

平移不变空间中信号的 min-max 插值重建方法

赵君喜

(南京邮电大学理学院, 江苏南京 210046)

摘要: 在一般平移不变子空间框架下讨论信号的有限非一致采样重建的问题. 基于信号的子空间表示, 本文给出一般信号在 min-max 插值准则下的最优插值方法以及相应的非迭代算法. 该方法可以导出著名带限信号的 Yen 插值. 数值实验表明所给方法能十分有效地重建信号.

关键词: 非一致采样; 插值; 尺度函数; 平移不变空间; min-max 重建

中图分类号: TN919 **文献标识码:** A **文章编号:** 0372-2112 (2011) 03-0538-05

Min-Max Reconstruction of Signals in a Shift-Invariant Space

ZHAO Jun-xi

(College of Science, Nanjing University of Posts and Telecommunications, Nanjing, Jiangsu 210046, China)

Abstract: Signal reconstruction from finitely number of non-uniform samples on a interval is considered in the frame of shift invariant space. We derive a new interpolation method that is approximately optimal at min-max criterion for signals in a shift invariant space, and can regain Yen's interpolator for band-limited signals. Based on the derived interpolator, we also propose an effective non-iterative algorithm for min-max signal reconstruction. Some numerical examples are given to show the effectiveness of the new method.

Key words: non-uniformly sampling; interpolation; scaling function; shift-invariant space; min-max reconstruction

1 引言

信号由非一致采样进行信号的插值问题是信号处理理论中经常研究的一个问题, 并应用于天线与不规则分布阵列分析设计, X 射线成像 (tomography), 射点天文 (astronomy), 合成孔径雷达 (aperture radar) 等^[1~3]. 一个关键的问题就是从信号的有限个采样点给出信号在给定区间上的理想重建. 在现有文献中, 一些由有限多个非一致采样对信号的插值方法被提出^[4~10], 特别是针对带限信号, Yen 插值是非常有名的, 被证明在许多准则下是最优的, 并广泛应用到许多问题中.

针对一般平移不变空间中的信号的重建和插值也被许多学者进行了研究^[7~16]. 在非迭代插值算法中, 理想的插值公式是非常期待的. 下用无限求和公式作截断, 得到的重建公式不是理想的. 依据最小方, 极小能量等准则得到的插值是比较理想的, 如 Yen 插值公式和一些针对样条函数类信号的插值, 特别是 Yen 插值器被证明在极小能量、最小均方等多种准则下是最佳的^[5]. 迭代算法通常也是有效的且数值稳定性好, 但需要有较强的采样密度和大的运算代价.

众所周知, 信号的插值在样点附近一般有更好的逼近效果, 而在距离样点远的位置插值效果要差一些. 文 [16] 对信号插值的敏感性作了分析. 因此, 衡量信号的插值性能的最有效的准则是用点态方式, 即衡量插值在特定点上重建的可信度, min-max 准则是常用的^[5~8]. 本文研究 min-max 差准则下的最优插值问题, 在平移不变空间的框架下给出一般插值方法, 可以获得理想的重建效果. 这样的插值不仅可应用于非带限信号, 而且可用于多尺度函数空间和多小波空间, 同时也非常容易推广到多维情况. 特别一提的是, 我们的插值方法在带限情况下又导出 Yen 插值器, 这一方面表明 Yen 插值器也是 min-max 准则最优的, 另一方面也表明我们的插值是 Yen 型插值在一般平移不变空间的推广. 此外, 我们给出新插值的一个有效算法通过最小二乘法求得信号的插值, 避免了因求插值公式需要求逆矩阵带来的数值稳定性问题.

2 min-max 插值问题

本文我们假设信号是属于某个平移不变空间, 它不仅包含了带限信号和其他常用信号, 更被广泛用于小波

理论和逼近理论. 为了方便, 我们主要讨论一维信号, 但允许平移不变空间有多生成元.

用 $L^2(R)$ 表示一维能量有限信号空间, $\|f\|^2 = \int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^2 dt$ 是信号 $f(t)$ 能量, \langle, \rangle 表示内积. 给定 K 个函数 $\varphi_1(t), \varphi_2(t), \dots, \varphi_K(t) \in L^2(R)$, 由它们生成的平移不变空间为

$$X = \text{close} \left\{ f(t) = \sum_{k=1}^K \sum_n c_k(n) \varphi_k(t-n) \right. \\ \left. : (c_k(n)) \in l^2, k=1, 2, \dots, K \right\}$$

称 $\varphi_1(t), \varphi_2(t), \dots, \varphi_K(t)$ 是 X 的生成函数或尺度函数. 为使信号表示稳定, 假定 $\{\varphi_k(t-n) : n \in Z, k=1, 2, \dots, K\}$ 构成 X 的一个框架, 即存在常数 $0 < A \leq B < +\infty$ 使得, 对任意的 $f \in X$,

$$A \|f\|^2 \leq \sum_{k=1}^K \sum_n |\langle f, \varphi_k(t-n) \rangle|^2 \leq B \|f\|^2 \quad (1)$$

使上式成立的最大 A 和最小 B 分别称为框架下界和上界. 记 $\{\varphi_k(t-n) : n \in Z, k=1, 2, \dots, K\}$ 的对偶框架为 $\{\psi_{k,n} : k=1, 2, \dots, K, n \in Z\}$, 它的框架下、上界分别为 B^{-1} 和 A^{-1} .

为使平移空间 X 的采样有意义及插值可行, 我们一步假设, 存在常数 $C > 0$, 使得 $\sum_{k=1}^K \sum_n |\varphi_k(t-n)| < C, t \in [0, 1)$.

对于 $f(t) \in X$ 及它的 M 个采样 $f(t_1), f(t_2), \dots, f(t_M)$, 我们采用 $\tilde{f}(t) = \sum_{m=1}^M h_m(t) f(t_m)$ 来插值 $f(t)$, 并采用 min-max 误差准则

$$\varepsilon(\tau) = \min_{|h_m|} \sup_{f \in X, f \neq 0} \frac{|f(\tau) - \sum_{m=1}^M h_m(\tau) f(t_m)|}{\|f\|} \quad (2)$$

以这个准则给出的插值能以好的局部性逼近原信号. 在文[5~8]中, 作者研究了带限信号的 min-max 插值, 这里, 我们在一般平移不变空间中给出 min-max 插值公式及其算法.

3 min-max 插值

给定信号 $f(t) \in X$ 的 M 个采样 $f(t_1), f(t_2), \dots, f(t_M)$, τ 是任意一点. 我们考虑下述优化问题

$$\min_{|h_m|} \sup_{f \in X, f \neq 0} \frac{|f(\tau) - \sum_{m=1}^M h_m(\tau) f(t_m)|^2}{\|f\|^2} \quad (3)$$

记 $\tilde{f}(t) = \sum_{m=1}^M h_m(t) f(t_m)$, 可知 $\tilde{f}(\tau) = \sum_n \sum_{k=1}^K \langle f, \psi_{k,n} \rangle \varphi_k(\tau-n)$. 于是

$f, \psi_{k,n} \rangle \sum_{m=1}^M h_m(\tau) \varphi_k(t_m-n)$. 于是

$$\begin{aligned} |f(\tau) - \tilde{f}(\tau)|^2 &= \left| \sum_n \sum_{k=1}^K \langle f, \psi_{k,n} \rangle [\varphi_k(\tau-n) - \sum_{m=1}^M h_m(\tau) \varphi_k(t_m-n)] \right|^2 \\ &\leq \sum_n \sum_{k=1}^K |\langle f, \psi_{k,n} \rangle|^2 \sum_n \sum_{k=1}^K |\varphi_k(\tau-n) - \sum_{m=1}^M h_m(\tau) \varphi_k(t_m-n)|^2 \\ &\leq A^{-1} \cdot \|f\|^2 \cdot \sum_n \sum_{k=1}^K |\varphi_k(\tau-n) - \sum_{m=1}^M h_m(\tau) \varphi_k(t_m-n)|^2 \end{aligned}$$

为了简明起见, 将上式写成向量形式

$$|f(\tau) - \tilde{f}(\tau)|^2 \leq A^{-1} \|f\|^2 \cdot \sum_{k=1}^K \|e_{k,\tau} - \sum_{m=1}^M h_m(\tau) e_{k,m}\|^2$$

其中, $e_{k,\tau}^T = (\varphi_k(\tau-n))_n, e_{k,m}^T = (\varphi_k(t_m-n))_n, k=1, 2, \dots, K$. 于是由上式我们得到

$$\sup_{f \in V(\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_K)} \frac{|f(\tau) - \tilde{f}(\tau)|^2}{\|f\|^2} \leq A^{-1} \sum_{k=1}^K \|e_{k,\tau} - \sum_{m=1}^M h_m(\tau) e_{k,m}\|^2$$

另一方面, 由 $B^{-1} \|f\|^2 \leq \sum_{k=1}^K \sum_n |\langle f, \psi_{k,n} \rangle|^2 \leq A^{-1} \|f\|^2$, 可以得到

$$\begin{aligned} \sup_{f \in V(\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_K)} \frac{|f(\tau) - \tilde{f}(\tau)|^2}{\|f\|^2} &= \sup_{f = \sum_n \sum_{k=1}^K c_k(n) \varphi_k(t-n), \|f\| \leq 1} \left| \sum_n \sum_{k=1}^K c_k(n) [\varphi_k(\tau-n) - \sum_{m=1}^M h_m(\tau) \varphi_k(t_m-n)] \right|^2 \\ &\geq \sup_{f = \sum_n \sum_{k=1}^K c_k(n) \varphi_k(t-n), \|c_k(n)\|^2 \leq B^{-1}} \left| \sum_n \sum_{k=1}^K c_k(n) [\varphi_k(\tau-n) - \sum_{m=1}^M h_m(\tau) \varphi_k(t_m-n)] \right|^2 \\ &= \sup_{\|c_k(n)\|^2 \leq B^{-1}} \left| \sum_n \sum_{k=1}^K c_k(n) [\varphi_k(\tau-n) - \sum_{m=1}^M h_m(\tau) \varphi_k(t_m-n)] \right|^2 \\ &= B^{-1} \sum_{m=1}^M \|e_{k,\tau} - \sum_{m=1}^M h_m(\tau) e_{k,m}\|^2 \quad (4) \end{aligned}$$

这样我们就得到

$$\begin{aligned} B^{-1} \sum_{k=1}^K \|e_{k,\tau} - \sum_{m=1}^M h_m(\tau) e_{k,m}\|^2 &\leq \sup_{f \in V(\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_K)} \frac{|f(\tau) - \tilde{f}(\tau)|^2}{\|f\|^2} \\ &\leq A^{-1} \sum_{k=1}^K \|e_{k,\tau} - \sum_{m=1}^M h_m(\tau) e_{k,m}\|^2 \quad (5) \end{aligned}$$

因此, 极小化 $\varepsilon(\tau)^2$ 等价于极小化 $E(\tau) = \sum_{k=1}^K \|e_{k,\tau} - \sum_{m=1}^M h_m(\tau) e_{k,m}\|^2$

$\sum_{m=1}^M h_m(\tau) \mathbf{e}_{k,m} \|^2$, 从而, 优化问题(3)近似地等价于

$$\min_{\{h_m\}} \sum_{k=1}^K \left\| \mathbf{e}_{k,\tau} - \sum_{m=1}^M h_m(\tau) \mathbf{e}_{k,m} \right\|^2 \quad (6)$$

特别当 $\mathbf{A} = \mathbf{B}$ 及 $\mathbf{A} \approx \mathbf{B}$ 时, min-max 插值问题就可完全由上述极小化得到.

为了极小化 $E(\tau)$, 我们将其进一步表示为

$$E(\tau) = \sum_{k=1}^K \left\| \mathbf{e}_{k,\tau} \right\|^2 - 2 \sum_{k=1}^K \mathbf{e}_{k,\tau}^T \mathbf{A}_k \mathbf{H}(\tau) + \mathbf{H}^T(\tau) \left(\sum_{k=1}^K \mathbf{A}_k^T \mathbf{A}_k \right) \mathbf{H}(\tau) \quad (7)$$

这里, $\mathbf{H}(\tau) = (h_1(\tau), h_2(\tau), \dots, h_M(\tau))^T$, $\mathbf{A}_k = (\mathbf{e}_{k,1}, \mathbf{e}_{k,2}, \dots, \mathbf{e}_{k,M})$, $k = 1, 2, \dots, K$. $E(\tau)$ 的梯度为 $\frac{\partial E(\tau)}{\partial \mathbf{H}(\tau)} = -2 \sum_{k=1}^K \mathbf{A}_k^T \mathbf{e}_{k,\tau} + 2 \sum_{k=1}^K \mathbf{A}_k^T \mathbf{A}_k \mathbf{H}(\tau)$. 由 $\frac{\partial E(\tau)}{\partial \mathbf{H}(\tau)} = 0$ 可以得到

$$\mathbf{H}(\tau) = \left(\sum_{k=1}^K \mathbf{A}_k^T \mathbf{A}_k \right)^{-1} \sum_{k=1}^K \mathbf{A}_k^T \mathbf{e}_{k,\tau} \quad (8)$$

可以证明, $\sum_{k=1}^K \mathbf{A}_k^T \mathbf{A}_k$ 是可逆的当且仅当采样点是非冗余的, 即不存在不全为零的常数 $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_M$ 使对任何 $f \in V(\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_M)$, $\sum_{l=1}^M \lambda_l f(t_l) = 0$. 当采样冗余时, 任何函数在一些采样点处的样值实际上是可以由其他样值表示出来的, 这样的“多余”采样点可以通过取定多个已知函数来判断, 加以剔除, 不影响信号的重建. 当仅有一个尺度函数时, 上述矩阵的逆可以由广义逆来代替.

定理 对于任意的 $f(t) \in V(\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_K)$, 已知它在 M 个非冗余得到采样点 $t_1, t_2, \dots, t_M \in [a, b]$ 处的样值, 那么当 $(h_1(t), h_2(t), \dots, h_M(t))^T = \left(\sum_{k=1}^K \mathbf{A}_k^T \mathbf{A}_k \right)^{-1} \sum_{k=1}^K \mathbf{A}_k^T \mathbf{e}_{k,t}$ 时, $\tilde{f}(t) = \sum_{m=1}^M h_m(t) f(t_m)$ 是 $f(t)$ 的 min-max 最佳插值, 并且误差为

$$\begin{aligned} \epsilon(t) &= \min_{\{h_m\}} \sup_{f \in X, \|f\| \leq 0} \left| f(t) - \sum_{m=1}^M h_m(t) f(t_m) \right| \\ &\leq \sqrt{B} \left[\sum_{k=1}^K \left\| \mathbf{e}_{k,t} - \mathbf{A}_k \left(\sum_{l=1}^K \mathbf{A}_l^T \mathbf{A}_l \right)^{-1} \sum_{m=1}^K \mathbf{A}_m^T \mathbf{e}_{m,t} \right\|^2 \right]^{1/2} \end{aligned} \quad (9)$$

式(9)可由式(8)代入式(7)得到, 它给出了 min-max 插值的点态误差, 能反映插值的敏感性^[17].

当信号空间只有一个尺度函数 $\varphi(t)$ 时, 我们可以将最小最大插值向量写成 $\mathbf{H}(\tau) = (\mathbf{A}^T \mathbf{A})^{-1} \mathbf{A}^T \mathbf{e}_\tau = \mathbf{A}^+ \mathbf{e}_\tau$, 这里 $\mathbf{A} = (\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_M)$, $\mathbf{e}_\tau = (\varphi(\tau - n))^T$, $\mathbf{e}_m = (\varphi(t_m - n))^T$, $m = 1, 2, \dots, M$. 由此我们可看到, 最佳插值向量 $\mathbf{H}(\tau)$ 正好是向量 \mathbf{e}_τ 到由 $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_M$ 张成空间上的正交投影. 所以 $\tilde{x}(t) \in V(\varphi)$ 且 $x(t_m) = \tilde{x}(t_m)$,

$m = 1, 2, \dots, M$. 这表明信号的最小最大插值能在采样点上精确重建信号. 特别地对一维带限信号 $x(t)$, 其最高频率不超过 $\sigma > 0$. 取尺度函数 $\varphi(t) = \text{sinc} \sigma t = \sin \pi \sigma t / \pi \sigma t$. 对于任意两个采样点 t_l, t_m , 有

$\sum_n \text{sinc} \sigma(t_l - nT_\sigma) \text{sinc} \sigma(t_m - nT_\sigma) = \text{sinc} \sigma(t_m - t_l) = \varphi(t_m - t_l)$. 于是, 当采样点 t_1, t_2, \dots, t_N 互相不同时, 矩阵 $\mathbf{A}^T \mathbf{A}$ 是可逆的, 这里 $\mathbf{A} = (\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_M)$, $\mathbf{e}_\tau = (\varphi(\tau - nT_\sigma))^T$, $\mathbf{e}_m = (\varphi(t_m - nT_\sigma))^T$, $m = 1, \dots, M$. 由文献[4]知, 我们得到的 min-max 插值正好是 Yen 插值. 所以 min-max 插值可以看作 Yen 插值在移不变空间信号空间的推广.

对二维信号, 取一个尺度函数 $\varphi(s, t) \in L^2(R^2)$ 及 $x(s, t) = \sum_{m,n} c_{m,n} \varphi(s-m, t-n)$, $\sum_{m,n} |c_{m,n}|^2 < +\infty$. 类似于上述方法可以得到它的 min-max 插值为 $\tilde{x}(s, t) = \sum_{m=1}^M x(s_m, t_m) h_m(s, t)$, 其中 $\mathbf{H}(s, t) = (h_1(s, t), \dots, h_M(s, t))^T = \mathbf{T}^{-1} \mathbf{b}$, $\mathbf{b} = (\langle \Phi_1, \mathbf{H}_{s,t} \rangle, \dots, \langle \Phi_M, \mathbf{H}_{s,t} \rangle)^T$, 矩阵 $\mathbf{H}_{s,t}, \mathbf{T}$ 及 Φ_k 由 $\mathbf{H}_{l,s}(n, m) = \varphi(s-n, t-m)$, $\mathbf{T}(n, m) = \text{tr}(\Phi_n^*, \Phi_m^*)$ 和 $\Phi_k(n, m) = \varphi(s_k - n, t_k - m)$ 给定. 这样 min-max 插值方法可用于图像重建问题.

4 含噪采样的 min-max 插值

设 $f \in V(\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_K)$, 给定它的含噪声采样 $f(t_1) + n_1, f(t_2) + n_2, \dots, f(t_M) + n_M$, 其中, n_i 为独立同分布、零均值白噪声, 其方差为 $\sigma^2 \|f\|^2$. 记重建信号为

$$\tilde{f}(t) = \sum_{m=1}^M [f(t_m) + n_m] h_m(t)$$

其 min-max 插值误差为

$$\epsilon(\tau) = \minsup_{\{h_l\}} \frac{E[|f(\tau) - \tilde{f}(\tau)|^2]}{\|f\|^2}$$

与前面类似, 我们可以得到

$$\begin{aligned} E[|f(\tau) - \tilde{f}(\tau)|^2] &\leq A^{-1} \|f\|^2 \left| \sum_n \sum_{k=1}^K c_k(n) [\varphi_k(\tau - n) - \sum_{m=1}^M h_m(\tau) \varphi_k(t_m - n)] \right|^2 + \|f\|^2 \sigma^2 \sum_{m=1}^M |h_m(\tau)|^2 \end{aligned}$$

所以, $\epsilon(\tau) \leq A^{-1} \left| \sum_n \sum_{k=1}^K c_k(n) [\varphi_k(\tau - n) - \sum_{m=1}^M h_m(\tau) \varphi_k(t_m - n)] \right|^2 + \sigma^2 \sum_{m=1}^M |h_m(\tau)|^2$

另外, 我们还可以得到

$$\begin{aligned} \epsilon(\tau) &\geq B^{-1} \left| \sum_n \sum_{k=1}^K c_k(n) [\varphi_k(\tau - n) - \sum_{m=1}^M h_m(\tau) \varphi_k(t_m - n)] \right|^2 + \sigma^2 \sum_{m=1}^M |h_m(\tau)|^2 \end{aligned}$$

取

$$E(\tau) = \lambda \sum_{k=1}^K \left\| e_{k,\tau} - \sum_{m=1}^M h_m(\tau) e_{k,m} \right\|^2 + \sigma^2 \sum_{m=1}^M |h_m(\tau)|^2, B^{-1} \leq \lambda \leq A^{-1}$$

由 $\frac{\partial E(\tau)}{\partial \mathbf{H}(\tau)} = 0$, 可得

$$\mathbf{H}(\tau) = \left(\sum_{k=1}^K \mathbf{A}_k^T \mathbf{A}_k + \lambda^{-1} \sigma^2 \mathbf{I} \right)^{-1} \sum_{k=1}^K \mathbf{A}_k^T \mathbf{e}_{k,\tau}$$

这样就给出信号含噪采样时的 min-max 插值.

5 min-max 插值算法及举例

5.1 min-max 插值算法

前面我们给出了一般平移不变子空间中的 min-max 插值, 然而, 该插值公式则需要预先求矩阵的 (广义) 逆, 运算量大且在插值点冗余时候会引起不稳定问题. 所以, 我们这里给出一个较为实际的算法. 为此, 将插值公式写成

$$\tilde{f}(t) = \sum_n \left(\sum_{l=1}^M \sum_{k=1}^K \sum_{m=1}^M f(t_m) x_{ml} \varphi_k(t_l - n) \right) \varphi_k(t - n) \quad (10)$$

可以看到, 插值计算只要计算出上式的系数即可, 这实际上可以通过求解线性方程组实现. 于是我们可给出如下算法

算法步骤

(1) 令 $\mathbf{f} = (f(t_1), f(t_2), \dots, f(t_M))^T$, $\mathbf{E}_k(t) = (\dots, \varphi_k(t-n), \varphi_k(t-n+1), \dots)^T$,

$\mathbf{A}_k = (b_{mm}^{(k)})$, 对 $b_{mm}^{(k)} = \varphi_k(t_m - n)$, $i = 1, 2, \dots, M$, $k = 1, 2, \dots, K$;

(2) 计算 $\mathbf{T} = \sum_{k=1}^K \mathbf{A}_k \mathbf{A}_k^T$;

(3) 求解方程 $\mathbf{Th} = \mathbf{f}$;

(4) $\tilde{f}(t) = \mathbf{h}^T \sum_{k=1}^K \mathbf{A}_k \mathbf{E}_k(t)$.

上述算法避免了求矩阵的 (广义) 逆, 求解值化成求解线性方程组. 步骤 (3) 中求解线性方程组 $\mathbf{Th} = \mathbf{f}$ 可以通过 Cholesky 分解来有效地实现. 当矩阵 \mathbf{T} 是不可逆时, 求解 $\mathbf{Th} = \mathbf{f}$ 可通过最小二乘法来求解.

5.2 应用举例

应用上述算法给出几个例子来说明 min-max 插值的有效性. 信号随机选取于具有给定解析尺度函数的平移不变空间. 在长度为 $L > 0$ 的区间上, 由于平移不变空间的平移是单位的, 决定信号的维数至少为 $\lfloor L \rfloor$, 这就要求平均采样步长必须满足 $T \leq 1/K$, 这里 K 为信号所在平移空间的尺度函数的个数. 信号的采样点取成非均匀的,

即取一个随机扰动幅度 $u > 0$, 采样点取成 $mT + u_m$, u_m 一致分布于 $[-u, u]$, $m = 1, 2, \dots, M$.

首先, 我们随机选取最高频率为 π 的一个带限信号, 重建区间为 $[0, 40]$, 取 $T = 0.88$, $u = 0.5T$, 图 1(a) 给出 min-max 插值和 Yen 插值信号及误差. 可以看出, 二者的误差几乎是相同的. 其次, 为了与文献 [9] 中的例子作对比, 在图 1(b) 中选取 Gaussian 函数 $\varphi(t) = e^{-t^2/2\sigma^2}$, $\sigma = 0.81$ 作为尺度函数, 平均采样间隔 $T = 0.85$, 插值效果略优于该文献. 为说明多个尺度函数的平移空间中信号的 min-max 插值, 我们选取 $\varphi_1(t) = a_1 e^{-t^2/4}$ 与 $\varphi_2(t) = a_2(t + t^3)e^{-t^2/4}$ 作为尺度函数, 其中常数 a_1, a_2 为归一化常数. 采样周期为 $T = 0.8$, $u = 0.6T$, 插值结果见图 1(c). 最后, 我们选定三次样条函数和一个正交样条小波^[14]作为尺度函数, 平均采样步长为 $T = 0.45$, $u = 0.8T$, 信噪比 $\text{SNR} = 15.339$, 插值结果见图 1(d) 给出.

6 结论

本文给出一般平移不变空间中信号的 min-max 插值方法, 能够使信号在给定有限个非一致采样的情况下给出理想的插值. 与现有文献中信号插值方法相比较, 本文提出的插值算法具有以下几个优点:

(1) min-max 插值算法可以应用于多个尺度函数的平移不变空间中的信号, 特别是多小波信号空间, 并容易推广到多维信号空间.

(2) min-max 插值算法是一种非迭代插值, 与迭代算法比较具有计算量小、不需要限定采样间隔的特点, 它

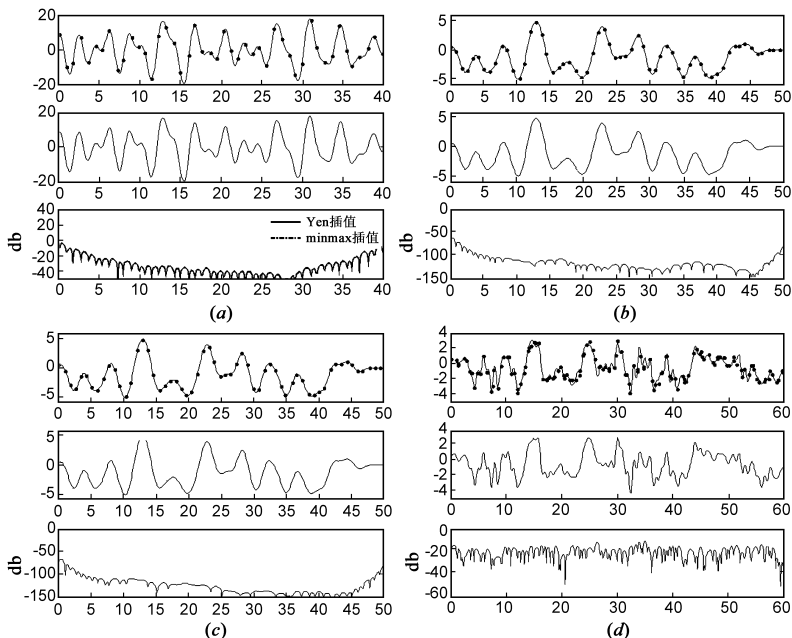


图1 原信号与采样点、重建信号、归一化误差

是基于 min-max 误差准则,因而具有良好的插值效果,可以看成是 Yen 插值的一种推广.

(3) min-max 插值算法可以用非常有效的算法来实现,此算法具有计算量小和良好的数值稳定性.然而,实验表明,采样点冗余很高会导致算法数值不稳定,需要进行正则化处理.

参考文献

- [1] Berger S D. Nonuniform sampling reconstruction applied to sparse array beamforming[A]. Proceedings IEEE Radar Conference[C]. California: NRC, 2002. 98 – 103.
- [2] Early D S, Long D G. Image reconstruction and enhanced resolution imaging from irregular samples[J]. IEEE Transactions on Geoscience and Remote Sensing, 2001, 39(2): 291 – 302.
- [3] Yen T L. On nonuniform sampling of bandwidth-limited signals [J]. IRE Transactions on Circuit Theory, 1956, 3(4): 251 – 257.
- [4] Choi H, Munson D C. Analysis and design of minmax-optimal interpolators[J]. IEEE Transactions on Signal Proceedings, 1998, 46(6): 1571 – 1579.
- [5] Ying L, Munson D C. Approximation of the minmax interpolator[A]. IEEE International Conference on Acoustics, Speech, and Signal Processing[C]. Istanbul: ICASSP, 2000. 328 – 331.
- [6] Aldroubi A, Feichtinger H. Complete iterative reconstruction algorithms for irregular sampled data in spline-like spaces[A]. IEEE Acoustics, Speech and Signal Process International Conference[C]. Munich, Germany: ICASSP, 1997. 1857 – 1860.
- [7] Fuchs J J, Delyon B. Min-max interpolators and lagrange interpolation formula[A]. IEEE International Symposium on Circuits and Systems (ISCAS 2002)[C]. Arizona: ICASSP, 2002. 429 – 432.
- [8] Grochenig, Schwab H. Fast local reconstruction methods for nonuniform sampling in shift-invariant spaces[J]. SIAM Journal of Matrix Analysis and Applications, 2003, 24(4): 899 – 913.
- [9] Ford C, Etter D M. Wavelet basis reconstruction of nonuniformly sampled data[J]. IEEE Trans on Circuits and Systems II, 1998, 45(8): 1165 – 1168.
- [10] Selesnick I W. Interpolating multiwavelet bases and sampling theory[J]. IEEE Transactions on Signal Processing, 1999, 47(6): 1615 – 1621.

- [11] Walter G G. A sampling theorem for wavelet subspaces[J]. IEEE Transactions on Inform Theory, 1992, 38(2): 881 – 884.
- [12] Chen Wen, Itoh S, Shiki J. On sampling in shift invariant spaces[J]. IEEE Transactions on Information Theory, 2002, 48(10): 2802 – 2810.
- [13] Djokovic I, Vaidyanathan P P. Generalized sampling theorem in multiresolution subspaces[J]. IEEE, Transactions on Signal Process, 1997, 45(3): 583 – 599.
- [14] Aldroubi A, Grochenig K. Nonuniform sampling and reconstruction in shift invariant spaces[J]. SIAM Review, 2001, 43(4): 585 – 620.
- [15] Ferreira P J S G. Noniterative and faster iterative methods for interpolation and extrapolation[J]. IEEE Trans on Signal Processing, 1994, 42(11): 3278 – 3282.
- [16] Tarczynski A. Sensitivity of signal reconstruction[J]. IEEE Signal Processing Letter, 1997, 4(7): 192 – 194.
- [17] Rolain Y, Schoukens J, Vandersreen G. Signal reconstruction for non-eguidistant finite length sample sets: A KIS approach [J]. IEEE Transactions on Instrument and Measurement, 1998, 47(5): 1046 – 1052.
- [18] Shenoy R G, Parks T W. An optimal recovery approach to interpolation [J]. IEEE, Transactions on Signal Processing, 1992, 40(8): 1987 – 1996.
- [19] 李炳照, 陶然, 王越. 分数阶 Fourier 域上非均匀采样信号的频谱重构研究[J]. 电子学报, 2008, 36(6): 1202 – 1205.
LI Bing-zhao, TAO Ran, WANG Yue. Spectral reconstruction from nonuniformly sampled signals in the fractional Fourier domain[J]. Acta Electronica Sinica, 36(6): 1202 – 1205. (in Chinese)
- [20] Zhao J X. Reconstruction of Signals in a Shift-invariant Space from Nonuniform Samples [EB/OL]. <http://en.scientificcommons.org/57711983>, 2009-10-12/2010-3-5.

作者简介



赵君喜 男, 1963 年 10 月出生于陕西华县. 现为南京邮电大学理学院教授. 主要研究方向为通信信号处理, 发表学术论文 50 余篇.
E-mail: zhaojx@njupt.edu.cn