

基于线性正则变换与短时傅里叶变换 联合的时频分析方法

向 强^{1,2}, 秦开宇¹

(1. 电子科技大学自动化工程学院, 四川成都 610054; 2. 西南民族大学电信学院, 四川成都 610041)

摘 要: 线性正则变换作为傅里叶变换、分数阶傅里叶变换更为广义的形式, 已经在光学和信号处理等领域得到了应用. 短时傅里叶变换是一种线性时频分布, 避免了其他双线性时频分布中出现的交叉项干扰, 是分析时频信号的有力工具. 本文从线性正则变换的定义和性质出发, 研究了线性正则变换与短时傅里叶变换的时频关系, 提出了基于线性正则变换与短时傅里叶变换联合的时频分析方法, 避免了交叉项问题能够实现 chirp 信号干扰抑制和多分量时频信号分离. 最后用仿真实例表明, 该方法是分析时频信号的有效手段.

关键词: 线性正则变换; 短时傅里叶变换; 时频分析; 干扰抑制; 信号分离

中图分类号: TN911.7 **文献标识码:** A **文章编号:** 0372-2112 (2011) 07-1508-06

A Time-frequency Analysis Method Based on Linear Canonical Transform and Short-time Fourier Transform

XIANG Qiang^{1,2}, QIN Kai-yu¹

(1. College of Automation, University of Electronic Science and Technology of China, Chengdu, Sichuan 610054, China;

2. College of Electrical & Information, Southwest University for Nationalities, Chengdu, Sichuan 610041, China)

Abstract: The linear canonical transform (LCT), which is a generalization of the Fourier transform and the fractional Fourier transform, has been used in many fields of optics and signal processing. The short-time Fourier transform (STFT) is a kind of linear Time-Frequency Representations (TFRs). Compared with many bilinear TFRs, the STFT does not have the cross-term problem. Because of this advantage, the STFT becomes an important time-frequency analysis tool. Starting with the LCT's definition and its properties, many useful relations between the LCT and the STFT have been derived. Based on these relations, we present a new time-frequency signal analysis method, which has no cross-terms problem. It can be used to realize interference suppression of chirp signals and separate components from a time-frequency signal. Finally the simulation results illustrate the validity of the proposed method.

Key words: the linear canonical transform; the short-time Fourier transform; time-frequency analysis; interference suppression; signal separation

1 引言

时频分析是当今信号处理领域研究的一个热点问题, 特别是从 20 世纪 80 年代以来在这方面有了很大的发展, 各种时频联合分析方法得到了广泛的研究和应用. 从短时傅里叶变换 (Short-Time Fourier Transform, STFT) 到小波变换 (Wavelet Transform, WT), 从维格纳分布 (Wigner Distribution, WD) 到 Cohen 类等各类时频分布^[1~3]多达几十种. 如今时频分析已经得到了许多有价值的成果, 这些成果已在物理、天文学、化学、生物学、医

学和通信等众多领域得到了广泛应用. 时频分析在信号处理领域显示出的巨大潜力, 吸引着越来越多的人去研究并利用它.

线性正则变换 (Linear Canonical Transform, LCT) 是一种重要的信号处理工具^[3~10], 也是一种崭新的时频分析方法. 它是分数阶傅里叶变换^[2] (Fractional Fourier Transform, FRFT) 的进一步推广, 是一种更广义形式的傅里叶变换 (Fourier Transform, FT). 由于 LCT^[3] 具有 3 个自由参数 (参变量间存在的一个约束条件, 使得具有 4 个参变量的线性正则变换其实只有 3 个自由参数), 所以

相较于 FRFT 的 1 个自由参数和 FT 的 0 个自由参数, LCT 具有更强的灵活性和处理能力. 近年来, 针对线性正则变换在时频分析中的应用已经开始了一些初步的研究. 如文献[3]在分析线性正则变换与 WD 关系的基础上, 提出了基于 LCT 与 WD 联合的时频分析方法. 但由于 WD 存在严重的交叉项干扰, 所以该方法在分析多分量信号时效果却并不理想. STFT 是一种加窗傅里叶变换, 计算简单且多分量信号的 STFT 不受交叉项干扰, 是重要的时频分析方法. 本文通过对 LCT 与 STFT 时频关系的研究, 提出了基于 LCT 与 STFT 联合的时频分析方法, 该方法能够避免时频面上交叉项的干扰, 并可利用 LCT 多参变量选取灵活性的特点有效解决 chirp 信号干扰抑制和多分量时频信号分离问题.

2 LCT 的定义及性质

2.1 LCT 的定义

信号 $f(t)$ 以实数 (a, b, c, d) 为参数并且满足 $ad - bc = 1$ 的线性正则变换定义^[3,4]如下:

$$F_{(a,b,c,d)}(u) = \begin{cases} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) K_{(a,b,c,d)}(t, u) dt, & b \neq 0 \\ \sqrt{d} e^{j\frac{cd}{2}u} f(du), & b = 0 \end{cases} \quad (1)$$

式(1)中 $K_{(a,b,c,d)}(t, u) = \sqrt{\frac{1}{j2\pi b}} e^{j(\frac{d}{2b}t^2 - \frac{1}{b}ut + \frac{a}{2b}t^2)}$. LCT 定义

中的参数 (a, b, c, d) 也可表示为参数矩阵 $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$.

当 $A = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$ 时, LCT 变为 FRFT, 如果令 $\theta = \pi/2$ 则进一步变为 FT 形式, 所以 FT 和 FRFT 都是 LCT 的特例. 另外, 由 LCT 的定义可知, 当 $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ c & 1 \end{pmatrix}$ 时, 线性正则变换就简化为信号与 chirp 信号的积:

$$F_{(1,0,c,1)}(u) = f(u) \cdot e^{j\frac{c}{2}u^2} \quad (2)$$

LCT 的逆变换(ILCT)^[4]可以表示为 $F_{(a,b,c,d)}(u)$ 以 $(d, -b, -c, a)$ 为参数的 LCT, 即:

$$f(t) = \begin{cases} \int_{-\infty}^{+\infty} F_{(a,b,c,d)}(u) K_{(d,-b,-c,a)}(u, t) du, & b \neq 0 \\ \sqrt{a} e^{-j\frac{ca}{2}t^2} f(at), & b = 0 \end{cases} \quad (3)$$

式(3)中 $K_{(d,-b,-c,a)}(u, t) = \sqrt{\frac{1}{-j2\pi b}} e^{j(\frac{-d}{2b}u^2 + \frac{1}{b}ut - \frac{a}{2b}t^2)}$.

并且容易证明以下关系式成立:

$$k_{(a,b,c,d)}^*(t, u) = k_{(d,-b,-c,a)}(u, t) \quad (4)$$

由式(3)知信号可表示为 u 域上一组正交 chirp 基的线性组合, 这里称 u 域为线性正则变换域(LCT 域), 而时域、频域和分数阶傅里叶域可视为线性正则变换

域的特例. 从本质上讲, 信号在线性正则变换域上的表示, 同时融合了信号在时域和频域的信息. 因此, LCT 被认为是一种新的时频分析方法.

为了表示上的方便, 本文用 $L_{(a,b,c,d)}(\cdot)$ 表示参数为 (a, b, c, d) 的 LCT 算子, 用带有下标 a, b, c, d 的大写函数表示对应小写函数的 LCT 结果, 如 $F_{(a,b,c,d)}(u)$ 表示 $f(t)$ 的 LCT.

2.2 LCT 的性质

作为传统 FT 和 FRFT 的推广, LCT 也具有很多重要的性质, 包括叠加、时移、频移、尺度、微分、积分、卷积、能量守恒等基本性质^[4-6], 这些性质也是传统 FT 和 FRFT 性质的拓展. 由于文章后续部分的需要, 这里只给出 LCT 的叠加性和时移特性.

(1) 叠加性^[6]

$$L_{(a_2,b_2,c_2,d_2)}(L_{(a_1,b_1,c_1,d_1)}(f(t))) = L_{(a,b,c,d)}(f(t)) \quad (5)$$

式(5)中参数矩阵 $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, $A_1 = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{pmatrix}$,

$A_2 = \begin{pmatrix} a_2 & b_2 \\ c_2 & d_2 \end{pmatrix}$ 且满足关系 $A = A_2 \cdot A_1$.

(2) 时移特性^[4]

若 $f(t) \xrightarrow{\text{LCT}} F_{(a,b,c,d)}(u)$, 则

$$f(t - \tau) \xrightarrow{\text{LCT}} e^{j(\frac{c}{2}(\tau - t)^2)} F_{(a,b,c,d)}(u - a\tau) \quad (6)$$

3 LCT 与 STFT 的时频关系

信号 $f(t)$ 的 STFT 定义为^[1,2]:

$$S_f(t, \omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(\tau) g^*(\tau - t) e^{-j\omega\tau} d\tau \quad (7)$$

式(7)中 $g(t)$ 是一个时间宽度很短的窗函数. 当窗函数 $g(t) = 1$ 时, STFT 则简化为传统的 FT. STFT 也可以用信号和窗函数的频谱来计算, 其公式如下^[2]:

$$S_f(t, \omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-j\omega t} \int_{-\infty}^{+\infty} F(v) G^*(v - \omega) e^{jv t} dv \quad (8)$$

式(8)中 $F(\cdot)$ 与 $G(\cdot)$ 分别表示 $f(t)$ 与 $g(t)$ 的频谱. 为了便于推导 LCT 与 STFT 的时频关系, 在式(7)的基础上, 可定义修改的短时 Fourier 变换(MSTFT)如下^[2]:

$$\tilde{S}_f(t, \omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{j\frac{\omega^2}{2}t} \int_{-\infty}^{+\infty} f(\tau) g^*(\tau - t) e^{-j\omega\tau} d\tau \quad (9)$$

比较式(7)与式(9)可知, MSTFT 在 STFT 的基础上只增加了一个相移因子 $e^{j\frac{\omega^2}{2}t}$, 并不改变信号在时频面的支撑域, 所以 MSTFT 的定义是合理的. 仿照式(8), MSTFT 也可以利用信号和窗函数的频谱计算, 见式(10):

$$\tilde{S}_f(t, \omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-j\frac{\omega t}{2}} \int_{-\infty}^{+\infty} F(v) G^*(v - \omega) e^{jv t} dv \quad (10)$$

有了前面式(9)关于 MSTFT 的定义,下面我们来推导 LCT 与 MSTFT 的时频关系.

根据式(3)ILCT 的定义,利用式(4)可将式(9)作如下变换:

$$\begin{aligned} \tilde{S}_f(t, \omega) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{j\frac{\omega t}{2}} \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} F_{(a,b,c,d)}(z) \right. \\ &\quad \times K_{(d,-b,-c,a)}(z, \tau) dz \left. g^*(\tau - t) e^{-j\omega \tau} d\tau \right) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{j\frac{\omega t}{2}} \int_{-\infty}^{+\infty} F_{(a,b,c,d)}(z) \int_{-\infty}^{+\infty} K_{(a,b,c,d)}^*(\tau, z) \\ &\quad \times g^*(\tau - t) e^{-j\omega \tau} d\tau dz \end{aligned} \quad (11)$$

上式右边,内部积分的计算可利用 LCT 的时移性质即式(6),得到

$$\begin{aligned} &\int_{-\infty}^{+\infty} K_{(a,b,c,d)}^*(\tau, z) g^*(\tau - t) e^{-j\omega \tau} d\tau \\ &= G_{(a,b,c,d)}^*(z - at - b\omega) e^{j(\frac{ac}{2}t^2 + \frac{bd}{2}\omega^2 - z\omega - zct + b\omega t)} \end{aligned} \quad (12)$$

将式(12)代入式(11),得到

$$\begin{aligned} \tilde{S}_f(t, \omega) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{j\frac{\omega t}{2}} \int_{-\infty}^{+\infty} G_{(a,b,c,d)}^*(z - at - b\omega) \\ &\quad \times F_{(a,b,c,d)}(z) e^{j(\frac{ac}{2}t^2 + \frac{bd}{2}\omega^2 - z\omega - zct + b\omega t)} dz \end{aligned} \quad (13)$$

对式(13)作如下线性坐标变换

$$\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} t \\ \omega \end{pmatrix} \quad (14)$$

则式(13)简化为

$$\begin{aligned} \tilde{S}_f(t, \omega) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{j\frac{u v}{2}} \int_{-\infty}^{+\infty} F_{(a,b,c,d)}(z) \\ &\quad \times G_{(a,b,c,d)}^*(z - u) e^{-jz v} dz \end{aligned} \quad (15)$$

由 MSTFT 的定义可知,式(15)右边正好是信号 $f(t)$ 的线性正则变换结果 $F_{(a,b,c,d)}(u)$ 以 u, v 为参变量的 MSTFT,用符号 $\tilde{S}_F(u, v)$ 表示,其中窗函数 $G_{(a,b,c,d)}(u)$ 是 $g(t)$ 的线性正则变换结果.利用式(14),则式(15)变为:

$$\tilde{S}_f(t, \omega) = \tilde{S}_F(u, v) = \tilde{S}_F(at + b\omega, ct + d\omega) \quad (16)$$

$\tilde{S}_f(t, \omega)$ 表示时域信号 $f(t)$ 的 MSTFT, $\tilde{S}_F(u, v)$ 表示 LCT 域信号 $F_{(a,b,c,d)}(u)$ 的 MSTFT.由式(16)可知两者之间在时频面保持一种复杂的线性映射关系.下面以 $\tilde{S}_f(t, \omega)$ 为一矩形的 MSTFT 分布为例,给出信号在几种特殊 LCT 作用下对应时频面上几种简单的线性映射关系,如图 1 所示.

$$(1) \text{ 当 LCT 参数矩阵 } \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \text{ 时,}$$

$\tilde{S}_F(u, v)$ 与 $\tilde{S}_f(t, \omega)$ 之间存在一种旋转映射关系^[2].

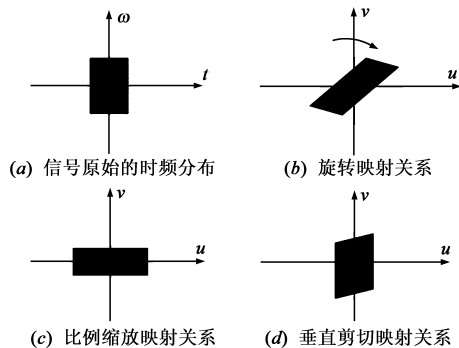


图1 时频面上几种简单的线性映射关系

$$(2) \text{ 当 LCT 参数矩阵 } \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k & 0 \\ 0 & \frac{1}{k} \end{pmatrix} \text{ 时, } \tilde{S}_F(u, v)$$

与 $\tilde{S}_f(t, \omega)$ 之间存在一种比例缩放映射关系.

$$(3) \text{ 当 LCT 参数矩阵 } \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ q & 1 \end{pmatrix} \text{ 时, } \tilde{S}_F(u, v)$$

与 $\tilde{S}_f(t, \omega)$ 之间存在一种垂直剪切映射关系.

考虑更一般情况下,利用式(5)把 LCT 的实参数矩

阵 $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ 可作如下形式的分解^[11]:

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ q & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} k & 0 \\ 0 & \frac{1}{k} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \quad (17)$$

式(17)中 $k > 0, \theta \in [0, \pi]$. 对式(17)右边矩阵相乘得

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k \cos\theta & k \sin\theta \\ qk \cos\theta - \sin\frac{\theta}{k} & qk \sin\theta + \cos\frac{\theta}{k} \end{pmatrix} \quad (18)$$

通过式(18)并利用 LCT 定义中的条件 $ad - bc = 1$ 可解得:

$$\begin{cases} \tan\theta = \frac{b}{a} \\ q = \frac{ac + bd}{a^2 + b^2} \\ k = \sqrt{a^2 + b^2} \end{cases} \quad (19)$$

因此,一般情况下信号在取 LCT 后,其 $\tilde{S}_F(u, v)$ 与 $\tilde{S}_f(t, \omega)$ 在时频面上的线性映射关系可依次分解为旋转、比例缩放、垂直剪切映射关系的组合.

4 基于 LCT 与 STFT 联合的时频分析方法

4.1 chirp 信号干扰抑制

适合用作时频分析的典型非平稳信号为线性调频即 chirp 类信号,这类信号广泛存在于雷达、声纳及通信领域.在扩频通信系统中, chirp 信号干扰的抑制问题是

人们研究的重点. 考虑一 chirp 干扰信号: $x(t) = e^{\frac{j\omega_0^2}{2}t + j\omega_0 t}$, 直接用 STFT 无法将其能量聚集在较窄的频带内. 如果对信号取参数矩阵 $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ 的 LCT 可得到

$$X_{(a,b,c,d)}(u) = \sqrt{\frac{1}{2\pi b}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{\frac{j\omega_0^2}{2}t + j\omega_0 t} e^{j(\frac{d}{2b}u^2 - \frac{1}{b}ut + \frac{a}{2b}t^2)} dt$$

$$= \sqrt{\frac{1}{mb+a}} e^{\frac{j\omega_0^2}{2}u^2} e^{-j[\frac{b}{2(mb+a)}\omega_0^2 - \frac{\omega_0 u}{mb+a} + \frac{1}{2b(mb+a)}u^2]} \quad (20)$$

当 $m = -\frac{c}{d}$ 时, 式(20)可以化简为

$$X_{(a,b,c,d)}(u) = B e^{j\omega_0 du} \quad (21)$$

其中 $B = \sqrt{d} \cdot e^{-j\frac{bd}{2}\omega_0^2}$ 为一个常数. 从式(21)可以看出 $X_{(a,b,c,d)}(u)$ 是一个复正弦信号, 如果对 $X_{(a,b,c,d)}(u)$ 再进行傅里叶变换(前后相当于对 $x(t)$ 作了参数矩阵 $A = \begin{pmatrix} c & d \\ -a & -b \end{pmatrix}$ 的 LCT)可得

$$FT_{X_{(a,b,c,d)}}(v) = \int_{-\infty}^{+\infty} X_{(a,b,c,d)}(u) e^{-j\omega u} du$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} B e^{j\omega_0 du} e^{-j\omega u} du$$

$$= 2\pi B \delta(v - \omega_0 d) \quad (22)$$

式(22)中 $FT_{X_{(a,b,c,d)}}(\cdot)$ 表示 $X_{(a,b,c,d)}(u)$ 的傅里叶变换, 并且为 $v = \omega_0 d$ 处的一个冲激. 在扩频通信系统中可以利用 chirp 信号干扰的这一特性对其进行消除, 这就是线性正则变换域抑制 chirp 信号干扰的原理. 但式(22)中没有考虑信号的截短问题, 而实际通常都需要对信号进行截短处理, 因此设窗函数为 $g(u)$, 从而可得到 LCT 域信号 $X_{(a,b,c,d)}(u)$ 的 MSTFT 如下:

$$\tilde{S}_X(u, v) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{\frac{j\omega_0^2}{2}u} \int_{-\infty}^{+\infty} X_{(a,b,c,d)}(\tau) g^*(\tau - u) e^{-jv\tau} d\tau$$

$$= e^{\frac{j\omega_0^2}{2}u} \left\{ \sqrt{2\pi} B \delta(v - \omega_0 d) \otimes [G^*(-v) e^{-j\omega_0 u}] \right\} \quad (23)$$

其中 $\otimes$ 表示卷积运算, 由于式(23)中窗函数是加在线性正则变换域信号 $X_{(a,b,c,d)}(u)$ 上的, 由于 $X_{(a,b,c,d)}(u)$ 的得出需要对时域信号进行无穷积分, 为了简化计算, 考虑把加窗运算变换到时域上进行. 由式(1) LCT 的定义可知

$$X_{(a,b,c,d)}(\tau) = \frac{1}{\sqrt{j2\pi b}} \int_{-\infty}^{+\infty} x(\mu) e^{j(\frac{d}{2b}\tau^2 - \frac{1}{b}\tau\mu + \frac{a}{2b}\mu^2)} d\mu$$

将上式代入式(23), 仿照前面式(11)~(15)的推导可得到:

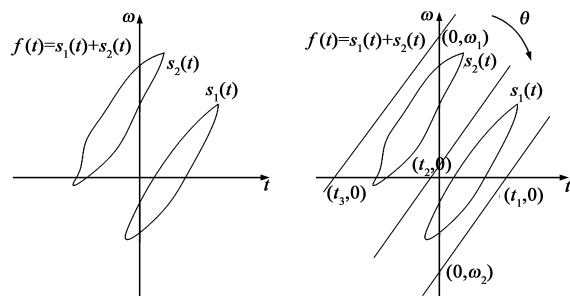
$$\tilde{S}_X(u, v) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{\frac{j\omega_0^2}{2}u} \int_{-\infty}^{+\infty} x(\mu) G_{(d,-b,-c,a)}^*(\mu - t) e^{-j\omega\mu} d\mu \quad (24)$$

其中 $t = du - bv$, $\omega = -cu + av$, $G_{(d,-b,-c,a)}(\cdot)$ 表示窗函数 $g(u)$ 以 $(d, -b, -c, a)$ 为参数的 LCT. 从式(23)、

(24)可以看出, 线性正则变换域信号的 MSTFT 可以通过时域信号的 MSTFT 来实现, 只是其窗函数由 $g(u)$ 变为了 $G_{(d,-b,-c,a)}(u')$. 综上可知, 在扩频通信系统中通过对 chirp 干扰信号加时频窗函数 $G_{(d,-b,-c,a)}(u')$, 然后再取 MSTFT 则可以把 chirp 信号的能量聚集在较窄的频带内, 从而有利于进一步对它进行消除.

4.2 多分量时频信号分离

信号滤波与分离是信号处理领域的常见话题. 对于多分量合成的时频信号如图 2(a) 所示, 各信号分量的时频分布虽然互不重叠, 但在时域和频域均存在较强耦合(各信号分量在时频平面里呈斜线分布, 使得这些分布在时间轴或频率轴上的投影均有重叠). 对这类信号采用传统的时域或频域滤波方法很难得到好的分离结果. 由第 3 节的分析可知, 信号经过 LCT 后, 其 MSTFT 在时频面依次发生了旋转、缩放、垂直剪切的变化. 显然 LCT 的这一特性可用于多分量时频信号的分离. 利用 LCT 与 MSTFT 的关系, 选择合适的 LCT 参数, 将待分离信号经过 LCT 后, 便可实现信号在 LCT 域的解耦合, 最后通过在 LCT 域设计带通滤波器来实现时频信号的分离.



(a) 多分量合成信号 $f(t)$ 的 MSTFT (b) $f(t)$ 各分量 MSTFT 之间的分界线

图 2

如图 2(a) 所示, 假设 $f(t)$ 由两个分量组成即: $f(t) = s_1(t) + s_2(t)$. 在图 2(a) 中设计三条平行的分界线如图 2(b) 所示, 将信号 $f(t)$ 两个分量的 MSTFT 分布分开. 假设分界线的斜率为 $\lambda = \tan\alpha$, 分界线与时间轴的交点坐标为 $(t_i, 0)$ 其中 $i = 1, 2, 3$. 则将图 2(b) 中的 MSTFT 分布顺时针旋转 $\theta = \pi/2 + \alpha$ (即满足 $\tan\theta = 1/(-\lambda)$) 角度后, 便可实现时频面的解耦合. 由式(19)可设计 LCT 参数为:

$$a = -\lambda, b = 1, c = -1, d = 0 \quad (25)$$

于是利用式(3)可得到各个信号分量:

$$s_i(t) = L_{(d,-b,-c,a)}[F_{(a,b,c,d)}(u) \cdot P_{B_i}(u)] \quad (26)$$

其中 $i = 1, 2$, 并且 $P_{B_i}(u)$ 是按式(25)中设计的参数所对应 LCT 域带通滤波器, 表达式见式(27):

$$P_{B_i}(u) = \begin{cases} 1, & u \in (u_{l_i}, u_{h_i}) \\ 0, & u \notin (u_{l_i}, u_{h_i}) \end{cases}$$

$$B_i = u_{h_i} - u_{l_i} \quad (27)$$

B_i 表示 LCT 域带宽, 根据式 (16) 可得到滤波器参数分别为:

$$\begin{cases} u_{h_i} = at_{i+1} \\ u_{l_i} = at_i \end{cases}, i = 1, 2 \quad (28)$$

下面用仿真实验来验证方法的可行性, 设有三个分量叠加的时频信号 $f(t) = s(t) + h(t) + n(t)$.

$$\text{其中: } s(t) = e^{-0.2\pi t^2}, t \in (-5, 5)$$

$$h(t) = e^{j0.5\pi(t-5)^2}, t \in (0, 5)$$

$$n(t) = e^{j0.5\pi(t+5)^2}, t \in (-5, 0)$$

信号 $f(t)$ 的时域波形如图 3(a) 所示, 图 3(b) 是 $f(t)$ 的 MSTFT 分布曲线, 其中椭圆表示高斯信号分量 $s(t)$ 的 MSTFT 分布, 最左边的直线表示 chirp 信号分量 $n(t)$ 的 MSTFT 分布, 最右边的直线表示 chirp 信号分量 $h(t)$ 的 MSTFT 分布. 作为对比, 在图 3(d) 中给出了 $f(t)$ 的 WD 分布曲线. 很明显由于交叉项干扰, 图 3(d) 中已无法分辨出 $s(t)$ 的时频分布. 并且由图 3(b) 可知, 仅在时域或频域很难将信号分量 $s(t)$ 分离出来. 现在图 3(b) 中设计两条平行的分界线, 斜率为 0.5, 将 $s(t)$ 与其它信号分量分离开来, 如图 3(c) 所示. 从图 3(c) 可知, 两条分界线与时轴的交点分别为 $(-3, 0)$, $(3, 0)$. 根据式 (25), 可设计 LCT 的参数为 $(-0.5, 1, -1, 0)$. 根据式 (27)、(28) 设计出分离 $s(t)$ 信号分量的 LCT 域低通滤波器如图 3(e) 所示, 参数 $u_{h_i} = 1.5$, $u_{l_i} = -1.5$, $B_i = 3$, 由

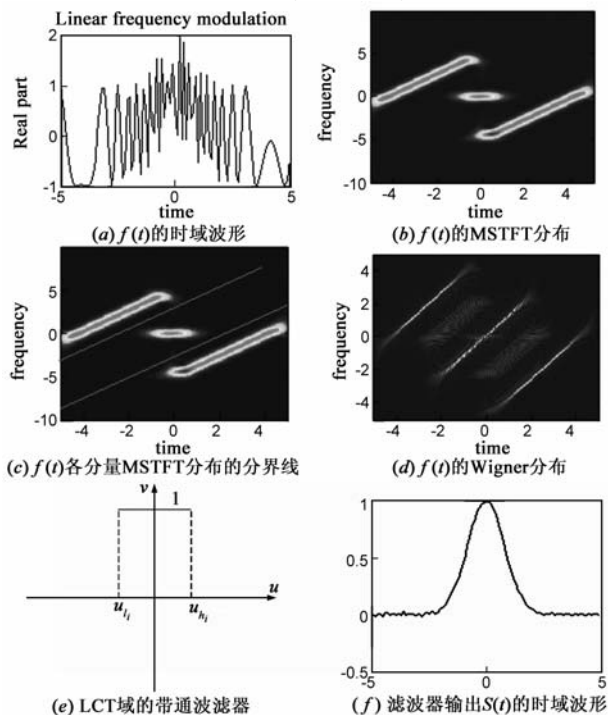


图3 基于LCT与STFT联合分析的时频信号分离仿真

式(26)可求得 $s(t)$, 图 3(f) 是计算机仿真滤波器输出 $s(t)$ 的结果.

5 结束语

目前对于非平稳信号如 chirp 类信号的分析, 大量文献采用了基于 FRFT 的处理方法^[12,13], 而 FRFT 是 LCT 的一种特殊形式, 只有一个自由参数, 灵活性不够, 计算量较大. 文中我们将 FRFT 在时频分析中的应用推广到 LCT, 在研究线性正则变换和短时傅立叶变换关系的基础上, 提出了基于 LCT 与 STFT 联合的时频分析方法. 该方法能够避免时频平面交叉项干扰, 还可通过对 LCT 参变量的灵活选取, 达到减少计算量有效解决时频平面 chirp 信号干扰抑制和多分量时频信号分离问题. 本文的研究为非平稳信号的分析提供了新的思路 and 手段.

参考文献

- [1] F Hlawatsch, G F Boudreaux-Bartels. Linear and quadratic time-frequency signal representation[J]. IEEE Signal Processing Magazine, 1992, 9(2): 21 – 67.
- [2] L B Almeida. The fractional Fourier transform and time-frequency representations[J]. IEEE Transactions on Signal Processing, 1994, 42(11): 3084 – 3091.
- [3] Soo-Chang Pei, Jian-Jiun Ding. Relations between fractional operations and time-frequency distributions, and their applications[J]. IEEE Transactions on Signal Processing, 2001, 49(8): 1638 – 1655.
- [4] Adrian Stern. Why is the linear canonical transform so little-known? [A]. AIP Conference Proceedings Volume 860 [C]. New York: American Institute of Physics, 2006. 225 – 234.
- [5] K K Sharma, S D Joshi. Signal separation using linear canonical and fractional Fourier transforms [J]. Opt Communications, 2006, 265: 454 – 460.
- [6] Deng Bing, Tao Ran, Wang Yue. Convolution theorems for the linear canonical transforms and their applications[J]. Science in China (Series F, Information Sciences), 2006, 49(5): 592 – 603.
- [7] Hui Zhao, Qi-Wen Ran, Jing Ma, Li-Ying Tan. On bandlimited signals associated with linear canonical transform [J]. IEEE Signal Processing Letters, 2009, 16(5): 343 – 345.
- [8] J J Healy, J T Sheridan. Sampling and discretization of the linear canonical transform[J]. Signal Processing, 2009, 89(4): 641 – 648.
- [9] Bing-Zhao Li, Ran Tao, Yue Wang. New sampling formulae related to linear canonical transform [J]. Signal Processing, 2007, 87(5): 983 – 990.
- [10] 向强, 秦开宇, 张传武. 线性正则变换域的带限信号采样理论研究[J]. 电子学报, 2010, 38(9): 1984 – 1989.

Xiang Qiang, Qin Kai-yu, Zhang Chuan-wu. Sampling theories of band limited signals in linear canoinical transfrom domain [J]. Acta Electronica Sinica, 2010, 38(9): 1984 – 1989. (in Chinese)

- [11] A Koc, H M Ozaktas, C Candan, M A Kutay. Digital computation of linear canonical transforms[J]. IEEE Transactions on Signal Processing, 2008, 56(6): 2383 – 2394.
- [12] 张玉恒, 吴启晖, 王金龙. 基于时频加窗短时傅里叶变换的 LFM 干扰抑制[J]. 电子与信息学报, 2007, 29(6): 1361

– 1364.

Zhang yu-heng, Wu Qi-hui, Wang Jin-long. LFM interference suppression using time-frequency windowed short-time Fourier transform[J]. Journal of Electronics & Information Technology, 2007, 29(6): 1361 – 1364. (in Chinese)

- [13] Soo-Chang Pei, Jian-Jiun Ding. Relations between gabor transforms and fractional Fourier transforms and their applications for signal processing [J]. IEEE Transactions on Signal Processing, 2007, 55(10): 4839 – 4850.

作者简介



向 强 男, 1973 年生于四川营山县, 现为电子科技大学博士研究生, 西南民族大学电信学院副教授. 主要研究方向为时频信号分析与测试.

E-mail: xiangqiang@swun.cn



秦开宇 男, 1967 年生于四川遂宁市, 现为电子科技大学空天科学技术研究院教授、博士生导师. 主要研究方向为微波测量仪器、导航与宽带无线通信测试技术.