混合蛙跳算法的 Markov 模型及其收敛性分析

骆剑平，李　霞，陈泯融
（深圳大学信息工程学院，广东深圳 518060）

摘　要： 本文就混合蛙跳算法（Shuffled Frog Leaping Algorithm，SFLA）建立了 Markov 链数学分析模型，详细分析了该 Markov 链的性质，证明青蛙族群状态序列是齐次 Markov 链．在此基础上，通过分析族群状态序列的转移过程，指出序列必将进入最优状态集．同时证明混合蛙跳算法满足随机搜索算法全局收敛的两个条件，能够保证全局收敛．

关键词： 智能优化；混合蛙跳算法；Markov 链；全局收敛
中图分类号： TP181；TP183　　**文献标识码：** A　　**文章编号：** 0372-2112（2010）12-2875-06

The Markov Model of Shuffled Frog Leaping Algorithm and Its Convergence Analysis

LUO Jian-ping，LI Xia，CHEN Min-rong
（*College of Information Engineering*，*Shenzhen University*，*Shenzhen*，*Guangdong* 518060，*China*）

Abstract： The Markov chain model for the shuffled frog leaping algorithm（SFLA）was established. It was shown that the frog memeplex state sequence containing both the frog states and the current local and the global optimal frog states constructs a homogeneous Markov chain. The transition process of the frog memeplex state sequence was analyzed，and the conclusion that sequence will eventually converges to the optimal state set was drawn. Furthermore，it was proved that the shuffled frog leaping algorithm ensures global convergence as it meets the global convergence criterions of random search algorithms.

Key words： intelligent optimization；shuffled frog leaping algorithm；Markov chain；global convergence

1　引言

智能优化的研究与应用是当前学术界热点之一．由于大多数实际工程问题都属复杂的非线性问题，具有约束条件多、建模困难、多极值等特点，寻求适合于大规模并行运算且具有智能特征的优化算法已成为相关学科的一个重要研究方向．以遗传算法为代表的人工智能算法已被广泛应用于自然科学以及经济金融等社会科学领域．20 世纪 90 年代以来，一些新颖的优化算法，如人工神经网络（Artificial Neural Networks，ANN）、蚁群算法（Ant Colony Optimization，ACO）、人工免疫算法（Artificial Immune Algorithm，AIA）、粒子群算法（Particle Swarm Intelligence，PSO）、量子遗传算法（Quantum Genetic Algorithm，QGA）等，通过模拟或揭示某些自然现象或过程而得到迅速发展，为解决复杂问题提供了新的思路和手段．经过近些年的发展，智能优化算法凭借其简单的算法结构和突出的问题求解能力，吸引了众多研究者的目光，大量的研究成果证明了智能优化算法在工程上的适用性．但是，由于其理论依据多来源于对生物群落社会性的模拟，与其相关的数学分析比较缺乏，这就导致现有研究还存在许多不足，缺乏具备普遍意义的理论性分析．算法中涉及的各种参数设置无确切的理论依据，通常是按照经验型方法确定，对具体问题和应用环境的依赖性比较大．

2003 年，Eusuff 等人在粒子群算法的基础上，结合混合竞争进化（Shuffled Complex Evolution，SCE）[1]提出了混合蛙跳算法（Shuffled Frog Leaping Algorithm，SFLA）[2,3]．混合蛙跳算法是一种新型的仿生进化算法，是确定性竞争进化策略与有限度随机搜索的有机结合．确定性策略保证该算法可以有效利用所获信息指导粒子（青蛙）的随机搜索过程．该算法具有概念简单、参数少、计算速度快、全局寻优能力强、易于实现等优点．目前已在 PID 控制、网络文档自动分类等工程问题以及一些经典组合优化问题取得成功应用[4~8]．

Markov 过程是一类占有重要地位、具有普遍意义的随机过程，应用十分广泛．Markov 链是系统在任一时刻所处状态所组成的 Markov 随机序列，是对随机过程进行分析的重要手段，在自然科学、工程技术以及经济管

收稿日期：2009-12-07；修回日期：2010-04-29
基金项目：国家自然科学基金资助项目（No.60772148）；高等学校博士点基金资助项目（No.200805900001）

理各领域都有广泛应用. Markov 链理论在随机算法收敛性以及收敛概率的分析上具有较强能力,目前已成功应用于进化规划[9]、模拟退火[10]以及蚁群算法[11]等随机算法的收敛性分析. 众所周知,标准 SFLA 中全体粒子(青蛙)的运动过程本质上是一个随机过程,因此本文采用 Markov 链模型对 SFLA 的收敛性进行分析,通过建立 Markov 链模型研究青蛙族群状态的转移行为,并结合随机优化算法的收敛标准分析算法的收敛性能. 一些传统的仿生算法如标准遗传算法、粒子群算法都不具全局收敛性[12~14],但经理论指导对算法进行改进可使其全局收敛[15],取得良好的应用效果.

2 混合蛙跳算法(SFLA)

混合蛙跳算法是一种受自然生物模仿启示而产生的基于群体的协同搜索方法. 该算法模拟青蛙群体寻找食物时按族群分类进行信息传递的过程,同一族群内进行局部深度搜索,离食物源最远的青蛙将主要依据族群内距离食物源最近的青蛙提供的信息调整自己的位置,向食物源靠近. 每隔一段时间,不同族群会进行全局信息交换,并根据当前的青蛙状态,重新构成新的族群. 以上局部搜索与全局信息交换过程更替进行,直至寻找到食物. 典型 SFLA 的具体工作过程如下:随机生成含有 F 个青蛙的群体 $\boldsymbol{P}=\{\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{x}_2,\cdots,\boldsymbol{x}_F\}$,每个青蛙代表某优化问题的一个可行解,用 $f(\boldsymbol{x}_i)$ 表示 $\boldsymbol{x}_i$ 对应的适应度值,将其从优到劣进行排序. 将排序后的青蛙平均分配到 m 个族群,每个族群有 n 个青蛙,因此有 $F=m\times n$. 其中,第 1 个青蛙分入第 1 个族群,第 2 个青蛙分入第 2 个族群,第 m 个青蛙分入第 m 个族群,第 $m+1$ 个青蛙分入第 1 个族群,以此类推,直到将所有青蛙平均分入到 m 个族群. 设 M_k 代表第 k 个族群,则有:

$$\boldsymbol{M}_k=\{\boldsymbol{x}_{k+m(l-1)}\in\boldsymbol{P}\mid 1\leqslant l\leqslant n\}\ ,\ 1\leqslant k\leqslant m \tag{1}$$

为增加局部搜索的多样性,在每个族群中构造它的一个子集(称作子族群),该子集元素的选取一般满足如下三角概论分布:

$$P_j=\frac{2(n+1-j)}{n(n+1)}\ ,\ j=1,2,\cdots,n \tag{2}$$

每个子族群含有 $q(q\leqslant n)$ 个青蛙,适应度值越好的青蛙被挑选进入子族群的概率越大. 局部搜索具体策略是对子族群中最劣个体进行信息更新. 定义 $\boldsymbol{x}_w$、$\boldsymbol{x}_s$ 分别表示各子族群中适应度值最差和最优的个体,则:

$$\boldsymbol{x}_w'=\boldsymbol{x}_w+r(\boldsymbol{x}_s-\boldsymbol{x}_w) \tag{3}$$

其中 r 为一随机数且 $r\in[0,1]$. 更新后如果适应度值优于原来的适应度值,则用 $\boldsymbol{x}_w'$ 取代 $\boldsymbol{x}_w$,否则按式(4)进行更新:

$$\boldsymbol{x}_w'=\boldsymbol{x}_w+r(\boldsymbol{x}_b-\boldsymbol{x}_w) \tag{4}$$

其中 $\boldsymbol{x}_b$ 表示当前整个群体最佳位置,如果更新后仍无改进,则随机生成一个可行解代替 $\boldsymbol{x}_w$. 在族群内重复该操作直至设定的迭代次数. 随后对所有族群进行全局信息交换,更新群体最佳青蛙位置 $\boldsymbol{x}_b$,重新构造新的族群再进行局部深度搜索,如此循环直到满足终止条件.

3 SFLA 的 Markov 模型及其收敛性分析

3.1 收敛准则

SFLA 本质上属于随机搜索算法范畴,可通过随机算法的收敛准则来判定 SFLA 的收敛行为. Solis 和 Wets 给出了一般随机优化算法收敛性判定标准[16],本文不加证明给出其中判定定理.

对于优化问题 $<A,f>$,有随机优化算法 D,第 k 次迭代的结果为 $\boldsymbol{x}_k$,则下一次迭代的结果为 $\boldsymbol{x}_{k+1}=D(\boldsymbol{x}_k,\zeta)$. 其中 A 为可行解空间,f 为适应度函数,ζ 是算法 D 迭代中曾经搜索到过的解.

在 Lebesgue 测度空间定义搜索的下确界:

$$\alpha=\inf\{t\mid v(\boldsymbol{x}\in\boldsymbol{A}\mid f(\boldsymbol{x})<t)>0\}$$

其中 $v(\boldsymbol{X})$ 表示在集合 $\boldsymbol{X}$ 上的 Lebesgue 测度,因此可定义最优解区域为:

$$R_{\varepsilon,M}=\begin{cases}\{\boldsymbol{x}\in\boldsymbol{A}\mid f(\boldsymbol{x})<\alpha+\varepsilon\}\ ,\ \alpha\text{ 有限}\\ \{\boldsymbol{x}\in\boldsymbol{A}\mid f(\boldsymbol{x})<-C\}\ ,\ \alpha=-\infty\end{cases}$$

其中 $\varepsilon>0$,C 为充分大的正数,如果算法找到 $R_{\varepsilon,M}$ 中的一个点,则可认为算法找到了可接受的全局最优或近似全局最优点.

条件 H1 $f(D(\boldsymbol{x},\zeta))\leqslant f(\boldsymbol{x})$,且若 $\boldsymbol{\zeta}\in\boldsymbol{A}$,则有 $f(D(\boldsymbol{x},\boldsymbol{\zeta}))\leqslant f(\boldsymbol{\zeta})$.

条件 H2 对 $\forall\ \boldsymbol{B}\in\boldsymbol{A}$, s.t. $v(\boldsymbol{B})>0$,有

$$\prod_{k=0}^{\infty}(1-u_k(\boldsymbol{B}))=0$$

其中 $u_k(\boldsymbol{B})$ 为算法 D 第 k 次迭代搜索解在集合 $\boldsymbol{B}$ 上的概率测度.

定理 1[16](算法全局收敛) 设 f 是可测的,可测空间 $\boldsymbol{A}$ 是 R^n 上可测度的子集,算法 D 满足条件 H1 和 H2,$\{\boldsymbol{x}_k\}_{k=0}^{\infty}$ 是算法 D 产生的序列,则有:$\lim\limits_{k\to\infty}P(\boldsymbol{x}_k\in R_{\varepsilon,M})=1$,即算法全局收敛.

3.2 SFLA 基本概念数学定义

定义 1(青蛙状态和青蛙状态空间) 青蛙的状态由青蛙运动时采用二进制编码的轨迹位置构成,记为 $\boldsymbol{x}$,$\boldsymbol{x}\in\boldsymbol{A}$,$\boldsymbol{A}$ 为可行解空间. 青蛙的所有可能状态组成的集合构成青蛙状态空间,记为 $\boldsymbol{X}=\{\boldsymbol{x}\mid\boldsymbol{x}\in\boldsymbol{A}\}$.

定义 2(青蛙族群状态和青蛙族群状态空间) 族群中所有青蛙的状态和族群最佳青蛙状态 $\boldsymbol{x}_s(\boldsymbol{p})$ 以及整个群体最佳青蛙状态 $\boldsymbol{x}_b(\boldsymbol{b})$ 构成青蛙族群状态,记为 $\boldsymbol{s}=(\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{x}_2,\cdots,\boldsymbol{x}_n,\boldsymbol{p},\boldsymbol{b})$,$\boldsymbol{x}_i$ 表示第 i 个青蛙的状态,n 为族群内青蛙的个数. 考虑到算法每步迭代都要对族

群内的青蛙根据位置适应度值排序,因此有 $f(\boldsymbol{b}) \leqslant f(\boldsymbol{p}) = f(\boldsymbol{x}_1) \leqslant f(\boldsymbol{x}_2) \leqslant \cdots \leqslant f(\boldsymbol{x}_n)$. 青蛙族群的所有可能状态组成的集合构成青蛙族群状态空间,记为 $\boldsymbol{S} = \{\boldsymbol{s} = (\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \cdots, \boldsymbol{x}_n, \boldsymbol{p}, \boldsymbol{b}) \mid \boldsymbol{x}_i \in \boldsymbol{X}, 1 \leqslant i \leqslant n\}$.

3.3 SFLA 的 Markov 模型

定义 3(青蛙状态转移) 对 $\forall \boldsymbol{x}_i \in \boldsymbol{X}, \forall \boldsymbol{x}_j \in \boldsymbol{X}$, SFLA 算法迭代中,青蛙状态由 $\boldsymbol{x}_i$ 一步转移到 $\boldsymbol{x}_j$,记为 $T_x(\boldsymbol{x}_i) = \boldsymbol{x}_j$.

定理 2 SFLA 中,青蛙状态由 $\boldsymbol{x}_1$ 一步转移到 $\boldsymbol{x}_2$ 的转移概率 $P(T_x(\boldsymbol{x}_1) = \boldsymbol{x}_2)$的表达式为式(5).

证明 视青蛙群体为超空间的一组点集,则青蛙的更新过程即是在超空间中进行点集之间的变换,根据定义及 SFLA 中式(3)、式(4)的几何性质可得:

$$P(T_x(\boldsymbol{x}_1) = \boldsymbol{x}_2) = \begin{cases} \dfrac{1}{|\boldsymbol{p} - \boldsymbol{x}_1|}, & \boldsymbol{x}_2 \in [\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_1 + (\boldsymbol{p} - \boldsymbol{x}_1)] \\ \dfrac{1}{|\boldsymbol{b} - \boldsymbol{x}_1|}, & \boldsymbol{x}_2 \notin [\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_1 + (\boldsymbol{p} - \boldsymbol{x}_1)], \\ & \boldsymbol{x}_2 \in [\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_1 + (\boldsymbol{b} - \boldsymbol{x}_1)] \\ \dfrac{1}{|\boldsymbol{X}|} & , \boldsymbol{x}_2 \notin [\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_1 + (\boldsymbol{p} - \boldsymbol{x}_1)], \\ & \boldsymbol{x}_2 \notin [\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_1 + (\boldsymbol{b} - \boldsymbol{x}_1)] \end{cases} \tag{5}$$

其中,$\boldsymbol{p}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{x}$ 都是多维数据,加减号表示矢量加减, $[\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_1 + (\boldsymbol{p} - \boldsymbol{x}_1)]$和$[\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_1 + (\boldsymbol{b} - \boldsymbol{x}_1)]$分别表示以 $\boldsymbol{x}_1$ 与 $\boldsymbol{p}$ 和$\boldsymbol{x}_1$ 与 b 为顶点的超空间立方体,绝对值表示超空间立方体体积. 证毕.

定义 4(青蛙族群状态转移) 对 $\forall \boldsymbol{s}_i = (\boldsymbol{x}_{i1}, \boldsymbol{x}_{i2}, \cdots, \boldsymbol{p}_i, \boldsymbol{b}) \in \boldsymbol{S}, \forall \boldsymbol{s}_j = (\boldsymbol{x}_{j1}, \boldsymbol{x}_{j2}, \cdots, \boldsymbol{p}_j, \boldsymbol{b}) \in \boldsymbol{S}$,在 SFLA 族群内部迭代中,青蛙族群状态由 $\boldsymbol{s}_i$ 一步转移到$\boldsymbol{s}_j$,记为 $T_s(\boldsymbol{s}_i) = \boldsymbol{s}_j$.

定理 3 在 SFLA 青蛙族群内部迭代中,青蛙族群状态由 $\boldsymbol{s}_i$ 一步转移到$\boldsymbol{s}_j$ 的转移概率为:

$$P(T_s(\boldsymbol{s}_i) = \boldsymbol{s}_j) = \begin{cases} P_{q,k} P(T_x(\boldsymbol{x}_{ik}) = \boldsymbol{x}_{jk}) P(\boldsymbol{p}_i \to \boldsymbol{p}_j) \\ \qquad\qquad , d \leqslant 1 \text{ 且 } k \geqslant q \\ 0 \qquad\qquad , \text{其它} \end{cases} \tag{6}$$

d 为$\boldsymbol{s}_i$ 族群状态相比较于$\boldsymbol{s}_j$ 族群状态前n 个青蛙状态不相同的个数,k 为族群迭代更新前后轨迹位置发生改变的唯一一个青蛙的排位序号,$P_{q,k}$为族群中选中第k 只青蛙进行位置更新的概率,且有 $0 < P_{q,k} < 1$, q 为子族群的大小,且 $q \leqslant n$, $P(T_x(\boldsymbol{x}_{ik}) = \boldsymbol{x}_{jk})$为 $\boldsymbol{s}_i$、$\boldsymbol{s}_j$ 族群状态中各自第k 个青蛙状态之间的转移概率,$P(\boldsymbol{p}_i \to \boldsymbol{p}_j)$为 $\boldsymbol{s}_i$ 和$\boldsymbol{s}_j$ 族群状态中各自最佳青蛙状态之间的转移概率:

$$P(\boldsymbol{p}_i \to \boldsymbol{p}_j) = \begin{cases} 1 & , f(\boldsymbol{p}_j) \leqslant f(\boldsymbol{p}_i) \\ 0 & , f(\boldsymbol{p}_j) > f(\boldsymbol{p}_i) \end{cases} \tag{7}$$

证明 由于族群状态 $\boldsymbol{s}_i = (\boldsymbol{x}_{i1}, \boldsymbol{x}_{i2}, \cdots, \boldsymbol{p}_i, \boldsymbol{b})$要一步转移到族群状态 $\boldsymbol{s}_j = (\boldsymbol{x}_{j1}, \boldsymbol{x}_{j2}, \cdots, \boldsymbol{p}_j, \boldsymbol{b})$,则族群状态 $\boldsymbol{s}_i$ 中所有青蛙状态、$\boldsymbol{p}$ 和 $\boldsymbol{b}$ 都要转移到$\boldsymbol{s}_j$ 中相应的状态,根据 SFLA 族群内部更新机制,算法族群内部每一步迭代更新前后只有一个青蛙位置发生改变,只挑选子族群适应值最差的单个个体进行更新,因此 $\boldsymbol{s}_i$ 族群状态内只有一个青蛙状态进行了转移,一步有多个青蛙状态发生转移的概率为 0. 当只有一个青蛙状态发生转移时,设转移的青蛙在族群中排序在第 k 个位置,被选中概率记为 $P_{q,k}$,根据三角概率分布式(2)及算法只更新子族群最后一个青蛙的事实,当 $k \geqslant q$ 时,$0 < P_{q,k} < 1$,因此:

$$P(T_s(\boldsymbol{s}_i) = \boldsymbol{s}_j) = P_{q,k} P(T_x(\boldsymbol{x}_{ik}) = \boldsymbol{x}_{jk}) P(\boldsymbol{p}_i \to \boldsymbol{p}_j) P(\boldsymbol{b} \to \boldsymbol{b}) \tag{8}$$

又由族群内迭代并没有改变 $\boldsymbol{b}$ 的值,因此 $P(\boldsymbol{b} \to \boldsymbol{b}) = 1$,故:

$$P(T_s(\boldsymbol{s}_i) = \boldsymbol{s}_j) = P_{q,k} P(T_x(\boldsymbol{x}_{ik}) = \boldsymbol{x}_{jk}) P(\boldsymbol{p}_i \to \boldsymbol{p}_j)$$

由于当前族群 n 个青蛙中适应度值最优的第一个青蛙的状态总是不会发生转移的,当前族群最优状态总是会保留或被更好的状态替换,故有:

$$P(\boldsymbol{p}_i \to \boldsymbol{p}_j) = \begin{cases} 1 & , f(\boldsymbol{p}_j) \leqslant f(\boldsymbol{p}_i) \\ 0 & , f(\boldsymbol{p}_j) > f(\boldsymbol{p}_i) \end{cases}$$

证毕.

定理 4 SFLA 中,青蛙族群状态序列$\{\boldsymbol{s}(t): t \geqslant 0\}$是齐次 Markov 链.

证明 根据定理 3,青蛙族群状态序列$\{\boldsymbol{s}(t): t \geqslant 0\}$中任意 $\boldsymbol{s}(t-1), \boldsymbol{s}(t) \in \boldsymbol{S}$,其转移概率 $P(T_s(\boldsymbol{s}(t-1)) = \boldsymbol{s}(t))$由 $P_{q,k}$、$P(T_x(\boldsymbol{x}_k(t-1)) = \boldsymbol{x}_k(t))$和 $P(\boldsymbol{p}(t-1) \to \boldsymbol{p}(t))$三部分决定. 根据定理 2 的式(5)知,青蛙状态转移概率 $P(T_x(\boldsymbol{x}_k(t-1)) = \boldsymbol{x}_k(t))$仅与 $t-1$ 时刻的 $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{p}, \boldsymbol{b}$ 及状态空间大小相关;由式(7)知 $P(\boldsymbol{p}(t-1) \to \boldsymbol{p}(t))$也仅仅与 $P(T_x(\boldsymbol{x}_k(t-1)) = \boldsymbol{x}_k(t))$和 $\boldsymbol{p}(t-1)$相关,因此 $P(\boldsymbol{p}(t-1) \to \boldsymbol{p}(t))$仅与 $t-1$ 时刻 $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{p}, \boldsymbol{b}$ 相关;$P_{q,k}$为一个只和 k 和 $\boldsymbol{q}$ 有关的概率表达式,和时间无关. 因此状态序列$\{\boldsymbol{s}(t): t \geqslant 0\}$具有 Markov 性,是 Markov 链. 又,$P_{q,k}$、$P(T_x(\boldsymbol{x}_k(t-1)) = \boldsymbol{x}_k(t))$和 $P(\boldsymbol{p}(t-1) \to \boldsymbol{p}(t))$均与时刻 $t-1$ 无关,即 $P(T_s(\boldsymbol{s}(t-1)) = \boldsymbol{s}(t))$和时刻 $t-1$ 无关,因此状态序列$\{\boldsymbol{s}(t): t \geqslant 0\}$是齐次 Markov 链. 证毕.

3.4 算法收敛性

SFLA 既有族群内迭代操作,又有族群之间混合操作,为分析方便,我们先分析群体只包含一个族群的情况. 此时有 $\boldsymbol{b} = \boldsymbol{p}$.

定义 5(最优青蛙族群状态集 M) 设优化问题$\langle \boldsymbol{A}, f \rangle$的全局最优解为 $\boldsymbol{g}^*$,定义青蛙族群最优状态集

$M = \{ s = (x_1, x_2, \cdots, x_n, p, p) \mid f(p) = f(g^*), s \in S \}$.

定理 5 对于青蛙族群状态序列 $\{ s(t): t \geqslant 0 \}$，最优青蛙族群状态集 M 是族群状态空间 S 上的一个闭集.

证明 设 $\forall s_i \notin M$，和 $\forall s_j \in M$. 对于任意转移步长 $l, l \geqslant 1$，由 Chapman-Kolmogorov 方程可得：

$$P^l_{s_j, s_i} = \sum_{s_{r_1} \in S} \cdots \sum_{s_{r_{l-1}} \in S} P(T_s(s_j) = s_{r_1}) P(T_s(s_{r_1}) = s_{r_2}) \cdots P(T_s(s_{r_{l-1}}) = s_i) \quad (9)$$

$P^l_{s_j, s_i}$ 表示族群状态 s_j 经过 l 步转移到状态 s_i 的概率，在式(9)展开式的每一项乘积表达式中都存在一项 $P(T_s(s_{r_{c-1}}) = s_{r_c})$，满足 $s_{r_{c-1}} \in M$ 且 $s_{r_c} \notin M$，其中 $1 \leqslant p \leqslant l$，根据定理 3 可得到族群转移概率为：

$$P(T_s(s_{r_{c-1}}) = s_{r_c}) = P_{q,k} P(T_x(x_{r_{c-1}k}) = x_{r_c k}) P(p_{r_{c-1}} \to p_{r_c})$$

由 $s_{r_{c-1}} \in M$ 和 $s_{r_c} \notin M$，有 $f(p_{r_c}) > f(p_{r_{c-1}}) = f(g^*) = \inf(f(a)), a \in A$，由定理 3 中的式(7)知 $P(p_{r_{c-1}} \to p_{r_c}) = 0$，所以 $P(T_s(s_{r_{c-1}}) = s_{r_c}) = 0$，故式(9)每项展开式均为 0，由此得到 $P^l_{s_j, s_i} = 0$，因此 M 是 S 上的一个闭集. 证毕.

定理 6 青蛙族群状态空间 S 不存在非空闭集 G，使得 $M \cap G = \varnothing$.

证明 用反证法，假设状态空间 S 还存在一个这样的闭集为 G，且 $M \cap G = \varnothing$，因此，类似定理 5 的证明，设：$s_i = (g^*, g^*, \cdots, g^*, g^*) \in M$，$\forall s_j = (x_{j1}, x_{j2}, \cdots, p_j, p_j) \in G$，有 $f(p_j) > f(g^*)$. 根据式(9)所示的 Chapman-Kolmogorov 方程，当 l 步长足够大，$P^l_{s_j, s_i}$ 展开式中必存在某项乘积表达式 $P(T_s(s_j) = s_{r_c}) P(T_s(s_{r_c}) = s_{r_{c+1}}) \cdots P(T_s(s_{r_{c+l-2}}) = s_i)$，使得其中的每一项一步转移概率 $P(T_s(s_{r_{c+i}}) = s_{r_{c+i+1}})$ 都满足定理 3 式(6)中的条件：$d \leqslant 1$ 且 $k \geqslant q$，又根据定理 3 的式(7)有 $P(p_{r_{c+i}} \to p_{r_{c+i+1}}) = 1$，同时，由定理 2 的式(5)知 $P(T_x(x_{r_{c+i}k}) = x_{r_{c+i+1}k}) > 0$，因此 $P(T_s(s_{r_{c+i}}) = s_{r_{c+i+1}}) > 0$，$P(T_s(s_j) = s_{r_c}) P(T_s(s_{r_c}) = s_{r_{c+1}}) \cdots P(T_s(s_{r_{c+l-2}}) = s_i) > 0$，$P^l_{s_i, s_j} > 0$，即 $P^l_{s_i, s_j} \neq 0$. 因此 G 并不是闭集，和题设存在矛盾，因此状态空间 S 不含有除 M 之外的闭集. 证毕.

定理 7[12] 假定马尔可夫链有一个非空闭集 C，且不存在另一个非空闭集 D，使得 $C \cap D = \varnothing$，则当 $j \in C$ 时：$\lim_{n \to \infty} P(X_n = j) = \pi_j$，且 $j \notin C$ 时：$\lim_{n \to \infty} P(X_n = j) = 0$.

定理 8 当族群内部迭代趋于无穷，族群状态序列必将进入最优状态集 M.

证明 由定理 5、定理 6 及定理 7 即可得出此结论. 证毕.

定理 9 SFLA 收敛于全局最优.

证明 SFLA 中，族群内部每次迭代只更新适应度值最差的青蛙的位置，因此每次迭代都保留了群体最佳的位置，算法满足定理 1 的收敛条件 H1. 若要使定理 1 的收敛条件 H2 成立，则要求算法 D 连续无穷次未搜索到 B 中的元素的概率为 0. 对于 $R_{\varepsilon, M} \subset A$，由定理 8，算法连续无穷次搜索不到全局最优解的概率为 0，满足 H2. 又由定理 2 的式(5)，设 $J_{t,n}$ 为 t 时刻最差适应值第 n 个青蛙状态空间支撑集，当状态 $x_2 \notin [x_1, x_1 + (p - x_1)]$ 且 $x_2 \notin [x_1, x_1 + (b - x_1)]$ 时，有 $J_{t,n} = X$，X 为青蛙状态空间. 定义 X 的子集 $B = J_{t,n}$，则有 $u_t[B] = u_{t,n}[B] = 1$.

因此，算法满足定理 1 要求的收敛条件，即算法全局收敛.

上面分析针对青蛙群体只包含一个族群的情况，证明了随着族群内部迭代更新的进行，算法将终收敛于全局最优. 当青蛙群体有多个族群工作并存在族群之间混合操作时，上面分析过程依然正确，每进行一次混合操作可看作重新生成族群状态序列. 由于每个族群都向全局最优方向收敛，则整个群体也必朝此方向收敛，因此，SFLA 将最终收敛于全局最优. 证毕.

4 实验分析

本文举例分析算法收敛情况，实验采用 Griewank 基准函数，函数表达式为：

$$F = \frac{1}{4000} \sum_{i=1}^{n} x_i^2 - \prod_{i=1}^{n} \cos\left(\frac{x_i}{\sqrt{i}}\right) + 1, \quad x_i \in (-600, 600)$$

该函数是一个含有众多局部极致点的多模函数，普通寻优算法易陷入局部最优，求解具有较高的复杂性，对于不同的问题维数 n，全局最优值均为 0. 实验时当求解精度达到 10^{-3} 时认为成功找到最优解.

图 1 为 SFLA 分别在单族群和多族群工作时求解 Griewank 函数的算法收敛曲线，函数维数 $n = 10$. SFLA 多族群工作时参数设置为 $F = 200, m = 10, n = 20, q = 16$，族群内部迭代次数为 20；单族群工作时参数设置为 $F = 200, m = 1, n = 200, q = 160$，两种情况下青蛙总体个数相同. 由于单族群工作时不存在混合操作，为方便比较，图中单族群工作的每次混合迭代相当于进行 20 次族群内部迭代.

由收敛曲线可以看出，两种工作模式下随着迭代的进行算法都朝最优解逼近，且最终均收敛到全局最优. 多族群模式下混合迭代进行到约 50 次时即收敛于全局最优，算法族群内部迭代总次数约为 10000(10 × 20 × 50)次；单族群工作时算法进行到约 720 次混合迭代即收敛到全局最优，相当于在唯一的一个族群内部共进行约 14400(20 × 720)次迭代. 由此可知在多族群工作模式下，算法发挥多族群混合竞争、协同进化的特点，

效率比单族群模式要高.

图 2 为 SFLA 在多族群工作模式下针对 Griewank 函数不同维数时的算法收敛曲线,函数维数分别为 10、20 和 50. 由图可看出,当函数维数增加,求解复杂度增大时,算法随着迭代次数的增加依然朝最优解方向收敛. 复杂度越大,所需要的迭代次数越多,最后达到或逼近最优解.

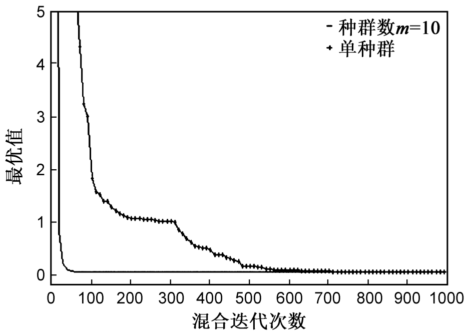

图1　SFLA单族群和多族群工作时收敛曲线

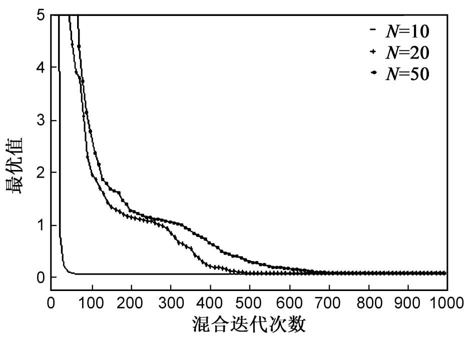

图2　不同问题维数时SFLA收敛曲线

虽然 SFLA 是一种全局收敛算法,但随着求解问题的复杂度不断增大,算法收敛于全局最优所需的迭代次数会越来越高,对某些问题还会出现在一定迭代次数内未必能收敛到全局最优的情况. 为提高算法收敛效率往往需要融合一些其它局部搜索技术.

5　结束语

本文在给出 SFLA 的基础上,对 SFLA 通过定义青蛙族群状态转移序列建立了 Markov 链数学分析模型,详细分析了该 Markov 链的性质,指出它是齐次 Markov 链,给出了族群状态序列最终转移状态,证明出算法满足随机搜索算法全局收敛的两个条件,指出 SFLA 是一种全局收敛的算法. 本文对算法微观过程的分析以及得出的结论对算法本质的理解具有一定意义. 对算法的改进也提供了一些依据,比如为进一步提高算法的搜索效率,可以考虑用更好的局部搜索技术来取代随机解的产生,由定理 5 和定理 6 可以看出,只要局部搜索每个解向量的支撑集的并集能构成整个状态空间集,通过状态转移分析可以证明算法依然是全局收敛的. 另一方面,从工程实践角度出发,算法收敛速度和解的稳定性也非常重要,结合 SFLA 的多个族群工作且族群之间存在混合操作的特点,对算法从这些方面进行深入理论分析,为该算法在工程实践应用中的参数选择、算法改进提供更多依据将是接下来需要研究的重要内容.

参考文献:

[1] Duan Q, Sorooshian S, Gupta V. Effective and efficient global optimization for conceptual rainfall-runoff models[J]. Water Resource Research, 1992, 28(4): 1015 – 1031.

[2] Eusuff M M, Lansey K E. Optimization of water distribution network design using the shuffled frog leaping algorithm[J]. Journal of Water Sources Planning and Management, 2003, 129 (3): 210 – 225.

[3] Eusuff M M, Lansey K E, Pasha F. Shuffled frog-leaping algorithm: a memetic meta-heuristic for discrete optimization[J]. Engineering Optimization, 2006, 38(2): 129 – 154.

[4] Hatem E, Emad E, Tarek H, Khaled S. Comparison of two evolutionary algorithms for optimization of bridge deck repairs[J]. Computer-Aided Civil and Infrastructure Engineering, 2006, 21: 561 – 57.

[5] Huynh T H. A modified shuffled frog leaping algorithm for optimal tuning of multivariable PID controllers[A]. International Conference on Information Technology[C]. Singapore: IEEE Press, 2008. 128 – 134.

[6] Alireza R V. A hybrid multi-objective shuffled frog-leaping algorithm for a mixed-model assembly line sequencing problem [J]. Computers & Industrial Engineering, 2007, 53: 642 – 666.

[7] SUN Xia, WANG Zi-qiang. A web document classification method based on shuffled frog leaping algorithm[A]. Second International Conference on Genetic and Evolutionary Computing[C]. Jingzhou, Hubei, China: IEEE Press, 2008. 205 – 208.

[8] 罗雪晖,杨烨,李霞. 改进混合蛙跳算法求解旅行商问题[J]. 通信学报, 2009, 30(7): 130 – 135.
LUO Xue-hui, YANG Ye, LI Xia. A modifed shufflled frog leaping algorithm for TSP[J]. Journal on Communications, 2009, 30(7): 130 – 135. (in Chinese)

[9] 刘峰,刘贵忠,张茁生. 进化规划的 Markov 过程分析及收敛性[J]. 电子学报, 1998, 26(8): 76 – 79.
LIU Feng, LIU Gui-zhong, ZHANG Zhuo-sheng. Markovian process analyses and convergence of evolutionary programming [J]. Acta Electronica Sinica, 1998, 26(8): 76 – 79. (in Chinese)

[10] Gidas B. Nonstationary Markov chains and convergence of the annealing algorithms[J]. Statistics Physics, 1985, 39(12): 73 – 131.

[11] 苏兆品,蒋建国,梁昌勇,张国富,夏娜. 蚁群算法的几乎

处处强收敛性分析[J].电子学报,2009,37(8):1646 - 1650.
SU Zhao-pin,JIANG Jian-guo,LIANG Chang-yong,ZHANG Guo-fu,XIA Na.An almost everywhere strong convergence proof for a class of ant colony algorithms[J].Acta Electronica Sinica,2009,37(8):1646 - 1650.(in Chinese)

[12] 张文修,梁怡.遗传算法的数学基础[M].西安:西安交通大学出版社,2003.67 - 87.
ZHANG Wen-xiu,LIANG Yi.Mathematics foundations of genetic algorithm[M].Xi'an:Press of Xi'an Jiaotong University,2003.67 - 87.(in Chinese)

[13] Clere M,Kennedy J.The particle swarm:Explosion,stability,and convergence in a multi-dimensional complex space[J].IEEE Transactions on Evolutionary Computation,2002,16(1):58 - 73.

[14] 李宁.粒子群优化算法的理论分析与应用研究[D].武汉:华中科技大学,2006.
LI Ning.Analysis and application of particle swarm optimization[D].Wuhan:Huazhong University of Science and Technology,2006.(in Chinese)

[15] Van D B,Engelbrecht A P.A study of particle swarm optimization particle trajectories[J].Information Sciences,2006,176(8):937 - 971.

[16] Solis F,Wets R.Minimization by random search techniques[J].Mathematics of Operations Research,1981,6:19 - 30.

作者简介:

骆剑平 男,1978 年 8 月出生于广东河源,讲师,博士研究生,主要研究方向为智能优化算法、进化计算.
E-mail:camelrock@126.com

李 霞 女,1968 年 10 月出生于四川乐山,深圳大学教授,博士生导师,研究方向为图像处理、智能优化算法.

陈泯融 女,1977 年 2 月生于广东化州,讲师,研究方向为智能优化算法、信息安全.