A}\tilde{f} - f_0\|^2 + \chi\{\|\tilde{d}\|_1 \leq \tau\} + \frac{\lambda}{2} \|d^* - \tilde{L}\tilde{f} - b^*\|^2 \\ + \frac{\lambda}{2} \|\tilde{d} - Lf^* - b^*\|^2 \end{aligned}$$

记 $E(f, d) = \chi\{\|d\|_1 \leq \tau\} + \frac{1}{2} \|Af - f_0\|^2$, 使用 $Lf^* =$

$d^*, \tilde{f} = \tilde{d}$, 上面的不等式变为

$$\begin{aligned} & E(f^*, d^*) + \lambda \|b^*\|^2 \\ & \leq E(\tilde{f}, \tilde{d}) + \lambda (\|d^* - \tilde{d}\|^2 + \|b^*\|^2) \end{aligned}$$

所以

$$E(f^*, d^*) \leq E(\tilde{f}, \tilde{d}) + \lambda \|d^* - \tilde{d}\|^2$$

这里 (f^*, d^*) 与 λ 无关, 由 λ 的任意性, 故 $E(f^*, d^*) \leq E(\tilde{f}, \tilde{d})$, 因此 (f^*, d^*) 是问题(5)的解, 也是原问题的解, 从而完成了这个定理的证明。□

下面证明对任意的初始值 $(f^{(0)}, d^{(0)}, b^{(0)})$, 迭代式(7)收敛到不动点. 令 H 为 Hilbert 空间, $\Phi: H \rightarrow 2^H, \Psi: H \rightarrow 2^H$ 为两个集值映射并且是极大单调算子, 也就是

$$J_\Phi := (I + A)^{-1}, J_\Psi := (I + B)^{-1} \text{ 是非膨胀的, 满足:}$$

对任意的 $x, y \in H$, 有

$$\|J_\Phi x - J_\Phi y\| \leq \|x - y\|$$

使用以上符号, 有下面的引理^[10].

引理 1 令 $\Phi, \Psi: H \rightarrow 2^H$ 是两个极大单调算子, 假设方程 $0 \in \Phi(\hat{s}) + \Psi(\hat{s})$ 的解存在, 那么对于任何初始值 $t^{(0)}, s^{(0)}$ 与任意的 $\lambda > 0$, 下面的 Douglas-Rachford-Splitting 算法弱收敛到 (\hat{s}, \hat{t}) .

$$\begin{cases} t^{(k+1)} = J_{\lambda\Phi}(2s^{(k)} - t^{(k)}) + t^{(k)} - s^{(k)} \\ s^{(k+1)} = J_{\lambda\Psi}(t^{(k+1)}) \end{cases}$$

并且 $\hat{s} = J_{\lambda\Psi}(\hat{t})$ 满足方程 $0 \in \Phi(\hat{s}) + \Psi(\hat{s})$. 注意到如果 H 为有限维, 则序列 $(s^k)_{k \in \mathbb{N}}$ 收敛到 \hat{s} .

定理 2 对任意的初始值 $(f^{(0)}, d^{(0)}, b^{(0)})$, 算法(7)收敛到不动点 (f^*, d^*, b^*) .

证明 若证明了对任意的初始值 $(f^{(0)}, d^{(0)}, b^{(0)})$ 算法(7)收敛到不动点 (f^*, d^*, b^*) , 由定理 1 得到 (f^*, d^*) 是原始投影问题(4)的解. 因此只需证明对任意的初始值 $(f^{(0)}, d^{(0)}, b^{(0)})$, $(f^{(k)}, d^{(k)}, b^{(k)})$ 收敛到 (f^*, d^*, b^*) . 算法(7)可以被理解为 Douglas-Rachford-Splitting 算法的特殊情形, 从算法式(7)中可以选取到合适的算子 Φ, Ψ 为最大单调算子, 这样算法式(7)与 Douglas-Rachford-Splitting 算法一致, 然后使用引理 1, 得到算法式(7)的收敛性. 这里选取 Φ 与 Ψ 的方法与文献[12]中的定理 3.1 完全类似, 这里不再重复, 更多细节参看文献[12, 13]. □

4 数值实验

在这一节中, 我们用提出的 $L1$ 投影的分裂 Bregman 算法与文献[7]中的对偶投影算法进行了图像去噪, 去模糊和修补的比较实验. 模型(4)的算子 L 取为梯度算子 ∇ .

首先将模型(4)应用于 Lena 图像去噪, 噪声为零均值的高斯白噪声, 模型(4)中的算子 A 为单位算子. 参数 τ (投影 TV 球的半径)的取值为 $\frac{|f_0|_{TV}}{1.2} \sim \frac{|f_0|_{TV}}{2}$ 时效

果较优, 这里 f_0 为初始图像. 在实验中, 两种算法的参数 τ 均取为 $\frac{|f_0|_{TV}}{1.6}$. 图 1(c), (d) 为两种算法同样迭代 30 次的去噪结果. 从恢复的 Lena 图像细节上可以看到, 本文算法的结果稍好于文献[7]的结果. 图 2 给出了迭代次数的信噪比变化曲线图.

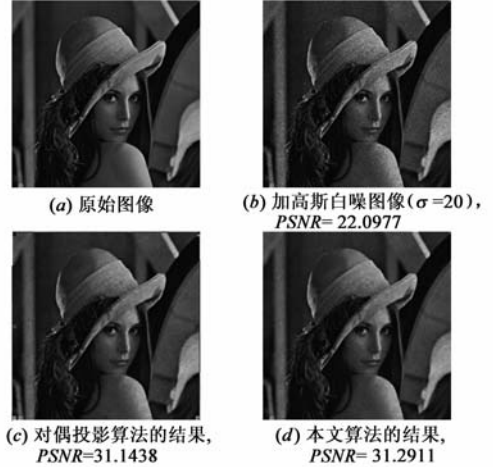


图 1 图像Lena(512×512)的去噪实验

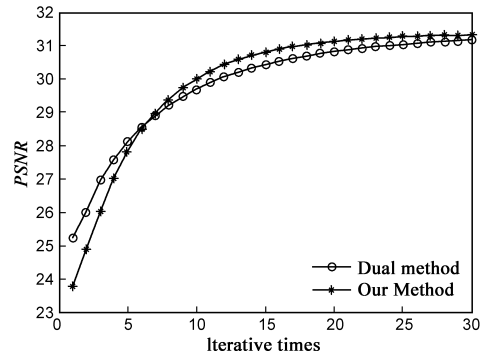


图 2 图像Lena的去噪实验, 信噪比随迭代次数的变化曲线

在对图像 Lamp 去模糊实验中, 两种算法的参数 τ 均取为 $\frac{|f_0|_{TV}}{2}$, f_0 为初始图像, 模型(4)中的算子 A 为聚焦不准的模糊算子, 模糊核半径为 $r = 6$, 并加入标准方差 $\sigma = 5$ 的高斯白噪声. 两种算法同样迭代 30 次. 图 3(c), (d) 为实验结果的比较, 视觉上本文算法效果明显更好. 图 4 为迭代次数的信噪比变化曲线图, 信噪比提高了 1.8161dB.

在对图像 Boat 的修补的实验中, 图像随机丢失 50% 的像素, 两种算法的参数 τ 均取为 $\frac{|f_0|_{TV}}{3}$, 同样迭代 30 次, 图 5(c), (d) 为实验结果的比较, 本文算法提高 0.7984dB. 图 4 为迭代次数的信噪比变化曲线图.

对于图像上添加字符和集中丢失像素两种情形的图像修补有类似的试验结果, 本文算法能够提高 0.5 ~ 1.2dB.

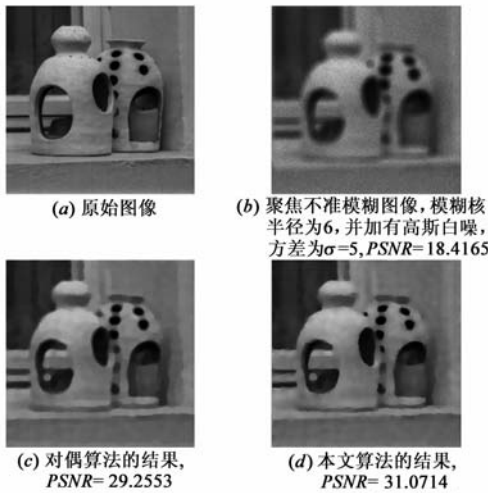


图 3 图像Lamp (256×256) 的去模糊实验

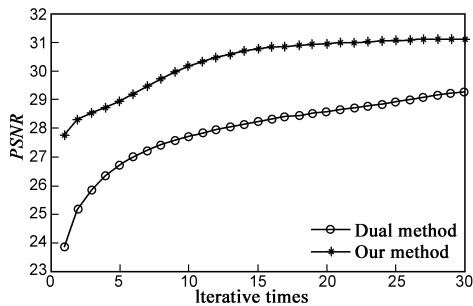


图 4 图像Lamp的去模糊实验, 信噪比随迭代次数的变化曲线

为了更好地比较本文算法与对偶算法的图像恢复结果,以峰值信噪比(PSNR/dB)为性能指标,表1,2和3给出了更多的实验数据.表1为两种算法对不同噪声方差,不同的测试图像的去噪实验数据比较.表2为去模糊实验数据,对不同的模糊核,分为带噪和不带噪两种情形进行比较.表2中模糊核半径记为 r ,白噪声的标准差记为 σ ,其中高斯模糊核的标准差统一取为3.表3为图像修补的实验数据,以不同程度的像素丢失比率

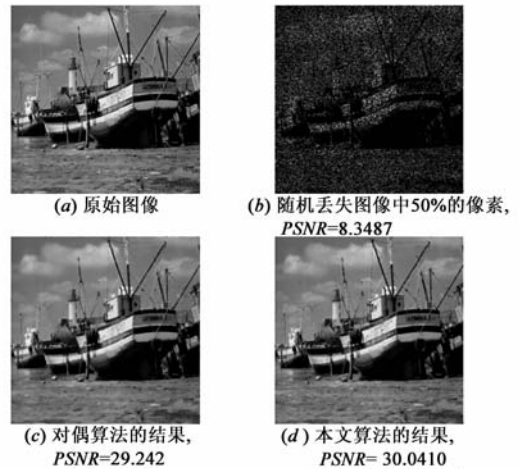


图 5 图像Boat (512×512) 的图像修补实验

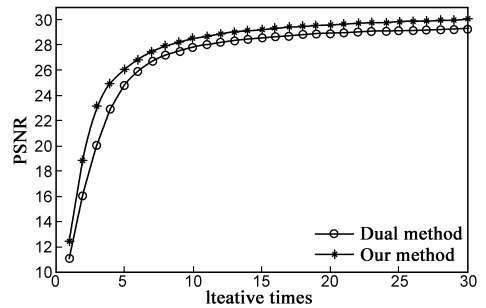


图 6 图像Boat的修补实验, 信噪比随迭代次数的变化曲线

对两种算法进行对比.从实验数据可以清楚地看到本文算法有更好的结果.

表 1 对偶投影算法与本文算法的去噪实验比较

图像	Lena			Boat			Lamp		
	10	20	30	10	20	30	10	20	30
噪声标准差	28.12	22.10	18.58	28.11	22.09	18.57	28.10	22.08	18.56
噪声图像	34.34	31.14	29.20	32.44	29.18	27.42	37.06	33.25	30.78
对偶投影算法	34.59	31.29	29.56	32.51	29.21	27.49	37.17	33.44	31.22
本文算法									

表 2 对偶投影算法与本文算法的去模糊实验比较

图像		Lena			Boat			Lamp			
		模糊图像	对偶投影算法	本文算法	模糊图像	对偶投影算法	本文算法	模糊图像	对偶投影算法	本文算法	
不带噪	聚焦不准	$r=3$	20.85	33.12	34.45	19.70	28.73	29.25	20.99	33.54	35.65
	模糊核	$r=6$	18.33	28.80	29.38	18.24	27.97	28.14	18.53	30.02	31.71
	高斯	$r=7$	27.14	31.17	32.87	24.53	30.41	31.19	24.85	34.56	36.84
	模糊核	$r=10$	25.58	28.23	29.14	23.44	29.23	30.87	23.22	30.45	32.37
带噪	聚焦不准	$r=3, \sigma=7$	20.47	31.22	31.87	19.59	28.15	28.91	20.60	32.14	33.89
	模糊核	$r=6, \sigma=5$	18.21	28.31	28.57	18.13	27.03	27.86	18.42	29.26	31.07
	高斯	$r=7, \sigma=7$	24.54	29.01	29.82	23.69	29.74	30.53	23.94	31.81	32.76
	模糊核	$r=10, \sigma=5$	23.66	28.12	28.84	23.09	28.97	29.44	22.88	29.61	30.52

表 3 对偶投影算法与本文算法的图像修补实验比较

图像	Lena			Boat			Lamp		
	20%	50%	70%	20%	50%	70%	20%	50%	70%
丢失数据百分比	12.63	8.67	7.21	12.33	8.35	6.89	9.90	5.93	4.48
待修补图像	34.53	32.08	28.76	32.11	29.24	25.70	32.14	29.20	26.63
对偶投影算法	36.56	33.27	29.35	34.30	30.04	26.68	33.58	30.14	29.07
本文算法									

5 结束语

本文给出了一般的 $L1$ 投影问题的分裂Bregman算法,并给出了收敛性的分析和证明.从大量的实验结果可以看到本文的算法比目前所提出的对偶投影算法更优.该算法有容易编码,图像恢复效果好的优点,并且

对于一般的 $L1$ 投影问题都适用. L 算子可以是小波变换或框架, 因此可以在小波域上使用同样的算法. 我们认为投影的优化问题和压缩感知(CS)的重构有着密不可分的关系, 因此下一步的工作将使用本文的算法, 应用于 $L1$ 投影的 CS 重构问题上.

参考文献:

- [1] Rudin L, Osher S, Fatemi E. Nonlinear total variation based noise removal algorithm[J]. *Physica D*, 1992, 60(1-4): 259 – 268.
- [2] 孙晓丽, 宋国乡, 冯象初. 基于噪声-纹理检测算子的图像去噪方法[J]. *电子学报*, 2007, 35(7): 1372 – 1375.
Sun Xiaoli, Song Guoxiang, Feng Xiangchu. An image denoising method based on a noise-texture operator[J]. *Acta Electronica Sinica*, 2007, 35(7): 1372 – 1375. (in Chinese)
- [3] 李敏, 冯象初. 基于小波空间的图像分解变分模型[J]. *电子学报*, 2008, 36(1): 184 – 187.
Li Min, Feng Xiangchu. A variational model for image decomposition based on wavelet method[J]. *Acta Electronica Sinica*, 2008, 36(1): 184 – 187. (in Chinese)
- [4] 姜东焕, 冯象初, 宋国乡. 基于非线性小波阈值的各向异性扩散方程[J]. *电子学报*, 2006, 34(1): 170 – 172.
Jiang Donghuan, Feng Xiangchu, Song Guoxiang. An anisotropic diffusion equation based on nonlinear wavelet shrinkage[J]. *Acta Electronica Sinica*, 2006, 34(1): 170 – 172. (in Chinese)
- [5] Zhang Lei, et al. Multiscale LMMSE-based image denoising with optimal wavelet selection[J]. *IEEE Trans. on Circuits and Systems for Video Technology*, 2005, 15(4): 469 – 481.
- [6] Chambolle A. An algorithm for total variation minimization and applications[J]. *Journal of mathematical imaging and vision*, 2004, 20(1-2): 89 – 97.
- [7] Fadili M J, Peyré G. Total variation projection with first order schemes[A]. 2009 16th IEEE International Conference on Im-

age Processing (ICIP) [C]. Cairo, Egypt: IEEE Signal Processing Society, 2009. 1325 – 1328.

- [8] Donoho D. Compressed sensing[J]. *IEEE Trans. Inform. Theory*, 2006, 52(4): 1289 – 1306.
- [9] Goldstein T, Osher S. The split Bregman method for $l1$ regularized problems[J]. *SIAM Journal on Imaging Sciences*, 2009, 2(2): 323 – 343.
- [10] Douglas J, Rachford H. On the numerical solution of heat conduction problems in two and three space variables[J]. *Trans. Americ. Math. Soc*, 1956, 82(2): 421 – 439.
- [11] Chambolle A, et al. Nonlinear wavelet image processing: variational problems, compression, and noise removal through wavelet shrinkage[J]. *IEEE Trans. Image Proc.*, 1998, 7(3): 319 – 335.
- [12] Setzer S. Split Bregman Algorithm, Douglas-Rachford Splitting and Frame Shrinkage [M]. Heidelberg, Germany: Springer Berlin, 2009. 1611 – 3349.
- [13] Combettes P, Pesquet J. A Douglas-Rachford splitting approach to nonsmooth convex variational signal recovery[J]. *IEEE Journal of Selected Topics in Signal Processing*, 2007, 1(4): 564 – 574.

作者简介:



李亚峰 男, 1977 年生, 讲师, 博士生, 研究方向为小波与偏微分方程在图像、信号处理中的应用研究.

E-mail: liyafeng770729@126.com

冯象初 男, 1962 年生, 教授, 博士生导师, 主要研究领域为数值分析、小波理论及其应用和尺度空间理论及在图像处理中的应用.

E-mail: xcfeng@mail.xidian.edu.cn