

n 值 S - MTL 命题逻辑系统中公式真度的统一理论

李 骏, 邓富喜

(兰州理工大学理学院, 甘肃兰州 730050)

摘 要: 给出了强正则蕴涵算子和 n 值 S - MTL 命题逻辑系统的定义. 基于一般的概率测度定义了公式的真度, 并给出了公式真度的积分表达式; 基于公式真度的积分表达式证明了真度推理规则; 在 n 值 S - MTL 命题逻辑系统的全体公式集上引入了一种伪距离, 证明了逻辑运算关于这种伪距离是连续的. 提出了一种近似推理机制, 使得在 n 值 S - MTL 命题逻辑系统中展开近似推理成为可能.

关键词: 真度; 强正则蕴涵算子; n 值 S - MTL 命题逻辑系统; 伪距离

中图分类号: O142 **文献标识码:** A **文章编号:** 0372-2112 (2011) 08-1864-05

Unified Theory of Truth Degrees in n -Valued S - MTL Propositional Logic

LI Jun, DENG Fu-xi

(School of Science, Lanzhou University of Technology, Lanzhou, Gansu 730050, China)

Abstract: The concept of strong regular implication operator and the n -valued S - MTL propositional logic system are introduced. Based on probability measure the truth degree of formula is defined and its integral expression is given and the inference rules w.r.t the truth degrees is proved. Moreover, similarity degrees among formulas are proposed and a pseudo-metric is defined therefrom on the set of formulas. The continuity of logical operators w.r.t the pseudo-distance is proved, and hence a possible framework suitable for developing approximate reasoning theory in n -valued S - MTL propositional logic is established.

Key words: truth degree; strong regular implication operators; n -valued S - MTL propositional logical system; pseudo-distance

1 引言

数理逻辑的特点在于形式化而不是数值计算, 为了反映程度化的思想, 二十世纪五十年代初, Rosser 教授就利用“指派真值^[1]”来刻画逻辑公式的真实程度, 这种思想在 Pavalka 的系列文章^[2]中得到了全面的发展. 后来又有许多学者从不同角度提出了逻辑公式的程度化思想, 文献^[3]就格值逻辑的情形基于多种不同的被知值概念展开了知识状态逻辑的研究.

本世纪初, 王国俊教授基于均匀概率的思想在经典二值命题逻辑中引入了真度的概念^[4], 提出了计量逻辑理论, 建立了一套近似推理模式之后, 国内外同行展开了广泛的研究, 得到了许多重要结果(参看文献^[5~11]). 但是所有以上的结论都是建立在均匀概率测度空间上, 由于实际应用中往往会对某些命题有所侧重, 所以针对非均匀分布情形进行研究会更适合于应用. 文献^[13, 14]基于非均匀概率测度的思想分别在经典的二值命题逻辑系统和三值 Gödel 逻辑系统中建立了命题真度的初步理论, 但对于一般的 n 值逻辑的情形则没

有进行讨论, 更没有给出类似于文献^[6]中应用起来非常方便的公式真度的积分表达式.

本文在 n 值 MTL 命题逻辑系统的统一框架下, 基于一般的概率测度(可以是均匀的, 也可以是非均匀的)建立了公式真度的统一理论, 给出了这种统一框架下真度的积分表示形式; 另外, 提出了强正则蕴涵算子的概念, 并在基于强正则蕴涵算子的 n 值命题逻辑中给出了真度 MP 规则和真度 HS 规则; 最后, 在全体公式集上引入了一种伪距离, 提出了一种近似推理机制, 使得在 n 值 S - MTL 命题逻辑系统中展开近似推理成为可能.

2 预备知识

定义 1^[7] 设 $\rightarrow: [0, 1]^2 \rightarrow [0, 1]$ 是二元函数, $a, b, c \in [0, 1]$, I 为指标集, 如果

- (1) $b \rightarrow c = 1$ 当且仅当 $b \leq c$.
- (2) $a \leq b \rightarrow c$ 当且仅当 $b \leq a \rightarrow c$.
- (3) $a \rightarrow (b \rightarrow c) = b \rightarrow (a \rightarrow c)$.
- (4) $1 \rightarrow c = c$.
- (5) $b \rightarrow \bigwedge_{i \in I} c_i = \bigwedge_{i \in I} (b \rightarrow c_i)$, $(\bigvee_{i \in I} b_i) \rightarrow c = \bigwedge_{i \in I} (b_i \rightarrow c)$.

(6) $b \rightarrow c$ 关于 c 单调递增, 关于 b 单调递减. 则称 $\rightarrow$ 为正则蕴涵算子. 如果 $\rightarrow$ 还满足

(7) $a \rightarrow c + 1 \geq a \rightarrow b + b \rightarrow c$, 则称 $\rightarrow$ 是强正则蕴涵算子.

注 1 容易验证, 常见的几种正则蕴涵算子

$$a \rightarrow_L b = (1 - a + b) \wedge 1, a \rightarrow_C b = \begin{cases} 1, & a \leq b \\ b, & a > b \end{cases}$$

$$a \rightarrow_H b = \begin{cases} 1, & a \leq b \\ \frac{b}{a}, & a > b \end{cases}, a \rightarrow_0 b = \begin{cases} 1, & a \leq b \\ (1 - a) \vee b, & a > b \end{cases}$$

即 Łukasiewicz 蕴涵, Gödel 蕴涵, Goguen 蕴涵和 R_0 蕴涵. 它们都是强正则蕴涵, 但并不是所有的正则蕴涵都是强正则蕴涵, 例如:

例 1 蕴涵算子

$$a \rightarrow b = \begin{cases} 1, & a \leq b \\ (1 - a^2 + b^2)^{\frac{1}{2}}, & a > b \end{cases}$$

是正则蕴涵算子, 但不是强正则蕴涵算子.

命题 1 Goguen 蕴涵是最小的强正则蕴涵算子, Łukasiewicz 蕴涵是最大的强正则蕴涵算子.

证明: 已知 Goguen 蕴涵是最小的剩余类蕴涵算子^[12]且正则蕴涵算子为左连续三角模的剩余类蕴涵^[7], 所以它是最小的正则蕴涵算子, 当然也是最小的强正则蕴涵算子. 设 $\rightarrow$ 是强正则蕴涵算子, 令

$$a \rightarrow c + 1 \geq a \rightarrow b + b \rightarrow c, a, b, c \in [0, 1]$$

其中 $a = 1$, 由正则蕴涵算子的性质得

$$1 - b + c \geq b \rightarrow c, b, c \in [0, 1].$$

又因为 $1 \geq b \rightarrow c, b, c \in [0, 1]$, 所以

$$(1 - b + c) \wedge 1 \geq b \rightarrow c, b, c \in [0, 1],$$

即 $b \rightarrow_L c \geq b \rightarrow c, b, c \in [0, 1]$. 故 Łukasiewicz 蕴涵是最大的强正则蕴涵算子.

设 $S = \{p_1, p_2, \dots\}$ 是可数集, $\neg$ 是一元运算, $\vee$ 与 $\rightarrow$ 是二元运算, 由 S 生成的 $(\neg, \vee, \rightarrow)$ 型自由代数记作 $F(S)$. $F(S)$ 中的元素叫做公式或者命题, S 中的元素叫作原子公式或原子命题. 由 $F(S)$ 中的公式构成的集合, 称为理论.

定义 2 设 n 是固定的自然数, $n \geq 2$. 令 $I_n = \{0, \frac{1}{n-1}, \dots, \frac{n-2}{n-1}, 1\}$, 设 $\rightarrow$ 是 $[0, 1]$ 上的正则蕴涵算子, 且 I_n 在 $\rightarrow$ 下封闭. 在 I_n 中规定:

$$\forall x, y \in I_n, x \vee y = \max\{x, y\}, \neg x = x \rightarrow 0.$$

则 I_n 称为 $(\neg, \vee, \rightarrow)$ 型代数, 称 $(F(S), (\neg, \vee, \rightarrow), I_n)$ 为 n 值 MTL 逻辑系统, 记作 MTL_n . 进一步, 当 $\rightarrow$ 是 $[0, 1]$ 上的强正则蕴涵算子时, 我们称 $(F(S), (\neg, \vee, \rightarrow), I_n)$ 为 n 值强 MTL 逻辑系统, 记作 $S-MTL_n$.

例 2 当 $\rightarrow$ 为 R_0 蕴涵时, I_n 关于运算 $\rightarrow$ 是封闭的, 此时 $(\neg, \vee, \rightarrow)$ 型代数 I_n 就是 R_0 单位区间的子代数:

n 值 R_0 链, 而 $(F(S), (\neg, \vee, \rightarrow), I_n)$ 就是 n 值 R_0 系统 L_n^* ^[7]. 当 $\rightarrow$ 为 Łukasiewicz 蕴涵时, I_n 关于运算 $\rightarrow$ 封闭, $(\neg, \vee, \rightarrow)$ 型代数 I_n 就是 MV 单位区间的子代数: n 值 MV 链, 此时 $(F(S), (\neg, \vee, \rightarrow), I_n)$ 就是 n 值 Łukasiewicz 系统^[7]. 另外, 当 n 为偶数时, I_n 在如下定义的强正则蕴涵下也是封闭的:

$$a \rightarrow b = \begin{cases} 1, & a \leq b \\ \left(\frac{1}{2} - a\right) \vee b, & \text{其他} \end{cases}$$

值得注意的是: 并非 I_n 关于所有的强正则蕴涵算子都是封闭的, 比如 Goguen 蕴涵算子. 关于 I_n 不封闭的蕴涵算子由于无法建立 $F(S)$ 和 I_n 之间的同态, 导致无法建立赋值, 所以是不适合建立 n 值逻辑系统的, 因此, 定义 2 中要求 I_n 对蕴涵运算 $\rightarrow$ 封闭.

定义 3^[7] 设 $A \in F(S)$. 从 $F(S)$ 到 I_n 的 $(\neg, \vee, \rightarrow)$ 型同态映射称为赋值, 全体赋值之集简记作 Ω . 若对于任意 $v \in \Omega$, 总有 $v(A) = 1$, 称公式 A 为重言式. 若对于任意 $v \in \Omega$, 总有 $v(A) = 0$, 称公式 A 为矛盾式.

定义 4^[7] 设 $A(p_1, \dots, p_m)$ 是 $F(S)$ 中含有 m 个原子公式的逻辑公式, 则 A 可以自然的诱导出一个 m 元 n 值函数 $\bar{A}: I_n^m \rightarrow I_n$. $\bar{A}(x_1, \dots, x_m)$ 由运算符 $\neg$ 与 $\rightarrow$ 将 $x_1, \dots, x_m$ 连接而成, 其方法恰如 $A(p_1, \dots, p_m)$ 由运算符 $\neg$ 与 $\rightarrow$ 将 $p_1, \dots, p_m$ 连接而成那样. 称 $\bar{A}(x_1, \dots, x_m)$ 为逻辑公式 A 的诱导函数.

3 系统 MTL_n 中命题的真度理论

定义 5^[17] 设 $(X_k, A_k, \mu_k) (k = 1, 2, \dots)$ 是概率测度空间, 令 $X = \prod_{k=1}^{\infty} X_k$, 则 $\prod_{k=1}^{\infty} A_k$ 在 X 上生成一个 σ -代数 A , 这时 X 上存在满足下列条件的测度 μ :

(1) A 由全体 μ 可测集之族组成.

(2) 对于 $\prod_{k=1}^m X_k$ 中任一可测集 E , $E \times \prod_{k=m+1}^{\infty} X_k$ 可测, 且

$$\mu\left(E \times \prod_{k=m+1}^{\infty} X_k\right) = (\mu_1 \times \mu_2 \times \dots \times \mu_m)(E), m = 1, 2, \dots.$$

称 μ 为 X 上的关于 $\mu_1, \mu_2, \dots$ 的无穷乘积, 概率测度空间 (X, A, μ) 也简记为 X .

定义 6 设 $X_k = \{0, \frac{1}{n-1}, \dots, \frac{n-2}{n-1}, 1\}$, μ_k 是 X_k 上的概率测度, 令 $X = \prod_{k=1}^{\infty} X_k$, 设 μ 为 X 上的关于 $\mu_1, \mu_2, \dots$ 的无穷乘积测度, 称 μ 为 n 值逻辑测度, 称 (X, A, μ) 为 n 值逻辑测度空间.

定义 7 设 $A \in F(S)$, 令

$$[A]_{\frac{i}{n-1}} = \left\{ v \in X \mid \varphi(v) = v, v \in \Omega, v(A) = \frac{i}{n-1} \right\},$$

$$\tau(A) = \sum_{i=0}^{n-1} \frac{i}{n-1} \mu([A]_{n-1}^i).$$

称 $\tau(A)$ 为 A 的真度.

注 2 定义 5 和定义 6 中的概率测度是一般的概率测度, 可以是均匀的, 也可以是非均匀的.

命题 2 设 v 是 Ω 中的任一赋值, 令

$$\varphi(v) = (v(p_1), v(p_2), \dots).$$

则 φ 是从 Ω 到 X 的双射. 其中 $p_k \in S, k = 1, 2, \dots$ 是原子命题.

注 3 当定义 5 和定义 6 中的概率测度为均匀的概率测度时, 定义 7 中的真度即是文献[5~11]中所定义的真度.

下面的命题是显然的:

命题 3 设 $A, B \in F(S)$.

(1) A 是重言式, 当且仅当 $\tau(A) = 1$.

(2) A 是矛盾式, 当且仅当 $\tau(A) = 0$.

(3) 若 A 与 B 逻辑等价, 则 $\tau(A) = \tau(B)$.

定理 1 设 $A(p_1, \dots, p_m) \in F(S)$, 则

$$\mu([A]_{n-1}^i) = \mu\left(\bar{A}^{-1}\left(\frac{i}{n-1}\right)\right), i = 0, 1, \dots, n-1.$$

证明 由定义 4 及命题 2 知, 任意无穷维向量 $v =$

$(x_1, x_2, \dots) \in \bar{A}^{-1}\left(\frac{i}{n-1}\right) \times \prod_{k=m+1}^{\infty} X_k$, 当且仅当其由前 m 个分量构成的 m 维向量 $(x_1, x_2, \dots, x_m)$ 满足 $\bar{A}(x_1, x_2, \dots, x_m) = \frac{i}{n-1}$, 当且仅当赋值 $v = \varphi^{-1}(v)$ 满足:

$$\begin{aligned} v(A) &= \bar{A}(v(p_1), \dots, v(p_m)) \\ &= \bar{A}(x_1, x_2, \dots, x_m) = \frac{i}{n-1}, \end{aligned}$$

当且仅当 $v = (x_1, x_2, \dots) \in [A]_{n-1}^i$. 所以有

$$\begin{aligned} [A]_{n-1}^i &= \{v \in X \mid \varphi(v) = v, v \in \Omega_n, v(A) = \frac{i}{n-1}\} \\ &= \bar{A}^{-1}\left(\frac{i}{n-1}\right) \times \prod_{k=m+1}^{\infty} X_k, i = 0, 1, \dots, n-1. \end{aligned}$$

再由定义 5 得

$$\begin{aligned} \mu([A]_{n-1}^i) &= \mu\left(\bar{A}^{-1}\left(\frac{i}{n-1}\right) \times \prod_{k=m+1}^{\infty} X_k\right) \\ &= \mu\left(\bar{A}^{-1}\left(\frac{i}{n-1}\right)\right), i = 0, 1, \dots, n-1. \end{aligned}$$

定理 1 的结论使得我们在求公式的真度时, 可以只考虑那些给公式中所包含的原子命题以不同赋值的有限个赋值.

设 $A(p_1, \dots, p_m)$ 是系统 MTL_n 中含有 m 个原子命题的公式, 为给出 A 的真度的积分表示形式, 以下需要引入 A 在 $[0, 1]^m$ 上诱导的阶梯函数 $\bar{A}$.

定义 8 设公式 $A(p_1, p_2, \dots, p_m) \in F(S)$, $\bar{A}(x_1, x_2, \dots, x_m)$ 是 $A(p_1, p_2, \dots, p_m)$ 的诱导函数. 定义 $\bar{A}$:

$[0, 1]^m \rightarrow [0, 1]$ 如下:

$$\bar{A}(y_1, y_2, \dots, y_m) = \frac{i}{n-1} \text{ 当且仅当 } (y_1, y_2, \dots, y_m) \in \text{Cube}(x_1, x_2, \dots, x_m).$$

这里 $\bar{A}(x_1, x_2, \dots, x_m) = \frac{i}{n-1}, i = 0, 1, \dots, n-1$. 称 $\bar{A}$ 为 A 在 $[0, 1]^m$ 上诱导的阶梯函数. 可以证明, 命题的真度可以由其诱导函数的积分表示.

定理 2 在系统 MTL_n 中, 设 $A(p_1, p_2, \dots, p_m)$ 是含有 m 个原子命题的公式, 则

$$\tau(A) = \int_{[0, 1]^m} \bar{A}(y_1, y_2, \dots, y_m) dy_1 \cdots dy_m.$$

证明 (略).

由定义 8 容易验证下面的性质:

$$\overline{\neg A} = \neg \bar{A}, \overline{A \vee B} = \bar{A} \vee \bar{B}, \overline{A \rightarrow B} = \bar{A} \rightarrow \bar{B}.$$

利用 MTL_n 系统中真度的积分表示可以证明真度具有以下性质:

命题 4 在系统 MTL_n 中, 设 $A, B \in F(S)$, 则

(1) $\tau(A \vee B) = \tau(A) + \tau(B) - \tau(A \wedge B)$.

(2) 若蕴涵算子还满足 $x \rightarrow 0 = 1 - x$, 则 $\tau(A) + \tau(\neg A) = 1$.

4 系统 $S - MTL_n$ 中真度推理规则及伪距离

定理 3 在系统 $S - MTL_n$ 中, 设 $A, B, C \in F(S)$, $\alpha, \beta \in [0, 1]$. 则

(1) (真度 MP 规则) 若 $\tau(A) \geq \alpha, \tau(A \rightarrow B) \geq \beta$, 则 $\tau(B) \geq \alpha + \beta - 1$.

(2) (真度 HS 规则) 若 $\tau(A \rightarrow B) \geq \alpha, \tau(B \rightarrow C) \geq \beta$, 则 $\tau(A \rightarrow C) \geq \alpha \geq \alpha + \beta - 1$.

(3) 若 $A \rightarrow B$ 是重言式, 则 $\tau(A) \leq \tau(B)$.

证明 只证(1),(2)(3)易由(1)推出. 不妨设公式 A, B, C 都含有相同的 m 个原子公式 $p_1, \dots, p_m$ (原子公式不同时, 可通过析取矛盾式或合取重言式使之相同). 因为 $a \rightarrow c + 1 \geq a \rightarrow b + b \rightarrow c; a, b, c \in [0, 1]$; 令 $a = 1$ 可得 $c \geq b + b \rightarrow c - 1; b, c \in [0, 1]$. 所以 $\bar{B} \geq \bar{A} + \bar{A} \rightarrow \bar{B} - 1$.

从而

$$\begin{aligned} \tau(B) &= \int_{[0, 1]^m} \bar{B}(y_1, \dots, y_m) dy_1 \cdots dy_m \\ &\geq \int_{[0, 1]^m} \bar{A}(y_1, \dots, y_m) dy_1 \cdots dy_m \\ &\quad + \int_{[0, 1]^m} \bar{A} \rightarrow \bar{B}(y_1, \dots, y_m) dy_1 \cdots dy_m - 1 \\ &= \tau(A) + \tau(A \rightarrow B) - 1 \\ &\geq \alpha + \beta - 1. \end{aligned}$$

下面基于真度的定义给出 MTL_n 相似度和伪距离的定义以及它们的性质.

定义 9 在 S -MTL $_n$ 命题逻辑系统中, 设 $A, B, C \in F(S)$, 令 $\xi(A, B) = \tau((A \rightarrow B) \wedge (B \rightarrow A))$, 称 $\xi(A, B)$ 为公式 A 与 B 之间的相似度.

命题 5 在 S -MTL $_n$ 命题逻辑系统中, 设 $A, B, C \in F(S)$, 则

- (1) $\xi(A, B) = 1$ 当且仅当 $A \approx B$.
- (2) 当 $A \rightarrow B$ 是矛盾式或 $B \rightarrow A$ 是矛盾式时, $\xi(A, B) = 0$.
- (3) $\xi(A, B) + \xi(B, C) \leq \xi(A, C) + 1$.

由命题 5 及 S -MTL $_n$ 命题逻辑的性质可以得到如下结论.

命题 6 在 S -MTL $_n$ 系统中, 设 $A, B \in F(S)$, 令

$$\rho(A, B) = 1 - \xi(A, B),$$

则 ρ 是 $F(S)$ 上的伪距离.

定理 4 在 n 值 S -MTL 命题逻辑系统中, $F(S)$ 上的运算 $\neg, \rightarrow, \vee$ 关于伪距离 ρ 都是连续的.

证明 设 $A, A_m \in F(S)$ ($m = 1, 2, \dots$) 且对任意给定的 $\epsilon > 0$, 有自然数 M 使得当 $m > M$ 时有 $\rho(A, A_m) < \epsilon$, 即 $\tau((A \rightarrow A_m) \wedge (A_m \rightarrow A)) > 1 - \epsilon, m > M$.

易证, 在 n 值 S -MTL 命题逻辑系统中, $(A \rightarrow 0) \rightarrow (A \rightarrow 0)$ 是重言式, 所以 $A \rightarrow ((A \rightarrow 0) \rightarrow 0)$ 即 $A \rightarrow \neg \neg A$ 是重言式. 同样易证 $(B \rightarrow C) \rightarrow ((A \rightarrow B) \rightarrow (A \rightarrow C))$ 是重言式, 所以 $(B \rightarrow \neg \neg B) \rightarrow ((A \rightarrow B) \rightarrow (A \rightarrow \neg \neg B))$ 是重言式, 由 MP 规则保重言式得 $(A \rightarrow B) \rightarrow (A \rightarrow \neg \neg B)$ 也是重言式. 又 $(A \rightarrow \neg \neg B) \rightarrow (\neg B \rightarrow \neg A)$ 是重言式, 由 HS 规则保重言式知, $(A \rightarrow B) \rightarrow (\neg B \rightarrow \neg A)$ 是重言式. 所以, 对任意 m , $(A \rightarrow A_m) \rightarrow (\neg A_m \rightarrow \neg A)$ 和 $(A_m \rightarrow A) \rightarrow (\neg A \rightarrow \neg A_m)$ 都是重言式. 所以对任意 $m = 1, 2, \dots$, 公式 $(A \rightarrow A_m) \wedge (A_m \rightarrow A) \rightarrow (\neg A \rightarrow \neg A_m) \wedge (\neg A_m \rightarrow \neg A)$ 重言式. 根据定理 3 的结论得

$$\begin{aligned} & \tau((A \rightarrow A_m) \wedge (A_m \rightarrow A)) \\ & \leq \tau((\neg A \rightarrow \neg A_m) \wedge (\neg A_m \rightarrow \neg A)). \end{aligned}$$

所以, $\tau((\neg A \rightarrow \neg A_m) \wedge (\neg A_m \rightarrow \neg A)) > 1 - \epsilon$. 最后由伪距离 ρ 的定义知当 $m > M$ 时 $\rho(\neg A, \neg A_m) < \epsilon$, 即 $F(S)$ 上的运算 $\neg$ 关于伪距离 ρ 都连续. $\rightarrow$ 和 $\vee$ 关于 ρ 连续的证明类似文献[7, 9, 18]中的证明, 在此不再重复.

由于 $F(S)$ 上的其他运算, 如 $\wedge, \otimes, \oplus$ 都可以由 $\neg, \rightarrow, \vee$ 表示, 所以 $\wedge, \otimes, \oplus$ 关于伪距离 ρ 在 $F(S)$ 上都是连续的.

5 逻辑度量空间 $(F(S), \rho)$ 中的近似推理

$F(S)$ 中既然有了伪距离, 公式就有了远近之分, 这就为在 n 值 S -MTL 系统中建立近似推理理论提供了方便. 但逻辑推理是形式化的东西, 如何将数值计算融入其中并不容易, 下面我们将给出一种带有误差的近似推理机制. 设 $\Gamma \subseteq F(S)$, 以 $D(\Gamma)$ 记全体 Γ -结论之

集. 用 A^n 表示 $\underbrace{A \otimes \cdots \otimes A}_n$, 以 $\bigotimes_{i=1}^m A_i^n$ 表示 $A_1^n \otimes \cdots \otimes A_m^n$.

定义 10 设 $\Gamma \subseteq F(S), A \in F(S), \epsilon > 0$. 定义公式 A 到全体 Γ 结论之集 $D(\Gamma)$ 的伪距离为:

$$\rho(A, D(\Gamma)) = \inf\{\rho(A, B) \mid B \in D(\Gamma)\}.$$

定理 5 设 $\Gamma \subseteq F(S), A \in F(S)$, 则

- (1) 当 $\Gamma = \{A_1, \dots, A_k\}$ 为有限集时,

$$\rho(A, D(\Gamma)) = \rho\left(A, A \vee \left(\bigotimes_{i=1}^k A_i^n\right)\right).$$

- (2) 当 $\Gamma = \{A_1, A_2, \dots\}$ 为无穷集时,

$$\rho(A, D(\Gamma)) = \lim_{k \rightarrow \infty} \rho\left(A, A \vee \left(\bigotimes_{i=1}^k A_i^n\right)\right).$$

证明 (略).

定义 11 设 $\Gamma \subseteq F(S), A \in F(S), \epsilon > 0$, 如果在 A 的 ϵ -开领域内有 Γ 推论, 即

$$D(\Gamma) \cap \{B \in F(S) \mid \rho(A, B) < \epsilon\} \neq \emptyset,$$

则称 A 为 Γ 的误差小于 ϵ 的结论, 记 $A \in D_\epsilon(\Gamma)$.

显然, 若 $\Gamma \vdash A$, 则 $A \in D_\epsilon(\Gamma)$ 对任意 $\epsilon > 0$ 都成立. 下面的命题是显然的.

命题 7 设 $\Gamma \subseteq F(S), A \in F(S), \epsilon > 0$, 则以下条件等价:

- ① $A \in D_\epsilon(\Gamma)$.
- ② 存在从 Γ 到 B_m 的推演 $B_1, B_2, \dots, B_m$, 使得 $\rho(A, B_m) < \epsilon$.
- ③ $\rho(A, D(\Gamma)) < \epsilon$.

下面的定理给出了公式 A 为 Γ 的误差小于 ϵ 的结论的等价刻画:

定理 6 设 $\Gamma \subseteq F(S), A \in F(S), \epsilon > 0$, 则 $A \in D_\epsilon(\Gamma)$ 当且仅当

$$1 - \sup\{\tau(B \rightarrow A) \mid B \in D(\Gamma)\} < \epsilon.$$

证明 若 $A \in D_\epsilon(\Gamma)$, 则由命题 7 知

$$\begin{aligned} & \rho(A, D(\Gamma)) \\ & = \inf\{\rho(A, B) \mid B \in D(\Gamma)\} \\ & = \inf\{1 - \tau((A \rightarrow B) \wedge (B \rightarrow A)) \mid B \in D(\Gamma)\} \\ & = 1 - \sup\{\tau((A \rightarrow B) \wedge (B \rightarrow A)) \mid B \in D(\Gamma)\} < \epsilon. \end{aligned}$$

又因为 $\tau((A \rightarrow B) \wedge (B \rightarrow A)) \leq \tau(B \rightarrow A)$,

所以

$$\begin{aligned} & 1 - \sup\{\tau(B \rightarrow A) \mid B \in D(\Gamma)\} \\ & \leq 1 - \sup\{\tau((A \rightarrow B) \wedge (B \rightarrow A)) \mid B \in D(\Gamma)\} < \epsilon. \end{aligned}$$

反过来, 设

$$1 - \sup\{\tau(B \rightarrow A) \mid B \in D(\Gamma)\} < \epsilon,$$

则 $\inf\{1 - \tau(B \rightarrow A) \mid B \in D(\Gamma)\} < \epsilon$. 根据伪距离 ρ 及真度的性质知 $1 - \tau(B \rightarrow A) = \rho(A, B \vee A)$. 所以 $\inf\{\rho(A, B \vee A) \mid B \in D(\Gamma)\} < \epsilon$. 由 $B \in D(\Gamma)$ 及 $B \rightarrow B \vee A$ 是重言式得 $B \vee A \in D(\Gamma)$, 因此

$$\begin{aligned} \rho(A, D(\Gamma)) & = \inf\{\rho(A, B) \mid B \in D(\Gamma)\} \\ & \leq \inf\{\rho(A, B \vee A) \mid B \in D(\Gamma)\} < \epsilon. \end{aligned}$$

再由命题 7 可得 $A \in D_e(\Gamma)$, 定理得证.

6 结束语

最近出现的文献, 对部分 n 值命题逻辑系统中的真度理论进行了深入的研究, 但它们中大多是基于均匀概率测度定义的真度, 基于非均匀概率测度的真度理论只限于几种简单的三值命题逻辑系统, 并且没有给出真度的积分表达式. 本文从两个方面把这些真度理论统一到同一个框架下: 基于一般的概率测度在 n 值 S -MTL 命题逻辑系统中建立了统一的真度理论, 并且在统一的框架下给出了公式真度的积分表达式, 并进一步定义了公式间的相似度和伪距离, 提出了一种近似推理机制, 为进一步建立统一的近似推理理论奠定了基础.

参考文献

- [1] J B Rosser, A R Turquette. Many-Valued Logic[M]. Amsterdam: North-Holland, 1952.
- [2] Pavelka J. On fuzzy logic I, II, III[J]. Zeitschr Math Logic and Grundlagen d Math, 1979, 25(1): 45 – 52; 119 – 134; 447 – 464.
- [3] De Gas M. Knowledge Representation in A Fuzzy Setting[M]. Paris: Tech Rep89/48 University Paris Vilaforia, 1989.
- [4] Wang G J, Fu L, Song J S. Theory of truth degrees of propositions in two-valued logic[J]. Science in China (Series A), 2002, 45(9): 1106 – 1116.
- [5] 王国俊, 宋建设. 命题逻辑中的程度化方法[J]. 电子学报, 2006, 34(2): 252 – 257.
Wang G J, Song J S. Graded method in propositional logic[J]. Acta Electronica Sinica, 2006, 34(2): 252 – 257. (in Chinese)
- [6] Li B J, Wang G J. Theory of truth degrees of formulas in Łukasiewicz n -valued propositional logic and a limit Theorem [J]. Science in China(Ser F), 2005, 48(6): 727 – 736.
- [7] 王国俊. 数理逻辑引论与归结原理(第二版)[M]. 北京: 科学出版社, 2006.
- [8] 李骏, 王国俊. 基于支持度理论的广义 MP 问题的形式化解[J]. 电子学报, 2008, 36(11): 2190 – 2194.
Li J, Wang G J. Formalized solutions for problems of generalized Mudus Ponens under theory of sustentation degree[J]. Acta Electronica Sinica, 2008, 36(11): 2190 – 2194. (in Chinese)
- [9] 李骏, 王国俊. 逻辑系统 L_n^* 中命题的真度理论[J]. 中国科学(E辑), 2006, 36(6): 631 – 643.
Li J, Wang G J. Theory of truth degrees in logic system L_n^* [J]. Science in China(Ser E), 2006, 36(6): 631 – 643. (in Chinese)
- [10] Zhou H J, Wang G J. Generalized consistency degree of theories w. r. t. formulas in several standard complete logic systems[J]. Fuzzy Sets and Systems, 2006, 157(15): 2058 –

2073.

- [11] Wang G J, She Y H. Topological description of divergency and consistency of two-valued propositional theories[J]. Acta Mathematica Sinica, Chinese Series, 2007, 50(4): 841 – 850.
- [12] M Baczyński, B Jayaram. Fuzzy Implications[M]. Berlin: Springer-Verlag, 2008.
- [13] 左卫兵. 一种非均匀概率空间下二值命题逻辑中命题的真度理论[J]. 河北师范大学学报(自然科学版), 2008, 32(1): 1 – 5.
Zuo W B. On the theory of truth degree of propositions in two-valued logic in the space of uneven probability[J]. Journal of Hebei Normal University (Natural Science Edition), 2008, 32(1): 1 – 5. (in Chinese)
- [14] 左卫兵. 逻辑系统 G_3 在非均匀概率空间下命题的真度理论[J]. 数学研究, 2008, 41(2): 205 – 211.
Zuo W B. On Gödel 3-valued truth degree theory in the space of uneven discrete probability [J]. Journal of Mathematic Study, 2008, 41(2): 205 – 211. (in Chinese)
- [15] Thomas Whalen. Parameterized R-implications[J]. Fuzzy Sets and Systems, 2003, 134(2): 231 – 281.
- [16] Francesc Esteve, Lluís Godó. Monoidal t-norm based logic: Towards a logic for left-continuous t-norms[J]. Fuzzy Sets and Systems, 2001, 124(2): 271 – 288.
- [17] P R Halmos. Measure Theory[M]. New York: Springer-Verlag, 1980.
- [18] 李璧镜, 王国俊. 正则蕴涵算子所对应的逻辑伪度量空间[J]. 电子学报, 2010, 38(3): 497 – 502.
Li B J, Wang G J. Logic pseudo-metric spaces of regular implication operators[J]. Acta Electronica Sinica, 2010, 38(3): 497 – 502. (in Chinese)

作者简介



李 骏 男, 1972 年 4 月出生, 甘肃白银人. 兰州理工大学理学院副教授, 博士, 硕士生导师. 主要研究方向为不确定性推理, 非经典数理逻辑.

E-mail: lj99120@yahoo.com.cn



邓富喜 男, 1983 年 10 月出生, 甘肃武山县人. 兰州理工大学理学院硕士研究生. 主要研究方向为不确定性推理.