交织法构造移位不等价的 ZCZ/LCZ 序列集

李玉博，许成谦
（燕山大学信息科学与工程学院，河北秦皇岛 066004）

摘 要： 本文给出了移位不等价序列集的概念，提出一种移位序列构造方法，并基于这种移位序列，利用交织法得到了多个移位不等价的低零相关区序列集．同以前方法相比扩展了序列集的数量，可以为准同步 CDMA 通信系统提供更多的扩频序列．通过本文方法还可以利用任意长度的完备序列来构造相互正交的零相关区序列集，放宽了对完备序列长度的限制，从而可以得到更多的相互正交的零相关区序列集．

关键词： 准同步 CDMA；交织法；移位序列；低零相关区；相互正交
中图分类号： TN911.2 **文献标识码：** A **文章编号：** 0372-2112（2011）04-0796-07

Construction of Cyclically Distinct ZCZ/LCZ Sequence Sets Based on Interleaving Technique

LI Yu-bo，XU Cheng-qian
（*College of Information Science and Engineering*，*Yanshan University*，*Qinhuangdao*，*Hebei* 066004，*China*）

Abstract： In this paper，A construction of shift sequence sets is presented，based on these shift sequence sets one can get many cyclically distinct zero-correlation zone（ZCZ）or low-correlation zone（LCZ）sequence sets by utilizing interleaving technique．Compared with previous constructions，the present method can provide more spread-spectrum sequences for quasi-synchronous CDMA（QS-CDMA）systems．More than that，mutually orthogonal sets of zero-correlation zone sequences are also constructed based on these shift sequence sets．

Key words： quasi-synchronous CDMA（QS-CDMA）；interleaving technique；shift sequence；zero-correlation zone or low-correlation zone（ZCZ/LCZ）；mutually orthogonal

1 引言

近些年来，准同步 CDMA（QS-CDMA）通信系统引起人们的广泛关注，准同步 CDMA 系统采用低零相关区序列集做为扩频序列．低零相关区序列集（ZCZ/LCZ）与传统的准正交序列不同，具有在一定区域内异相自相关函数和互相关函数值很小或者为零的特性，因而当系统的信号时延在不大于相关区长度时可以很好的降低甚至消除干扰．构造数量多且相关区长度较大的 ZCZ/LCZ 序列集成为当前研究热点，学者们提出一些低零相关区序列集构造法[1～11]．交织法是构造 ZCZ/LCZ 序列集的一类有效方法[1,2,4,6]．很多基于完备序列的 ZCZ 序列集构造法实质上就是移位交织法，例如文献[10,11]等．但是这些文献中给出的移位序列没有考虑序列移位等价的情况，因此得到的同一个 ZCZ 序列集内存在移位等价的 ZCZ 序列，这样的序列集在实际应用中，如果系统的同步误差稍大于序列相关区长度就会引起极大的干扰．本文定义了移位序列不等价的概念，提出一种移位序列构造方法，并且基于这类移位序列，利用交织法构造了多个移位不等价的 ZCZ/LCZ 序列集，本文方法可以得到多个低零相关区序列集，同一序列集内的序列是移位不等价的，且不同的序列集中的序列也是移位不等价的．同文献[1]相比，本文方法可以构造出更多的移位不等价的 ZCZ/LCZ 序列集．准同步 CDMA 系统中，每个小区分配一个低零相关区序列集，因此本文方法可以为更多的小区提供扩频序列．

本文方法还可以用来构造相互正交的 ZCZ 序列集，引入正交的 ZCZ 序列集概念的目的是为了提供更多能在准同步 CDMA 系统中使用的序列，文献[12]提出一种构造多个相互正交的 ZCZ 序列集的方法，可以构造出多个参数为 $ZCZ(mn,n,m-2)$ 的相互正交的 ZCZ 序列集，实质上也是一种移位交织法．但是文献[12]方

收稿日期：2010-04-05；修回日期：2010-07-26
基金项目：国家自然科学基金（No.60872061，No.60971126）；河北省自然科学基金（No.F2008000855）

法要求基序列长度 m 满足 $n|m$,这意味着长度为素数的完备序列是不满足要求的.完备序列存在是很有限的,这一条件使得可以应用的完备序列更加稀少.例如三元情况下,长度在 100 以内,只存在长度为 7,13,21,31,57,73 的完备序列,其中只有长度为 21 的序列满足要求.这样大大限制了交织法的应用范围.本文方法可以利用任意长度的完备序列来构造相互正交零相关区序列集.

2 基本概念

设 U 是一个复数序列集,序列个数为 M,序列周期为,表示为 $U=\{u_0,u_1,\cdots,u_{M-1}\}$,其中 $u_i=(u_{i,0},u_{i,1},\cdots,u_{i,N-1})$,$|u_{i,j}|=1$.

定义 1 设 $u_i,u_j\in U$,序列 u_i 和 u_j 的周期互相关函数定义如下:

$$R_{u_i,u_j}(\tau)=\sum_{t=0}^{N-1}u_{i,t}u^*_{j,t+\tau} \tag{1}$$

其中 $0\leqslant\tau<N$,$u^*_{j,t+\tau}$表示取共轭.当 $i=j$ 时,称为序列 u_i 的自相关函数,可以用 $R_{u_i}(\tau)$表示.$R_{u_i}(0)$称为同相自相关函数,若 $\tau\neq0$,$R_{u_i}(\tau)$称为异相自相关函数.

定义 2 设 $u_i,u_j\in U$,若当$|\tau|<T$ 且 $i\neq j$ 或者 $0<|\tau|<T$ 且 $i=j$ 时,序列相关函数都满足

$$\left|R_{u_i,u_j}(\tau)\right|\leqslant\delta \tag{2}$$

其中,δ 为一个与序列周期 N 相比很小的正数,则称序列集 U 是一个低相关区(LCZ)序列集,表示为 $LCZ(N,M,T,\delta)$.若 $\delta=0$,则称为零相关区(ZCZ)序列集,表示为 $ZCZ(N,M,T)$.

定义 3 设 $a=(a_0,a_1,\cdots,a_{N-1})$是一个周期为 N 的序列,如果序列自相关函数满足当 $\tau\neq0(\mathrm{mod}N)$时,$R_a(\tau)=-1$,则称序列 a 为理想的自相关二值序列.如果 $\tau\neq0(\mathrm{mod}N)$时,$R_a(\tau)=0$,则称序列 a 为完备序列.

定义 4 设 $a=(a_0,a_1,\cdots,a_{N-1})$和 $b=(b_0,b_1,\cdots,b_{N-1})$是两个周期为 N 的序列,如果对于 $0\leqslant i\leqslant N-1$,$0\leqslant\tau\leqslant N-1$ 有 $a_i=b_{i+\tau}$成立,则称序列 a 和 b 移位等价,否则称为移位不等价.若两序列集 A 和 B 中序列都是移位不等价的,则称序列集 A 和 B 是移位不等价序列集.

定义 5 设 $a=(a_0,a_1,a_2,\cdots,a_{N-1})$是一个周期为 N 的序列,$e_i=(e_{i,0},e_{i,1})$是长度为 2 的序列,其中 $e_{i,0},e_{i,1}\in\{0,1,2,\cdots,N-1\}$,构造一个 $N\times2$ 阶的矩阵如下:

$$\boldsymbol{U}_i=\begin{bmatrix} a_{0+e_{i,0}} & a_{0+e_{i,1}} \\ a_{1+e_{i,0}} & a_{1+e_{i,1}} \\ \vdots & \vdots \\ a_{N-1+e_{i,0}} & a_{N-1+e_{i,1}} \end{bmatrix} \tag{3}$$

将矩阵 $\boldsymbol{U}_i$ 的每行联接得到序列 $u_i=(a_{0+e_{i,0}},a_{0+e_{i,1}},\cdots,a_{N-1+e_{i,0}},a_{N-1+e_{i,1}})$,将其表示为 $u_i=I(S^{e_{i,0}}(a),S^{e_{i,1}}(a))$,其中 $I(\cdot)$表示交织操作,S 是向左循环移位运算,例如,$S^i(a)=(a_i,a_{i+1},\cdots,a_{i-1})$.序列 u_i 称为交织序列,序列 a 和 $e_i=(e_{i,0},e_{i,1})$分别称为交织序列 u_i 的基序列和移位序列.

对于同一基序列 a,两个不同的移位序列 $e_i=(e_{i,0},e_{i,1})$和 $e_j=(e_{j,0},e_{j,1})$可能产生两个移位等价的交织序列.因此,有必要定义移位序列不等价的概念.

定义 6 设 $u=I(S^{e_{i,0}}(a),S^{e_{i,1}}(a))$和 $v=I(S^{e_{j,0}}(a),S^{e_{j,1}}(a))$是基序列为 a 的两个交织序列,分别对应着移位序列 $e_i=(e_{i,0},e_{i,1})$和 $e_j=(e_{j,0},e_{j,1})$,若序列 u 和 v 移位不等价,则称移位序列 e_i 和 e_j 是不等价的,否则就是等价的.

定义 7 设两个序列集 $U=\{u_i\}_{0\leqslant i\leqslant M-1}$和 $V=\{v_i\}_{0\leqslant i\leqslant M-1}$,设 u_i 和 v_j 分别是序列集 U 和 V 中的任意序列,如果序列 u_i 和 v_j 互相关函数满足

$$R_{u_i,v_j}(0)=0 \tag{4}$$

则称序列集 U 和 V 是相互正交的.

引理 1[1] 设 $u=I(S^{e_{i,0}}(a),\pm S^{e_{i,1}}(a))$和 $v=I(S^{e_{j,0}}(a),\pm S^{e_{j,1}}(a))$是两个交织序列,基序列 a 长度为 N,u 和 v 分别对应着移位序列 $e_i=(e_{i,0},e_{i,1})$和 $e_j=(e_{j,0},e_{j,1})$,定义四个参数 $d_0=e_{i,0}-e_{j,0}$,$d_1=e_{i,1}-e_{j,1}$ $d_2=e_{i,0}-e_{j,1}$,和 $d_3=e_{i,1}-e_{j,0}-1$.都是模 N 运算.若移位序列满足 $e_i\neq e_j$ 时,$d_0\neq d_1$ 且 $d_2\neq d_3$,则序列 u 和 v 移位不等价.

3 ZCZ/LCZ 序列集的交织构造法

首先构造移位序列集合 $E=\{e_0,e_1,\cdots,e_{M-1}\}$,$e_i=(e_{i,0},e_{i,1})$,其中,$e_{i,0},e_{i,1}\in\{0,1,\cdots,N-1\}$.设 L 为正整数,$2<L<N$,对于任意 $e_i,e_j\in E$ 满足如下两个条件:

① $\min\limits_{e_i\neq e_j\in E}\{d_0,d_1\}\geqslant\dfrac{L}{2}$,$\min\limits_{e_i,e_j\in E}\{d_2,d_3\}\geqslant\dfrac{L-1}{2}$.

② $e_i,e_j\in E$,$e_i\neq e_j$ 时,有 $d_0\neq d_1$且 $d_2\neq d_3$.

然后选取具有低自相关特性的序列 a 做基序列,其异相自相关函数值最大值设为 δ.利用基序列 a 和移位序列集合 E 交织构造序列集合:

$U_1=\{u_i|0\leqslant i\leqslant M-1\}$,

$U_2=\{u_{i+M}|0\leqslant i\leqslant M-1\}$,

$u_i=I(S^{e_{i,0}}(a),S^{e_{i,1}}(a))$,

$u_{i+M}=I(S^{e_{i,0}}(a),-S^{e_{i,1}}(a))$.

将序列集合 U_1 和 U_2 合并得到更大的序列集 $U=U_1\cup U_2$.

引理 2[1] 上述交织构造法得到的序列集 U 为低相关区序列集,表示为 $LCZ(2N,2M,L,2|\delta|)$,并且序

列集中的序列移位不等价.若基序列 a 为完备序列,即 $\delta=0$,则上述构造得到的序列集 U 为零相关区序列集,表示为 $ZCZ(2N,2M,L)$.

4　移位不等价 ZCZ/LCZ 序列集的构造

由上节讨论可以看出,只要构造出符合条件的移位序列集 E,利用交织法就可以得到 ZCZ/LCZ 序列集.交织法要求移位序列满足两个条件,其中条件 1 是为了保证相关区长度,条件 2 保证了序列的移位不等价特性.不同的移位序列集对应得到不同的 ZCZ/LCZ 序列集,下面提出一种移位序列构造方法,从而利用交织法可以构造出多个移位不等价的 ZCZ/LCZ 序列集.

设 L 为正整数,$2<L<N$.构造位序移列集 $E=\{e_0,e_1,\cdots,e_{M-1}\}$,$e_i=(e_{i,0},e_{i,1})$,$0\leqslant i\leqslant M-1$,$e_{i,0},e_{i,1}\in\{0,1,2,\cdots,N-1\}$.

第一种情况:L 为偶数,取

$$M=\left\lfloor\frac{N-2}{L}\right\rfloor$$

对于 $0\leqslant i\leqslant M-1$,移位序列 e_i 构造如下:

当 $L\mid N-1$ 时,

$$e_i=\left(N-\frac{L}{2}i-x,\frac{L}{2}(i+1)+2+y\right)\tag{5}$$

其中 x,y 为正整数,$0\leqslant x+y\leqslant L-1$ 且 $x+y\neq\dfrac{N-3-kL}{2}$,$k=\left\{\dfrac{N-1}{L}-1,\dfrac{N-1}{L}-2\right\}$.

当 $L\nmid N-1$ 时,

$$e_i=\left(N-\frac{L}{2}i-x,\frac{L}{2}(i+1)+1+y\right)\tag{6}$$

其中,x,y 为正整数,当 N 为偶数时满足:$0\leqslant x+y\leqslant N-1-ML$;当 N 为奇数时满足:$0\leqslant x+y\leqslant N-1-ML$ 且 $x+y\neq\dfrac{N-1-ML}{2}$.

第二种情况:L 为奇数,取

$$M=\left\lfloor\frac{N-1}{L}\right\rfloor$$

对于 $0\leqslant i\leqslant M-1$,移位序列 e_i 构造如下:

当 $L\mid N$ 时,

$$e_i=\begin{cases}\left(N-\dfrac{i}{2}L-x,\dfrac{(i+1)L+1}{2}+1+y\right), & i\text{ 为偶数}\\ \left(\dfrac{(i+1)L}{2}+1+y,N-\dfrac{iL-1}{2}-x\right), & i\text{ 为奇数}\end{cases}\tag{7}$$

其中,x,y 为正整数,$0\leqslant x+y\leqslant L-2$.

当 $L\nmid N$ 时,

$$e_i=\begin{cases}\left(N-\dfrac{i}{2}L-x,\dfrac{(i+1)L+1}{2}+y\right), & i\text{ 为偶数}\\ \left(\dfrac{(i+1)L}{2}+y,N-\dfrac{iL-1}{2}-x\right), & i\text{ 为奇数}\end{cases}\tag{8}$$

其中,x,y 为正整数,满足:$x+y\leqslant N-ML$ 且 $x+y\neq\dfrac{N-ML}{2}$.

上面式子中,$\lfloor a\rfloor$表示取 a 的整数部分,移位序列中元素都是模 N 运算.例如,当 $i=0$,$x=0$ 时,各种情况下都有 $e_{i,0}=0(\mathrm{mod}N)$.将上述方法得到的移位序列集记为 $E(x,y)=\{e_0,e_1,\cdots,e_{M-1}\}$,不同的参数$(x,y)$的对应不同的移位序列集.

通过上面方法得到的移位序列都满足交织法中的两个条件,也就是说利用上面得到的移位序列,通过交织法可以得到低零相关区序列集,序列集中的序列都是移位不等价的.移位序列集的这些性质可以由以下定理 1 和定理 2 保证.

定理 1　设 $E(x,y)$是由上述构造法得到的含有 M 个序列的移位序列集,$e_i=(e_{i,0},e_{i,1})$和 $e_j=(e_{j,0},e_{j,1})$,$0\leqslant i,j<M$是其中任意两个移位序列,$e_{i,0},e_{i,1},e_{j,0},e_{j,1}\in\{0,1,2,\cdots,N-1\}$.记 $d_0=e_{i,0}-e_{j,0}$,$d_1=e_{i,1}-e_{j,1}$,$d_2=e_{i,0}-e_{j,1}$,$d_3=e_{i,1}-e_{j,0}-1$,都是模 N 运算.移位序列有具有如下性质:

$$\min_{e_i\neq e_j\in E}\{d_0,d_1\}\geqslant\frac{L}{2},\ \min_{e_i,e_j\in E}\{d_2,d_3\}\geqslant\frac{L-1}{2}$$

证明　不失一般性,假设 $0\leqslant i\leqslant j<M$,下面仅对 L 为偶数且 $L\mid N-1$ 时进行讨论,其它情况证明过程类似.

当 L 为偶数且 $L\mid N-1$ 时,由移位序列的构造过程计算得 $d_0=\dfrac{L}{2}(j-i)$,$d_1=N-\dfrac{L}{2}(j-i)$和 $d_2=N-2-\dfrac{L}{2}(i+j+1)-(x+y)$,$d_3=\dfrac{L}{2}(i+j+1)+1+(x+y)$.由 $0\leqslant i\leqslant j<M$ 可得 $0\leqslant j-i\leqslant M-1$,$0<i+j+1\leqslant 2M-1$.所以 $i\neq j$ 时有

$$d_0>\frac{L}{2}\tag{9}$$

$$d_1\geqslant N-\frac{(M-1)L}{2}\geqslant N-\frac{N-2}{2}+\frac{L}{2}>\frac{L}{2}\tag{10}$$

当 $i\leqslant j$ 时,有

$$\frac{L-1}{2}<d_3\leqslant ML-\frac{L}{2}+L=N-1-\frac{L}{2}\tag{11}$$

由 $d_2=N-1-d_3$ 得

$$\frac{L}{2}\leqslant d_2<N-\frac{L}{2}\tag{12}$$

由上述讨论得到结论:$\min\limits_{e_i\neq e_j\in E}\{d_0,d_1\}\geqslant\dfrac{L}{2}$ 且 $\min\limits_{e_i,e_j\in E}\{d_2,d_3\}\geqslant\dfrac{L-1}{2}$成立.其它情况证明过程类似.　证毕.

定理 2　设 $E(x,y)$是由上述构造法得到的一个移位序列集,$e_i=(e_{i,0},e_{i,1})$和 $e_j=(e_{j,0},e_{j,1})$是其中任意两个移位序列,$e_{i,0},e_{i,1},e_{j,0},e_{j,1}\in\{0,1,2,\cdots,N-1\}$.记

$d_0 = e_{i,0} - e_{j,0}$, $d_1 = e_{i,1} - e_{j,1}$, $d_2 = e_{i,0} - e_{j,1}$, $d_3 = e_{i,1} - e_{j,0} - 1$ 都是模 N 运算,$0 \leqslant i, j < M$.对于任意 $e_i \neq e_j$ 有 $d_0 \neq d_1$,且 $d_2 \neq d_3$.

证明 设 $0 \leqslant i < j < M$,分以下几种情况讨论:

当 L 为偶数且 $L | N-1$ 时,由定理 1 的证明过程可知,有 $d_0 = \frac{L}{2}(j-i)$, $d_1 = N - \frac{L}{2}(j-i)$,和 $d_2 = N - 2 - \frac{L}{2}(i+j+1) - (x+y)$, $d_3 = \frac{L}{2}(i+j+1) + 1 + (x+y)$.若 $d_0 = d_1$,则有 $N = (j-i)L$.由 $0 \leqslant j - i \leqslant M - 1$, $ML \leqslant N - 2$,得 $(j-i)L < N$ 与 $N = (j-i)L$ 相矛盾,故 $d_0 \neq d_1$.若 $d_2 = d_3$,则有

$$N - 3 = (i+j+1)L + 2(x+y) \tag{13}$$

设 $k = i + j + 1$, k 为整数.设 $N - 1 = mL$,上式化简为 $x + y = \frac{(m-k)L}{2} - 1$.因为 $0 \leqslant x + y \leqslant L - 1$,上式如果成立则取值应该在 $[0, L-1]$;

$m - k = 0$ 时, $x + y = -1$

$m - k = 1$ 时, $x + y = \frac{L}{2} - 1$

$m - k = 2$ 时, $x + y = L - 1$

$m - k \geqslant 3$ 时, $x + y \geqslant L + \frac{L}{2} - 1$

通过上述计算可以发现,当且仅当 $m - k = \{1, 2\}$ 时, $x + y$ 取值在 $[0, L-1]$ 内,进一步得 $k = \{m-1, m-2\} = \{\frac{N-1}{L} - 1, \frac{N-1}{L} - 2\}$.即 $k = \{\frac{N-1}{L} - 1, \frac{N-1}{L} - 2\}$ 时式(13)成立.与条件 $x + y \neq \frac{N-3-kL}{2}$, $k = \{\frac{N-1}{N} - 1, \frac{N-1}{L} - 2\}$ 相矛盾,所以式(13)不成立, $d_2 \neq d_3$.

当 L 为偶数且 $L \nmid N-1$ 时,由定理 1 的证明过程可得 $d_0 = \frac{(j-i)L}{2}$, $d_1 = N - \frac{(j-i)L}{2}$ 和 $d_2 = N - 1 - \frac{L}{2}(i+j+1) - (x+y)$, $d_3 = \frac{L}{2}(i+j+1) + (x+y)$,若 $d_0 = d_1$,则有 $N = (j-i)L$,由 $0 \leqslant j - i \leqslant M - 1$, $ML \leqslant N - 2$ 得 $(j-i)L < N$ 与 $N = (j-i)L$ 相矛盾,所以有 $d_0 \neq d_1$.若 $d_2 = d_3$,则有

$$N - 1 = (i+j+1)L + 2(x+y) \tag{14}$$

分两种情况讨论:当 N 为偶数时,则等式(14)左侧为奇数,因为 L 为偶数,则等式(14)右侧为偶数,矛盾,所以上式不成立.当 N 为奇数时,设 $k = i + j + 1$,化简得 $x + y = \frac{N-1-kL}{2}$.由于已知 $0 \leqslant x + y \leqslant N - 1 - ML$,进一步可以得到不等式 $0 \leqslant \frac{N-1-kL}{2} \leqslant N - 1 - ML$,计算得到 k 的取值范围 $2M - \left\lfloor \frac{N-1}{L} \right\rfloor \leqslant k \leqslant \left\lfloor \frac{N-1}{L} \right\rfloor$.由 $M = \left\lfloor \frac{N-2}{L} \right\rfloor$, $2 < L < N$ 可得 $\left\lfloor \frac{N-1}{L} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{N-2}{L} \right\rfloor = M$,代入不等式得: $M \leqslant k \leqslant M$.所以当且仅当 $k = M$,即 $x + y = \frac{N-1-ML}{2}$ 时式(14)成立,与初始条件 $x + y \neq \frac{N-1-ML}{2}$ 矛盾,所以式(14)不成立.由上述讨论可得到结论 $d_2 \neq d_3$.

当 L 为奇数时,证明过程类似.

综合上述讨论,得到结论 $d_0 \neq d_1$, $d_2 \neq d_3$,定理成立.证毕.

定理 3 选取异相自相关函数值最大值为 δ 的序列 a 做基序列,移位序列集为 $E(x, y)$,利用交织法构造得到的序列集 U 为低相关区序列集,表示为 $LCZ(2N, 2M, L, 2|\delta|)$,若 $\delta = 0$,则得到零相关区序列集 $ZCZ(2N, 2M, L)$,并且序列集中序列移位不等价.

证明 根据引理 1、引理 2 可以得到上述定理成立.证毕.

由定理3可知,利用本文构造法得到的移位序列应用到交织法中可以得到低零相关区序列集,序列集中的序列都是移位不等价的.如果选取不同的参数 (x, y),可以得到多个移位序列集,不同移位序列集对应着移位不等价的 ZCZ/LCZ 序列集,序列集间的移位不等价性由下面定理 4 保证.

定理 4 设 B 和 C 是两个由交织法构造的低零相关区序列集,参数为 $(2N, 2M, L, \delta)$,基序列 a 长度为 N.对应的移位序列集分别为 $E(x_1, y_1)$, $E(x_2, y_2)$.如果满足 $x_1 + y_1 \neq x_2 + y_2$,则序列集 B 和 C 是移位不等价的.

证明 设 $b_i \in B$, $c_j \in C$, $0 \leqslant i, j \leqslant M - 1$.由交织法构造过程可知

$$b_i = I(S^{e_{i,0}}(a), \pm S^{e_{i,1}}(a))$$

$$c_j = I(S^{e'_{j,0}}(a), \pm S^{e'_{j,1}}(a))$$

$$e_i = (e_{i,0}, e_{i,1}) \in E(x_1, y_1)$$

$$e'_j = (e'_{j,0}, e'_{j,1}) \in E(x_2, y_2)$$

下面仅对当 L 为偶数且 $L | N-1$ 时进行证明,其他情况类似.

当 L 为偶数且 $L | N-1$ 时,计算得 $d_0 = \frac{L}{2}(j-i) + x_2 - x_1$, $d_1 = \frac{L}{2}(i-j) + y_1 - y_2$, $d_2 = N - 2 - \frac{L}{2}(i+j+1) - (x_1 + y_2)$, $d_3 = \frac{L}{2}(i+j+1) + 1 + (y_1 - x_2) - N$.若 b_i 与 c_j 移位等价,则有 $d_0 = d_1$ 或 $d_2 = d_3$ 成立.若 $d_0 = d_1$ 且 $i = j$,则有 $x_2 - x_1 = y_1 - y_2$,即 $x_1 + y_1 = x_2 + y_2$,与 $x_1 + y_1 \neq x_2 + y_2$ 相矛盾.若 $d_0 = d_1$ 且 $i \neq j$,有下面

式子成立:

$$(j-i)L=(x_1+y_1)-(x_2+y_2) \tag{15}$$

因为 $0\leqslant x_1+y_1\leqslant L-1, 0\leqslant x_2+y_2\leqslant L-1$,可以推得不等式成立:

$$1-L\leqslant(x_1+y_1)-(x_2+y_2)\leqslant L-1 \tag{16}$$

由上式可知所以等式(15)不可能成立,故 $d_0\neq d_1$.若 $d_2=d_3$,则推得

$$2N-3=(i+j+1)L+(x_1+y_1)+(x_2+y_2) \tag{17}$$

由于下面不等式成立:

$$\begin{aligned}&(i+j+1)L+(x_1+y_1)+(x_2+y_2)\\&\leqslant(2M-1)L+2(L-1)\leqslant 2N-4-L\end{aligned} \tag{18}$$

可以推得 $2N-3\leqslant 2N-4-L$,矛盾,所以 $d_2\neq d_3$.由引理 1 可得,b_i 与 c_j 移位不等价.其它情况类似,得到结论移位序列 $e_i=(e_{i,0},e_{i,1})$ 和 $e_j^{\prime}=(e_{j,0}^{\prime},e_{j,1}^{\prime})$ 不等价,对应的低零相关区序列集 B 和 C 是移位不等价的,定理 4 成立.

由定理 4 可知,通过选取满足条件的参数 (x,y) 就可以构造得到多个移位不等价的低零相关区序列集.下节对移位不等价序列集数目进行讨论.

5　移位不等价的 ZCZ/LCZ 序列集数目的讨论

由移位序列构造法可以得到多个不等价的移位序列集,从而可以利用交织法构造出多个移位不等价的 ZCZ/LCZ 序列集,下面对每种情况下可以得到的不等价 ZCZ/LCZ 序列集的个数进行讨论.

定理 5　设 Q 表示通过本文方法构造的移位不等价 ZCZ/LCZ 序列集的个数,则有

L 为偶数时,

$$Q=\begin{cases}L-2, & L\mid(N-1)\\ N-ML, & L\nmid(N-1)\text{且 } N\text{ 偶数}\\ N-ML-1, & L\nmid(N-1)\text{且 } N\text{ 奇数}\end{cases} \tag{19}$$

L 为奇数时,

$$Q=\begin{cases}L-1, & L\mid N\\ N-ML-1 & L\nmid N\end{cases} \tag{20}$$

证明　设移位序列集 $E(x,y)$ 是由上述移位序列构造法得到,将各种情况讨论如下:

第一种情况:L 为偶数.

当 $L\mid(N-1)$ 时,由移位序列的构造过程可知 $x+y$ 取值满足:$0\leqslant x+y\leqslant L-1$ 且 $x+y\neq\dfrac{N-3-kL}{2}$,$k=\left\{\dfrac{N-1}{N}-1,\dfrac{N-1}{L}-2\right\}$.所以 $x+y$ 可以取到 $[0,L-1]$ 范围内其它 $L-2$ 个值,又由定理 4 知,当 $x_1+y_1\neq x_2+y_2$ 时,移位序列集 $E(x_1,y_1)$ 和 $E(x_2,y_2)$ 是不等价的,也就是说不同的 $x+y$ 的取值对应着不等价的移位序列集.所以可以得到 $L-2$ 个不等价的移位序列集,从而对应着 $L-2$ 个移位不等价的 ZCZ/LCZ 序列集.

当 $L\nmid(N-1)$ 且 N 为偶数时,由 $0\leqslant x+y\leqslant N-1-ML$ 可知,$x+y$ 可以取到满足条件的 $N-ML$ 个值,由定理 4 可知,可以得到 $N-ML$ 个不等价的移位序列集,从而对应着 $N-ML$ 个移位不等价的 ZCZ/LCZ 序列集.

当 $L\nmid(N-1)$ 且 N 为奇数时,由 $0\leqslant x+y\leqslant N-1-ML$ 且 $x+y\neq\dfrac{N-1-ML}{2}$ 可知,$x+y$ 可以取到满足条件的 $N-ML-1$ 个值,由定理 4 可知,可以得到 $N-ML-1$ 个不等价的移位序列集,从而对应着 $N-ML$ 个移位不等价的 ZCZ/LCZ 序列集.

第二种情况:L 为奇数时,证明过程同上面类似.证毕.

下面对本文方法得到的不等价序列集数目与文献[1]的结果做比较.

表 1　序列集数目的比较

序列集参数 (N,M,L)	文献[1]方法	本文方法
$L\mid(N-1)$ 且 L,N 为偶数	1	$L-2$
$L\nmid(N-1)$ 且 L,N 为偶数	1	$N-ML$
$L\nmid(N-1)$ 且 L 偶数,N 奇数	1	$N-ML-1$
$L\mid N$ 且 L 奇数	1	$L-1$
$L\nmid N$ 且 L 奇数	1	$N-ML-1$

表 1 中,L 表示相关区长度,N 表示序列长度,M 表示序列集中的序列数目.由表 1 可以看出,设定低零相关区序列集的三个参数 (N,M,L),利用本文方法可以得到更多的低零相关区序列集,这是通过选取不同参数 (x,y) 构造得到不同的移位序列集来实现的.在准同步 CDMA 系统中,每个小区分配一个低零相关区序列集,所以利用本文方法可以得到更多的 ZCZ/LCZ 序列集来支持更多的用户.

下面表 2 列出一些具体的移位序列的例子.并与文献[1]的结果做比较.通过表 2 可以发现,本文方法可以构造出多个移位序列集.例如,当取 $N=21,L=7,M=2$ 时,本文可以得到 6 个移位序列集,而文献[1]只能得到一个.因此,若利用长度为 21 的理想二值自相关序列或完备序列作为基序列,利用本文的移位序列可以分别交织得到 6 个参数为 $(42,4,7)$ 的移位不等价的 ZCZ/LCZ 序列集,而文献[1]只能得到一个.由此可见,本文方法扩展了交织法的应用,可以得到多个移位不等价的低零相关区序列集,从而为准同步 CDMA 系统提供更多的扩频序列.

表 2　当 $N=21$, $L=7$, $M=2$ 时的移位序列集

文献[1]构造法	本文构造法					
	$E(0,0)$	$E(1,0)$	$E(1,1)$	$E(2,1)$	$E(2,2)$	$E(3,2)$
$e_0=(0,17)$	$e_0=(0,5)$	$e_0=(20,5)$	$e_0=(20,6)$	$e_0=(19,6)$	$e_0=(19,7)$	$e_0=(18,7)$
$e_1=(13,4)$	$e_1=(8,18)$	$e_1=(8,17)$	$e_1=(9,17)$	$e_1=(9,16)$	$e_1=(10,16)$	$e_1=(10,15)$

6　相互正交的 ZCZ 序列集的构造

定理 6　设 B 和 C 是两个交织法构造的零相关区序列集 $ZCZ(2N,2M,L)$，基序列 a 是一个长度为 N 的完备序列. 序列集 B 和 C 对应的移位序列集分别是 $E(x_1,y_1)$, $E(x_2,y_2)$，如果参数 (x_1,y_1), (x_2,y_2) 满足下面式子：

当 L 为偶数时

$$\begin{cases}\dfrac{L}{2}(j-i)+x_2-x_1\neq 0(\bmod N)\\[2mm]\dfrac{L}{2}(i-j)+y_1-y_2\neq 0(\bmod N)\end{cases}\tag{21}$$

当 L 是奇数时

$$\begin{cases}\dfrac{L}{2}(i-j)+y_1-y_2\neq 0(\bmod N)\\[2mm]\dfrac{L}{2}(j-i)+x_2-x_1\neq 0(\bmod N)\\[2mm]\dfrac{L}{2}(i+j+1)+1+y_1+x_2-N\neq 0(\bmod N)\\[2mm]N-\dfrac{L}{2}(i+j+1)-(x_1+y_2)-1\neq 0(\bmod N)\end{cases}\tag{22}$$

式中，$0\leqslant i,j\leqslant M-1$. 则序列集 B 和 C 是相互正交的零相关区序列集.

证明　由于序列 a 是完备序列，由定理 3 可知，序列集 B 和 C 是两个零相关区序列集. 设 b_i 和 c_j 分别是序列集 B 和 C 中的序列. 有

$$b_i=I(S^{e_{i,0}}(a),\ \pm S^{e_{i,1}}(a)),$$
$$c_j=I(S^{f_{j,0}}(a),\ \pm S^{f_{j,1}}(a)).$$
$$e_i=(e_{i,0},e_{i,1})\in E(x_1,y_1),$$
$$f_j=(f_{j,0},f_{j,1})\in E(x_2,y_2).$$

当 L 为偶数时，计算得：

$$d_0,d_1\in\left\{\frac{L}{2}(j-i)+x_2-x_1,\ \frac{L}{2}(i-j)+y_1-y_2\right\}$$

当 L 是奇数时，计算得：

$$d_0,d_1\in\left\{\frac{L(j-i)}{2}+x_2-x_1,\frac{L(i+j+1)}{2}+1+y_1+x_2-N,\frac{L(i-j)}{2}+y_1-y_2,N-\frac{L(i+j+1)}{2}-(x_1+y_2)-1\right\}$$

计算序列 b_i 和 c_j 的同相互相关函数得

$$R_{b_i,c_j}(0)=R_a(-d_0)\pm R_a(-d_1)$$

当 d_0, $d_1\neq 0(\bmod N)$ 时，有 $R_{b_i,c_j}(0)=0$，此时序列集 B 和 C 中的序列是正交的. 证毕.

下面列举一个构造相互正交 ZCZ 序列集的例子.

例 1　选取长度为 21 的三元完备序列 a 做基序列如下：

$$a=(-++-0+0+-+++++--0-+00)$$

“+”表示“1”，“−”表示“−1”. 相关区长度设为 $L=7$，则 $M=2$，利用表 1 的移位序列集可以得到 6 个移位不等价零相关区序列集 $ZCZ(42,4,7)$. 设 $E(0,0)$, $E(1,0)$, $E(1,1)$, $E(2,1)$, $E(2,2)$, $E(3,2)$ 依次对应着 ZCZ 序列集 $U^0,U^1,\cdots,U^5$. 则 U^0,U^2,U^4 是相互正交的 ZCZ 序列集. U^1,U^3,U^5 是相互正交的 ZCZ 序列集. ZCZ 序列集 U^0,U^2,U^4 如下：

$$U^0=\{u_0^0,u_1^0,u_2^0,u_3^0\},$$
$$U^2=\{u_0^2,u_1^2,u_2^2,u_3^2\},$$
$$U^4=\{u_0^4,u_1^4,u_2^4,u_3^4\}.$$

$u_0^0=(00-++0++--0+++0+++-++$
$-+-+0+-++-0-00--+++0-)$

$u_1^0=(+--++0+0+-++++---00+-$
$0++0-0+-+++++-+0-+-00)$

$u_2^0=(00--+0+--+0-+-0-+---+$
$++++0+++--0-00+--+-0+)$

$u_3^0=(++--+0+0+++-+--+-00--$
$0+-0+0---+-+---0+++00)$

$u_0^2=(0+00-++-++-+0+++0++--$
$-+0+-+++0+0---+0+--+0)$

$u_1^2=(-0+-+++0+0+--+-+0--0+$
$+000+--++++-+0+++0-+-)$

$u_2^2=(0-00--+++---0-+-0-++-$
$++0+++-+0+0-+--0--++0)$

$u_3^2=(-0++++-+0+0++----0+-0+$
$-000--++-+---0-+-0+++)$

$u_0^4=(+00+0--+++++-+0++-0-+$
$0--+++0+0+-++-+--00-+)$

$u_1^4=(+-+0+-+++0-0--0+-++-$
$000+-0+++--+0+++0+++--)$

$u_2^4=(+00-0+--+-+---0-++0++$
$0-++-+0+0+++----+00--)$

$u_3^4=(+++0+++-+0-0-+0---++$
$000--0+-++--0-+-0-+--+)$

可以验证上面 3 个序列集是相互正交的 ZCZ 序列集，参数为 $ZCZ(42,4,7)$，并且移位不等价.

7 结束语

本文提出一种新的移位序列集构造方法,基于这种移位序列可以利用交织法构造出多个移位不等价的低零相关区序列集,讨论了移位不等价 ZCZ/LCZ 序列集的存在数目.通过选择不同的参数可以得到多个移位不等价的 ZCZ/LCZ 序列集,同以前的方法相比 ZCZ/LCZ 序列集数目得到很大增加,应用到准同步 CDMA 系统中可以支持更多的用户.本文方法还可以构造相互正交的 ZCZ 序列集,放宽了对完备序列长度的限制,可以利用任意长度的完备序列做基序列来构造相互正交的 ZCZ 序列集,可以为准同步 CDMA 系统提供更多的相互正交的 ZCZ 序列集.

参考文献

[1] Zhou Z C,Tang X H,et al.A new class of sequences with zero or low correlation zone based on interleaving technique[J].IEEE Transactions on Information Theory,2008,54(9):4267 – 4273.

[2] Zhou Z C,Pan Zhen,Tang X H.A new families of optimal zero correlation zone sequences based on interleaved technique and perfect sequences [J].IEICE Transactions on Fundamentals,2008,E91 – A(12):3691 – 3697.

[3] 江文峰,曾祥勇,胡磊等.一类零相关区序列集构造方法的改进[J].电子学报,2005,33(8):1476 – 1479.
Jang Wenfeng,Zeng Xiangyong,Hu Lei.An improved method of construction ZCZ sequence sets [J].Acta Electronica Sinica,2005,33(8):1476 – 1479.(in Chinese)

[4] Tang X H.ZCZ sequences construction from perfect sequences based on interleaved technique [A].Proceeding of the Second International Workshop on Sequence Design and Its Application in Communication [C].Shimonseki,Japan,2005,82 – 85.

[5] Tang X H,Mow W H.A new systematic construction of zero correlation zone sequences based on interleaved perfect sequences[J].IEEE Transactions on Information Theory,2008,54(12):5729 – 5734.

[6] Hu H,Gong G.New sets of zero or low correlation zone sequences via interleaving techniques [J].IEEE Transactions on Information Theory,2010,56(4):1702 – 1713.

[7] Wang J S,Qi W F.A large class of binary ZCZ sequence families constructed by period dubbing [J].Journal of electronics (China),2007,24(3):301 – 304.

[8] 李兆斌,蒋挺,周正.ZCZ 屏蔽阵列偶集的研究[J].电子学报,2009,37(3):489 – 493.
Li Zhao-bin,Jiang Ting,Zhou Zheng.Study on ZCZ punctured array pairs set [J].Acta Electronica Sinica,2007,24(3):301 – 304.(in Chinese)

[9] 罗仁泽,成先涛,敬龙江等.一种新的低/零自相关边峰训练序列设计方法[J].电子学报,2005,33(10):1741 – 1744.
Luo Ren-ze,Cheng Xian-tao,Jing Long-jiang,et al.A novel design method for training sequence with low-lobe value [J].Acta Electronica Sinica,2005,33(10):1741 – 1744.(in Chinese)

[10] S Matsufuji,N Kuroyanagi,N Suehiro,et al.Two types of polyphase sequence sets for approximately synchronized CDMA systems [J].IEICE Transactions on Fundamentals,2003,E86 – A(1):229 – 234.

[11] T Hayashi.Zero-correlation zone sequence set constructed from a perfect sequence [J].IEICE Transactions on Fundamentals,2007,E89 – A(5):1107 – 1111.

[12] 曾祥勇,程池,胡磊等.一类相互正交的零相关区序列集的构造[J].电子与信息学报,2006,28(12):2347 – 2350.
Zeng Xiang-yong,Cheng Chi,Hu Lei,et al.Construction of mutually orthogonal sets of zero correlation zone sequences [J].Journal of Electronics & Information Technology,2006,28(12):2347 – 2350.(in Chinese)

作者简介

李玉博　男,1985 年生,河北衡水人.2007 年毕业于燕山大学电子信息工程专业,现为燕山大学电路与系统专业博士研究生,主要研究方向为扩频序列设计.
E-mail:Liyubo6316@163.com

许成谦　男,1961 年生,陕西城固人.1997 年获北京邮电大学信号与信息处理专业博士学位,现为燕山大学教授、博士生导师.主要研究方向为编码理论、密码学、信号设计等.
E-mail:cqxu@ysu.edu.cn