

利用模式匹配与四分量二维频域有限差分混合算法 分析复杂截面波导不连续性

赵 伟¹, 赵永久¹, 强 力³, 刘 冰^{1,2}, 秦红波³

(1. 南京航空航天大学信息科学与技术学院, 江苏南京 210016; 2. 东南大学毫米波国家重点实验室, 江苏南京 210096;
3. 西安电子科技大学机电工程学院, 陕西西安 710071)

摘 要: 模式匹配 (Mode Matching, MM) 法分析波导不连续性问题时, 通常需要已知相移常数和模式函数的解析表达式, 因此, 局限于分析简单截面波导不连续性问题. 本文采用四分量二维频域有限差分 (2-D FDFD) 法能够有效地解决复杂截面波导本征模问题, 本征值和本征向量分别对应相移常数和模式函数离散值, 求得本征解后再利用模式匹配法计算出波导阶梯的广义散射参数. 最后, 给出了矩形波导中单脊膜片和十字膜片实例, 验证了混合算法的准确性和高效性.

关键词: 模式匹配; 二维频域有限差分; 广义散射参数; 单脊膜片; 十字膜片

中图分类号: TN814 **文献标识码:** A **文章编号:** 0372-2112 (2010) 12-2735-05

Analysis of Waveguide Discontinuities with Complex Cross Section by a Hybrid Mode Matching/4-Component 2-D FDFD Method

ZHAO Wei¹, ZHAO Yong-jiu¹, QIANG Li³, LIU Bing^{1,2}, QIN Hong-bo³

(1. College of Information Science and Technology, Nanjing University of Aeronautics and Astronautics, Nanjing, Jiangsu 210016, China;
2. State Key Laboratory of Millimeter Waves, Southeast University, Nanjing, Jiangsu 210096, China;
3. School of Electrical and Mechanical Engineering, Xidian University, Xi'an, Shaanxi 710071, China)

Abstract: In analysis of waveguide discontinuities by the traditional mode matching (MM) method, the phase constant and the analytical expression of mode function must be required. This limitation makes the application of the method only suitable for waveguide discontinuities with simple boundary shapes. In order to determine the mode spectrum of complex shaped waveguide, an eigen equation is established using four-component two-dimension finite-difference frequency-domain (2-D FDFD) method. Phase constants and mode functions could be easily solved as eigen values and eigen vectors, respectively. Once the eigen problem was solved, the generalized scattering parameters can be calculated by the MM technique. Finally, demonstrations of a single-ridged iris and a cross-shaped iris are analyzed. The results show this hybrid method is correct and efficient.

Key words: mode matching; two-dimension finite-difference frequency-domain; generalized scattering parameters; single-ridged iris; cross-shaped iris

1 引言

在分析波导不连续性的各种方法中, 模式匹配 (MM) 法是基于严格的场理论, 考虑高次模的相互影响对切向场进行模式展开, 在不连续处匹配切向场并利用模式函数的正交和归一化条件求解广义散射矩阵, 具有速度快、精度高的优点^[1]. 利用模式匹配法分析波导不连续性时, 首先需要已知波导中各个模式的截止频率以及模式函数的解析表达式, 在分析简单截面波导不连续性时, 模式函数可以很容易地由正余弦函数和贝塞尔函

数表示, 计算过程简单^[1-5]. 但是在分析截面复杂的结构如脊波导和十字波导时, 则需要通过求解超越方程以得到截止频率^[6-8], 且相应的模式函数表达式也非常复杂^[9,10], 所以, 模式匹配法更适合于分析截面形状简单的波导不连续性问题, 相比之下, 数值方法可以更好地分析复杂结构的不连续性问题, 如频域有限差分 (FDFD) 和有限元 (FE) 算法等. 为了提高模式匹配法的灵活性和适用性, Arndt F 等人提出了多种混合算法^[11,12], 其中, MM/FDFD 混合算法是在规则区域和不规则区域分别利用 MM 算法和 FDFD 算法^[13,14], 而 MM/FE

混合算法作为解决 2D 问题的典型算法^[15],基于霍姆霍兹方程利用 2-D FE 算法可以解决任意截面的波导本征模问题,具有很高的灵活性,但是计算过程复杂,并且由 FE 算法直接求解得到的是位函数,还需转化为模式函数再进行积分运算。

本文提出用 MM 结合四分量 2-D FDFD 算法分析截面形状复杂的波导不连续性问题,利用四分量 2-D FDFD 算法可以准确计算出规则波导中各个模式的传播常数和离散的切向场分量^[16,17],通过离散的切向场分量归一化条件可以得到模式函数的离散值,最后,匹配不连续处切向场求解出波导阶梯的广义散射参数。在整个计算过程中只涉及到切向的四个场分量,并且匹配场所需求解的截止频率、波阻抗以及模式函数都可以通过四分量 2-D FDFD 算法得到,不仅大大简化了计算过程并且提高了 MM 算法的灵活性和适用性。编写程序计算了矩形波导单脊膜片和十字膜片的广义散射参数,与仿真软件 HFSS(High Frequency Structure Simulator)进行比较,其结果吻合良好。

2 模式匹配法原理

根据 MM 算法原理^[1,2],切向场可以按照模式函数展开,切向场可表示为

$$\mathbf{E}_t = \sum_M \mathbf{e}_m^h \sqrt{Z_m^h} (a_m^h + b_m^h) + \sum_P \mathbf{e}_p^e \sqrt{Z_p^e} (a_p^e + b_p^e) \quad (1)$$

$$\mathbf{H}_t = \sum_M \mathbf{h}_m^h \sqrt{Y_m^h} (a_m^h - b_m^h) + \sum_P \mathbf{h}_p^e \sqrt{Y_p^e} (a_p^e - b_p^e)$$

上式中切向场由电压模式函数 \mathbf{e} 、电流模式函数 \mathbf{h} 、特性阻抗 Z 、特性导纳 Y 、入射波 a 和反射波 b 表示, M 和 P 分别为 TE 波和 TM 波的模式总数, m 和 p 为相应模式索引。当特性阻抗等于波阻抗时,模式函数为实函数且满足正交和归一化条件:

$$\iint_S \mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_j = 1 \quad (2)$$

$$\iint_S \mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_j = 0 \quad (3)$$

同时,波导中 TE 波和 TM 波电压模式函数与电流模式函数满足

$$\mathbf{e} = \begin{cases} \mathbf{z} \times \nabla_t \varphi, & \text{TE} \\ -\nabla_t \varphi, & \text{TM} \end{cases}, \quad \mathbf{h} = \mathbf{k} \times \mathbf{e} \quad (4)$$

其中, φ 满足切向方向上的二维霍姆霍兹方程, \mathbf{k} 为传播方向单位矢量。

以图 1 中矩形波导阶梯为例, I 区为阶梯处大波导区域, II 区为阶梯处小波导区域。在 $z=0$ 处,电场和磁场分别满足切向连续条件,利用模式函数正交和归一化条件,波导阶

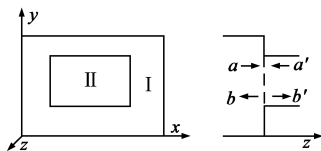


图1 矩形波导阶梯截面图

梯两侧入射波和反射波满足

$$\{\mathbf{a} + \mathbf{b}\} = \mathbf{W} \{\mathbf{a}' + \mathbf{b}'\} \quad (5)$$

$$-\mathbf{W}^T \{\mathbf{a} - \mathbf{b}\} = \{\mathbf{a}' - \mathbf{b}'\} \quad (6)$$

其中, \mathbf{a} 、 \mathbf{b} 和 \mathbf{a}' 、 \mathbf{b}' 分别代表大波导和小波导的入射波向量和反射波向量, \mathbf{W} 矩阵由大波导特性导纳、耦合矩阵以及小波导特性阻抗表示如下

$$\mathbf{W} = \text{diag}(\sqrt{Y}) \mathbf{M} \text{diag}(\sqrt{Z'}) \quad (7)$$

耦合矩阵 \mathbf{M} 代表模式之间的耦合,表示为

$$M_{ij} = \iint_{\Pi} \mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}'_j ds' \quad (8)$$

其中, \mathbf{e}_i 和 \mathbf{e}'_j 分别代表大波导和小波导中第 i 和第 j 个电压模式函数。由式(5)和式(6)可以计算出广义散射矩阵表达式如下

$$\begin{aligned} S_{11} &= -(\mathbf{I} + \mathbf{W} \cdot \mathbf{W}^T)^{-1} (\mathbf{I} - \mathbf{W} \cdot \mathbf{W}^T) \\ S_{21} &= \mathbf{W}^T \cdot (\mathbf{I} - S_{11}) \\ S_{22} &= (\mathbf{I} + \mathbf{W}^T \cdot \mathbf{W})^{-1} \cdot (\mathbf{I} - \mathbf{W}^T \cdot \mathbf{W}) \\ S_{12} &= \mathbf{W} \cdot (\mathbf{I} + S_{22}) \end{aligned} \quad (9)$$

由以上分析可以看出,波阻抗和耦合矩阵是计算散射参数的关键,这就需要知道波导中各个模式的截止频率和模式函数表达式。在分析矩形波导时,我们可以轻易得到截止频率和模式函数的解析表达式,但是在分析截面形状复杂的波导时,截止频率和模式函数的求解非常复杂。所以,这就迫切地需要其他解析或数值方法来分析截面形状复杂的波导本征值特性。

3 四分量二维频域有限差分法

本文采用四分量 2-D FDFD 算法求解截止频率和模式函数,只涉及到切向场四个分量,由本征方程求解的特征值和特征向量正好对应截止频率和未归一化的模式函数,大大提高了计算效率。

在波导边界内,通过消去麦克斯韦旋度方程离散表达式中的纵向离散场分量,可以得到各个

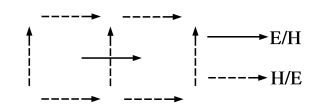


图2 离散场分量相互关系示意图

离散的切向场分量表达式,最终结果如图 2 所示,实线代表的待求离散切向场分量由相邻的性质相反的场分量表示,即每个离散点的电场分量由相邻的七个离散点的磁场分量表示,同样,每个离散点的磁场分量由七个相邻离散点的电场分量表示,具体的表达式如下^[16]

$$\begin{aligned} -j \frac{\gamma}{k_0} E_x(i, j) &= -\frac{1}{k_0^2 d_x d_y} [H_x(i, j-1) - H_x(i+1, j-1) \\ &\quad - H_x(i, j) + H_x(i+1, j)] \\ &\quad + \frac{1}{k_0^2 d_x^2} H_y(i-1, j) \\ &\quad + \left(1 - \frac{2}{k_0^2 d_x^2}\right) H_y(i, j) + \frac{1}{k_0^2 d_x^2} H_y(i+1, j) \end{aligned} \quad (10)$$

$$\begin{aligned}
 -j \frac{\gamma}{k_0} E_y(i, j) &= \frac{1}{k_0^2 d_x d_y} [H_y(i-1, j) - H_y(i, j) \\
 &\quad - H_y(i-1, j+1) + H_y(i, j+1)] \\
 &\quad - \frac{1}{k_0^2 d_y^2} H_x(i, j-1) \\
 &\quad - \left(1 - \frac{2}{k_0^2 d_y^2}\right) H_x(i, j) - \frac{1}{k_0^2 d_y^2} H_x(i, j+1)
 \end{aligned} \quad (11)$$

$$\begin{aligned}
 -j \frac{\gamma}{k_0} H_x(i, j) &= \frac{1}{k_0^2 d_x d_y} [E_x(i-1, j) - E_x(i, j) \\
 &\quad - E_x(i-1, j+1) + E_x(i, j+1)] \\
 &\quad - \frac{1}{k_0^2 d_x^2} E_y(i-1, j) \\
 &\quad - \left(1 - \frac{2}{k_0^2 d_x^2}\right) E_y(i, j) - \frac{1}{k_0^2 d_x^2} E_y(i+1, j)
 \end{aligned} \quad (12)$$

$$\begin{aligned}
 -j \frac{\gamma}{k_0} H_y(i, j) &= -\frac{1}{k_0^2 d_x d_y} [E_y(i, j-1) - E_y(i+1, j-1) \\
 &\quad - E_y(i, j) + E_y(i+1, j)] \\
 &\quad + \frac{1}{k_0^2 d_y^2} E_x(i, j-1) \\
 &\quad + \left(1 - \frac{2}{k_0^2 d_y^2}\right) E_x(i, j) + \frac{1}{k_0^2 d_y^2} E_x(i, j+1)
 \end{aligned} \quad (13)$$

其中 γ 是传播常数, k_0 是真空中波数. d_x 和 d_y 表示在 x 轴和 y 轴方向上网格的尺寸. 在波导边界上直接应用切向电场和法向磁场为零的边界条件, 最终得到本征方程:

$$\mathbf{A}\mathbf{X} = \lambda\mathbf{X} \quad (14)$$

其中本征值 $\lambda = -j\gamma/k_0$, 本征向量 $\mathbf{X} = [E_x, E_y, H_x, H_y]^T$, \mathbf{A} 为稀疏系数矩阵. 利用四分量 2-D FDFD 算法求得本征值后, 根据传播常数与截止频率的关系可以得到

$$k_c = \sqrt{k_0^2 - \lambda^2 k_0^2} \quad (15)$$

此时, 本征向量代表截止频率 k_c 对应的本征模切向场离散值, 而模式函数实际上就是功率归一化后的切向场函数, 所以在均匀网格的情况下, 离散的电压模式函数满足

$$\begin{aligned}
 \iint_S \mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_j &= \sum_{J=1}^{M-1} \sum_{I=1}^{N-1} [E_x(I, J) E_x(I, J) \\
 &\quad + E_y(I, J) E_y(I, J)] \nabla S = 1
 \end{aligned} \quad (16)$$

其中 M 和 N 分别代表划分网格的节点数, ∇S 为网格面积, 由式(16)可以看出, 模式函数的离散值即为归一化的本征向量. 本征向量对应的波形可以根据波阻抗判断, 由本征向量中相互垂直的电场和磁场离散值之比可以计算出波阻抗, 通过与截止频率计算得到的

TE 波和 TM 波波阻抗进行比较, 就可以判断出该模式是 TE 波还是 TM 波.

分析存在 TE/TM 简并模的规则波导时, 由式(14)求解的本征向量是 TE 模和 TM 模的混合场, 通过线性变换, 简并模 TE_{mn} 和 TM_{mn} 可以通过线性变换进行分解

$$\begin{bmatrix} \mathbf{E}_x^{\text{TE}} \\ \mathbf{E}_y^{\text{TE}} \\ \mathbf{E}_x^{\text{TM}} \\ \mathbf{E}_y^{\text{TM}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{I} & 0 & \mathbf{I} & 0 \\ 0 & \mathbf{I} & 0 & \mathbf{I} \\ 0 & -\text{diag}(Y_{\text{TE}}) & 0 & -\text{diag}(Y_{\text{TM}}) \\ \text{diag}(Y_{\text{TE}}) & 0 & \text{diag}(Y_{\text{TM}}) & 0 \end{bmatrix}^{-1} \cdot \begin{bmatrix} E_x \\ E_y \\ E_x \\ E_y \end{bmatrix} \quad (17)$$

最终, 通过式(15) ~ (17) 可以计算出截止频率和模式函数离散值, 由式(7) ~ (9) 就可以计算出波导阶梯的广义散射参数.

4 理论验证

本文利用 Matlab 编写程序计算矩形波导 (8.636mm × 5.328mm) 中单脊膜片和十字膜片的散射参数, 并给出在 20-25GHz 频率范围内与仿真软件 HFSS 的对比结果. 应用模式匹配法时, 为了避免相对收敛问题, 文献 [18] 给出了一种按照截止频率顺序选择模式的方法, 实验表明, 选取各区中截止频率小于 8 倍频率上限 ($f_{c_{\max}} \approx 8 \times 25$) 的所有模式参与计算可以得到很好的结果. 分析图 3 中对称结构单脊膜片时, 矩形波导存在 TE_{mn} 和 TM_{mn} 简并模, 通过式(17) 可以分离出相互简并的模式. 同时, 在分析单脊波

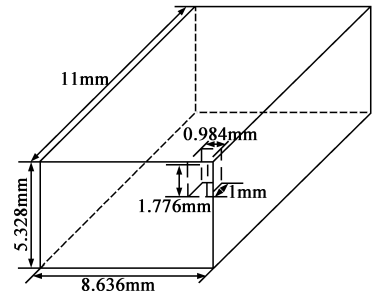


图3 矩形波导单脊膜片尺寸示意图

导时需要判断本征向量对应的波形, 例如图 4 所示为脊波导主模场图, 通过离散点的波阻抗可以确定为 TE 波. 选取矩形波导中前 132 个模式, 脊波导中前 116 个模式参与计算, 图 5 给出与 HFSS 仿真结果的对比曲线, 本文方法所得结果用线段标记, HFSS 所得散射参数幅度和相位曲线分别用菱形和星号进行了标记.

分析图 6 中十字膜片时, 分别选取矩形波导和十字波导前 132 和前 104 个模式, 通过离散点波阻抗可以判断出各个模式的波形, 图 7 给出其散射参数与 HFSS 仿真结果对比曲线, 本文方法所得结果用线段标记, HFSS 所得散射参数幅度和相位曲线分别用菱形和星号进行了标记.

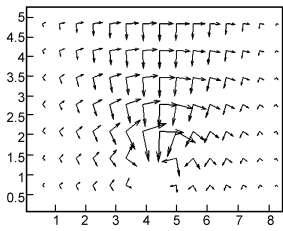


图4 单脊波导主模场分布

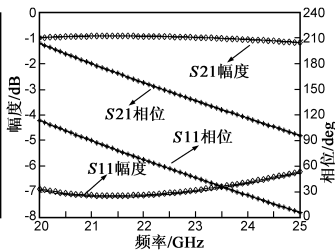


图5 单脊膜片S参数对比图

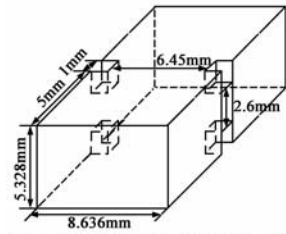


图6 矩形波导十字膜片尺寸示意图

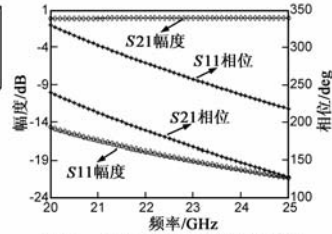


图7 十字膜片S参数对比图

表1 脊波导膜片计算效率比较

	HFSS	本文方法 (模式数:132/116)	本文方法 (模式数:91/81)
计算时间	68 (s)	90 (s)	52 (s)
占用内存	143 (MB)	64 (MB)	37 (MB)

表2 十字波导膜片计算效率比较

	HFSS	本文方法 (模式数:132/104)	本文方法 (模式数:115/91)
计算时间	88 (s)	84.5 (s)	72 (s)
占用内存	165 (MB)	54 (MB)	45 (MB)

由以上散射参数的对比示意图可以看出,本文方法与仿真软件 HFSS 的分析结果吻合良好,证明了本文方法不仅计算精度高,而且适用于解决单脊波导膜片和十字波导膜片等横截复杂的波导不连续性问题.在相同计算机配置和精度要求下,表1给出了本文方法和商用软件 HFSS 分析脊波导膜片所需的计算时间和内存资源,当采取前文所述的模式选取标准时,计算时间与 HFSS 有一定差距,但内存节省明显,事实上,针对本文中脊波导膜片而言,最高截止频率等于 6.7 倍频率上限时($f_{c_{\max}} \approx 6.7 \times 25$),结果已令人满意,其计算时间和内存可节省约 42%,均优于 HFSS.表2给出了十字波导膜片所需的计算时间和内存资源,其计算时间少于 HFSS,内存节省明显,针对本文中十字波导膜片而言,在最高截止频率等于 7.5 倍频率上限时($f_{c_{\max}} \approx 7.5 \times 25$),结果已令人满意,其计算时间和内存分别节省了大约 15% 和 17%.

5 结论

本文结合模式匹配和四分量二维频域有限差分法提出了一种分析复杂截面波导不连续性的混合算法.通过求解由二维频域有限差分法构造的切向场本征方

程,得到截止频率和模式函数离散值,再利用模式匹配法计算出波导阶梯的广义散射参数.最后,通过实例证明了该混合算法的准确性和高效性.这种新型算法在很大程度上扩展了模式匹配法的适用范围,对于分析截面形状复杂的波导不连续性问题有着广阔的应用前景.

参考文献:

- [1] CONCIAURO G, GUGLIELMI M, SORRENTINO R. Advanced Modal Analysis: CAD Techniques for Waveguide Components and Filters[M]. New York: Wiley, 2000.
- [2] 赵伟,赵永久,路宏敏.矩形波导不连续性的通用模式匹配法分析[J].西安电子科技大学学报,2008,35(5):894-898.
- [3] ZHAO Wei, ZHAO Yong-jiu, LU Hong-min. General analysis method of rectangular waveguide discontinuities by mode matching[J]. Journal of Xidian University, 2008, 35(5): 894-898. (in Chinese)
- [4] 孙保华,张福顺,刘其中.模式匹配法分析有限圆盘地面单极子天线[J].电子学报,2001,29(6):832-834.
- [5] SUN Bao-hua, ZHANG Fu-shun, LIU Qi-zhong. Analysis of monopole antennas on circular disk using mode matching method[J]. Acta Electronica Sinica, 2001, 29(6): 832-834. (in Chinese)
- [6] 张永鸿,薛良金,徐军.复功率守恒法的研究[J].电子学报,1998,26(9):71-74.
- [7] ZHANG Yong-hong, XUE Liang-jin, XU Jun. A study of the conservation of complex power technique[J]. Acta Electronica Sinica, 1998, 26(9): 71-74. (in Chinese)
- [8] 刘发林,徐善驾.波导不连续问题中基函数对收敛性能影响的研究[J].电子学报,2002,30(3):339-342.
- [9] LIU Fa-lin, XU Shan-Jia. Investigation on effect of basis functions on convergence property in analysis of waveguide discontinuity problems[J]. Acta Electronica Sinica, 2002, 30(3): 339-342. (in Chinese)
- [6] MONTGOMERY J P. On the complete eigenvalue solution of ridged waveguide[J]. IEEE Transactions on Microwave Theory and Techniques, 1971, 19(6): 547-555.
- [7] THAN Q C. Modes and cutoff frequencies of crossed rectangular waveguides[J]. IEEE Transaction on Microwave Theory and Technique, 1977, 25(7): 585-588.
- [8] 任列辉,邢锋,徐诚,等.用电磁场算子理论分析脊波导的传输特性[J].电子与信息学报,2004,26(2):326-331.
- [9] REN Lie-hui, XING Feng, XU Cheng, et al. Analysis of the transmission property of ridge waveguide with operator theory [J]. Journal of Electronics and Information Technology, 2004, 26(2): 326-331. (in Chinese)
- [9] BORNEMANN J, ARNDT F. Transverse resonance, standing

- wave, and resonator formulations of the ridge waveguide eigenvalue problem and its application to the design of E-plane finned waveguide filters[J]. IEEE Transactions on Microwave Theory and Techniques, 1990, 38(8): 1104 – 1113.
- [10] JIANG Z H, SHEN Z X. Full-wave analysis of cross-aperture waveguide couplers [J]. IEEE Transactions on Microwave Theory and Techniques, 2002, 12(7): 267 – 269.
- [11] ARNDT F, BRANDT J, CATINA V, et al. Fast CAD and optimization of waveguide components and aperture antennas by hybrid MM/FE/MoM/FD methods-State-of-the-art and recent advances [J]. IEEE Transactions on Microwave Theory and Techniques, 2004, 52(1): 292 – 305.
- [12] ARNDT F. Advanced hybrid EM CAD approach for fast design solutions [J]. IEEE Microwave Magazine, 2008, 9(6): 162 – 170.
- [13] 汪杰, 尹雷, 洪伟. 用区域分裂法求解波导不连续性问题 [J]. 红外与毫米波学报, 2002, 21(2): 157-60.
WANG Jie, YI Lei, HONG Wei. Analysis of waveguide discontinuity by the domain decomposition method [J]. Journal of Infrared and Millimeter Waves, 2002, 21(2): 157 – 60. (in Chinese)
- [14] KUSIEK A, MAZUR J. Analysis of scattering from arbitrary configuration of cylindrical objects using hybrid finite-difference mode-matching method [J]. Progress in Electromagnetics Research, 2009, 97: 105 – 127.
- [15] BEYER R, ARNDT F. Efficient modal analysis of waveguide filters including the orthogonal mode coupling elements by an MM/FE method [J]. IEEE Microwave and Guided Wave Letters, 1995, 5(1): 9 – 11.
- [16] ZHAO Y J, WU K L, CHENG K K M. A compact 2-D full-wave finite-difference frequency-domain method for general guided wave structures [J]. IEEE Transaction on Microwave Theory and Technique, 2002, 50(7): 1844 – 1848.
- [17] ZHAO W, DENG H W, ZHAO Y J. Application of 4-component compact 2-D FDFD method in analysis of lossy circular metal waveguide [J]. Journal of Electromagnetic Wave and Application, 2008, 22(17 – 18): 2297 – 2208.
- [18] 黄旻, 洪伟, 何立权. 关于模式匹配法相对收敛性问题的研究 [J]. 电子与信息学报, 1993, 15(4): 431 – 434.
HUANG Min, HONG Wei, HE Li-quan. Relative convergence problem in mode matching method [J]. Journal of Electronics and Information Technology, 1993, 15(4): 431 – 434. (in Chinese)

作者简介:



赵 伟 男, 1984 年 1 月出生于陕西省咸阳市. 南京航空航天大学攻读通信与信息系统专业博士研究生, 目前主要研究方向为微波器件与电路、计算电磁学等.

E-mail: zhaowei_email@163.com



赵永久 男, 1964 年 4 月出生于河北省昌黎县. 南京航空航天大学教授, 博士生导师, 目前主要研究方向为微波无源器件、计算电磁学、现代微波测量等.

E-mail: yjzhao@nuaa.edu.cn