经典逻辑度量空间中的模2次范整线性空间结构

胡明娣[1,2],王国俊[1]
(1.陕西师范大学数学研究所,陕西西安 710062; 2.安康学院数数学系,陕西安康 725000)

摘 要: 将次范整线性空间理论用于研究经典逻辑度量空间($[F(S)],\rho$).构造出了($[F(S)],\rho$)中的一类等距变换,证明了这类等距变换之集构成一个群;进而证明了经典逻辑度量空间($[F(S)],\rho$)相对于此结构构成带有模2加法性质的次范整线性空间,且此空间同构于有限域$F(2)$上的线性赋范空间;建立了范数与逻辑公式的真度以及范数与逻辑度量空间中的度量ρ之间的关系.

关键词: 逻辑度量空间; 平移群; 次范整线性空间; 真度; 有限域$F(2)$上的线性赋范空间
中图分类号: O141.1, O177.3 **文献标识码:** A **文章编号:** 0372-2112(2011)04-0899-07

$\boldsymbol{Z}(2)$-Normable Linear Structure on Classical Logic Metric Space

HU Ming-di[1,2], WANG Guo-jun[1]
(1. *Institute of Mathematics, Shaanxi Normal University, Xi' an, Shaannxi* 710062, *China*;
2. *Department of Mathematics, Ankang College, Ankang, Shaaxi* 725000, *China*)

Abstract: The method for proposing sub-normed Z-linear space has been applied to investigate the structure of classical logic metric space ($[F(S)],\rho$). A class of isometric transformations in ($[F(S)],\rho$) are formed and it is proved that these isometric transformations constitute a group, and the space ($[F(S)],\rho$) thereby make a sub-normed Z-linear space with a modular 2 additive structure. Moreover, it is clarified that the space ($[F(S)],\rho$) is isomorphic to the normable linear space on the finite field $F(2)$, and relations among norm, truth degree and metric are obtained.

Key words: logic metric space; translation group; sub-normed Z-linear space; truth degree; normable linear space on the finite field $F(2)$

1 引言

为评判一般逻辑公式的真假,美国Stanford大学的Adam教授、Nilsson教授以及IBM研究决策中心的Fagin教授和Halpern教授等把概率的思想引入到命题逻辑系统中提出了公式的概率概念,本文第二作者则利用均匀概率测度空间的无穷可数乘积与(0,1)中的随机数列先后提出了公式的真度和随机真度概念,从而分别形成了两门崭新的交叉学科——概率逻辑学和计量逻辑学[1~7].此后,相应的讨论热烈蓬勃[8~11].在文献[5]中,作者基于势为2的均匀概率空间的无穷乘积在经典二值命题逻辑中引入了逻辑公式的真度以及逻辑公式之间的相似度和伪距离等概念,并据此建立了逻辑度量空间,证明了该空间不含孤立点[12~14],从而为在经典二值命题逻辑中建立近似推理理论提供了一种可能的框架.另一方面,早在1958年,本文的第二作者为推广Sheeffer定理在文献[15]中引入了平移群和平移空间等概念[16].此后平移空间得到了进一步的研究,并基于此提出了次范整线性空间(简称为Z-空间,参看文献[17])理论.关于逻辑度量空间的结构,目前只有少量的研究成果[18~20].本文将以上两个方面相结合,将次范整线性空间理论用于研究逻辑度量空间的结构,得出了揭示该空间结构的清晰结果,即,通过在经典逻辑度量空间中引入平移群结构的方法使其成为同时具有逻辑结构、拓扑结构和线性结构的载体.我们将看到,上述的三种结构之间存在着紧密而和谐的关系,这就为进一步研究逻辑度量空间的更深层的性质奠定了宽厚的基础.

2 预备知识

在本节中,除了有关$M(n)$的内容而外,其余的定义和结论均取自文献[5,12~14].

定义1 设$S=\{p_1,p_2,\cdots\}$是可数集,$\neg$和$\rightarrow$分别是S上的一元和二元运算,$F(S)$是由S生成的($\neg$,$\rightarrow$)型自由代数.称$F(S)$中的元为合式公式或逻辑公式,简称为公式,称S中的元为原子公式.设$\{0,1\}$为最简布尔代数,其中$\neg x=1-x$,$x\rightarrow y=0$当且仅当$x=1$,

收稿日期:2010-05-06;修回日期:2011-01-26
基金项目:国家自然科学基金(No.10771129);陕西师范大学研究生培养创新基金(No.2009CXB006)

$y=0$.称$(\neg,\rightarrow)$型同态映射 $v:F(S)\rightarrow\{0,1\}$为 $F(S)$的赋值,称 $v(A)$为 A 的赋值.以 Ω 记 $F(S)$的全体赋值之集.若$\forall v\in\Omega$ 恒有 $v(A)=1$ 成立,则称 A 为重言式,若$\forall v\in\Omega$ 恒有 $v(A)=0$ 成立,则称 A 为矛盾式.

定义 2 设 $A=A(p_1,\cdots,p_n)$为含有 n 个原子公式的合式公式,则 A 诱导出一个布尔函数

$$\varphi(A):\{0,1\}^n\rightarrow\{0,1\} \tag{1}$$

这里对每个 n 维 0－1 向量$(x_1,\cdots,x_n)$,$\varphi(A)(x_1,\cdots,x_n)$的值是在 $A(p_1,\cdots,p_n)$中用 x_i 取代 p_i 并按最简布尔代数$\{0,1\}$中的否定运算和蕴涵运算理解 $\neg$ 和$\rightarrow$而得.令

$$\tau(A)=\frac{|\varphi(A)^{-1}(1)|}{2^n} \tag{2}$$

称 $\tau(A)$为 A 的真度.设 B 含有和 A 相同的 n 个原子公式,分别称

$$\xi(A,B)=\tau((A\rightarrow B)\wedge(B\rightarrow A)) \tag{3}$$
$$和\ \rho(A,B)=1-\xi(A,B)$$

为 A,B 之间的相似度和伪距离.

容易证明下面的命题:

命题 1 (1)逻辑等价的公式的真度相等,任二公式都可等价地化为两个含有同样的原子公式的合式公式.所以式(3)对任二逻辑公式都有效.

(2)逻辑等价是两个公式间的相似度等于 1,即,伪距离等于 0 的充要条件,但二逻辑等价的公式不必为同一个公式,所以 ρ 只是 $F(S)$上的伪距离,而不是距离,从而$(F(S),\rho)$是伪度量空间,称为逻辑度量空间.

(3)设 A 与 B 是含有同样的原子公式 $p_1,p_2,\cdots,p_n$ 的逻辑公式,则 A 与 B 逻辑等价当且仅当 A 与 B 诱导出相同的 n 元布尔函数.若它们所诱导的布尔函数在 k 个 n 维向量处的值不相等,则 $\rho(A,B)=\dfrac{k}{2^n}$.

以下用 $B(n)$记全体 n 元布尔函数之集.

定义 3 逻辑等价关系$\approx$是 $F(S)$上的$(\neg,\rightarrow)$型同余关系,商代数$[F(S)]=F(S)/\approx$是布尔代数,称为 Lindenbaum 代数.以$[A]$记逻辑公式 A 所在的等价类,定义

$$\rho^*([A],[B])=\rho(A,B),\ A,B\in F(S),$$

则 ρ^* 是$[F(S)]$上的距离函数,将 ρ^* 简记为 ρ,称 $M=([F(S)],\rho)$为经典逻辑度量空间.

定义 4 令 $M(n)=\{[A]:A$ 中含有的原子公式包含于$\{p_1,p_2,\cdots,p_n\}\}$,则

$$M(1)\subset M(2)\subset\cdots,M=\bigcup_1^\infty M(n) \tag{4}$$

注意,(1)原子公式 $p_k\in M(n)$当且仅当 $k\leqslant n$,比如 $p_5\in M(5)$,但 $p_5\notin M(4)$;(2)如果某逻辑公式 B 中含有的原子公式的编号不是从 1 到 n,但其中标号最大的原子公式的标号为 n 则容易找出和 B 逻辑等价且含有原子公式为 $p_1,p_2,\cdots,p_n$ 的公式 B^*,这时$[B^*]=[B]$.所以式(4)成立.

命题 2 $M(n)$与 $B(n)$之间存在一一对应关系($n=1,2,\cdots$),且$(M(n),\rho)$是经典逻辑度量空间 M 的有限的闭子空间.

证明 首先,作映射 $\psi:M(n)\rightarrow B(n)$如下:

$$\forall[A]\in M(n),\psi([A])=\varphi(A)\in B(n)$$

若$[A]\neq[B]$,则 A 与 B 不是逻辑等价的,所以由命题 1 知 $\varphi(A)\neq\varphi(B)$,即,$\psi([A])\neq\psi([B])$.又,任取 n 元布尔函数 $f\in B(n)$,则存在逻辑公式[14] $A(p_1,p_2,\cdots,p_n)$使 $f=\varphi(A)=\psi([A])$.所以 ψ 是一一的满射.其次,因为 n 元布尔函数的个数有限,而 $M(n)$与 $B(n)$之间存在一一对应关系,所以 $M(n)$是有限集.又,度量空间中的单点集是闭集,所以作为有限多个单点集之并,$M(n)$是闭集.以下也常把 $\psi([A])$写为 $\varphi(A)$,即,$\psi([A])=\varphi(A)$.

定义 5[15~17] 设(X,ρ)是度量空间,$f:X\rightarrow X$ 是等距映射,即,f 是满足条件

$$\rho(f(x),f(y))=\rho(x,y) \tag{5}$$

的一一的满射.如果 x 在 X 中变化时 $\rho(x,f(x))$取常值,则称 f 为 X 沿自身的平移,简称为 X 的平移.如果存在 X 的平移的集合 T 满足条件:

(1)在 T 上定义 f 与 g 的乘积 $f*g$ 为 f 与 g 的复合 $f\circ g$,即 $f*g(x)=f(g(x))$,则 T 构成群.

(2)对 X 中任意给定的点对(x',x''),存在 $f\in T$ 使 $f(x')=x''$.则称(X,T)为平移空间,称 T 为 X 上的平移群.若乘积运算 $*$ 可换,则称(X,T)为可换平移空间.

3 $M(n)$上的平移群结构及其性质

定义 6 (1)任取$[A]\in M(n)$,则 $\varphi(A)$是一个 n 元布尔函数.将其自变量之集$\{0,1\}^n$ 中的全体 2^n 个 n 维向量按字典序从小到大排列(以下简称为自然排列)为 $\beta_1,\cdots,\beta_{2^n}$.设 $\varphi(A)(\beta_k)=c_k$,则$(c_1,\cdots,c_{2^n})$是一个 2^n 维 0－1 向量,记为 $Vec(A)$.以 $\Delta(A)$记向量 $Vec(A)$中坐标等于 1 的坐标的自然序号之集,则布尔函数 $\varphi(A)$,$[A]$,$Vec(A)$和 $\Delta(A)$完全相互唯一决定.

(2)令 $V(2^n)=\{Vec(A):[A]\in M(n)\}$.考虑映射

$$f:M(n)\rightarrow V(2^n),f([A])=Vec(A).$$

设$[A]$和$[B]$不等,则 $\varphi(A)$和 $\varphi(B)$是不同的 n 元布尔函数,所以 $Vec(A)\neq Vec(B)$,即 $f([A])\neq f([B])$,从而 f 是单射.任取 $v\in V(2^n)$,则存在由某逻辑公式 A 所诱导的 n 元布尔函数 $\varphi(A)$,其函数值的自然排列等于 v.可见 f 是一一的满射.所以以下常将 $M(n)$中的元$[A]$与 $V(2^n)$中的向量 $f([A])=Vec(A)$不加区别.

例 1 设 $n=3$,$A=\neg(p_1\rightarrow p_2\wedge p_3)$,则 $\varphi(A)(x_1,$

$x_2,x_3)=1$ 当且仅当(x_1,x_2,x_3)等于$(1,0,0)$或$(1,0,1)$或$(1,1,0)$. $\varphi(A)$的函数值向量是 8 维 0-1 向量,上述 3 个自变量向量的自然序号之集 $\Delta(A)=\{5,6,7\}$.

定义 7　在$\{0,1\}$中规定加法$\oplus$为模 2 加法,即,$0\oplus 0=0,0\oplus 1=1\oplus 0=1,1\oplus 1=0$. 将$\oplus$按点式方法作用于 $V(2^n)$中的向量的每个坐标,则得 $V(2^n)$上的模 2 加法运算,仍记为$\oplus$,即,

$$(c_1,\cdots,c_{2^n})\oplus(d_1,\cdots,d_{2^n})=(c_1\oplus d_1,\cdots,c_{2^n}\oplus d_{2^n})\quad(6)$$

定义 8　设 $G\subseteq N(2^n)=\{1,2,\cdots,2^n\}$,令 $c_k=1$ 当且仅当 $k\in G$,否则令 $c_k=0$. 则得 $V(2^n)$中的一个向量$(c_1,\cdots,c_{2^n})$. 设$[A]$是 $M(n)$中的任意元,并且与之对应的 $Vec(A)=(d_1,\cdots,d_{2^n})$,作映射 $\eta_G:M(n)\to M(n)$如下:

$$\begin{aligned}\eta_G([A])&=\eta_G(f^{-1}(Vec(A)))=f^{-1}(\eta_G(Vec(A)))\\&=f^{-1}((c_1\oplus d_1,\cdots,c_{2^n}\oplus d_{2^n}))\\&=f^{-1}(Vec(B))=[B]\end{aligned}\quad(7)$$

称 η_G 为$M(n)$上的平移变换. 以下用 $T(n)$记 $M(n)$上由式(7)定义的平移变换的全体之集,即

$$T(n)=\{\eta_G:G\subseteq N(2^n)\}\quad(8)$$

命题 3　设$[A],[B]\in M(n)$, $\eta_G\in T(n)$,则

(1)$\rho(\eta_G([A]),\eta_G([B]))=\rho([A],[B])$.

(2)$\rho([A],\eta_G([A]))=\dfrac{|G|}{2^n}$.

(3)$\eta_G:M(n)\to M(n)$是一一的满射.

证明　(1)设 A 与 B 是含有同样的 n 个原子公式的逻辑公式,且它们所诱导的布尔函数在 k 个 n 维向量处的值不相等,则由命题 1(3)知 $\rho(A,B)=k/2^n$. 其次,设 G 的势等于 k,则按照定义 7 所规定的 $M(n)$上的模 2 加法知 η_G 作用于$[A]$只是将布尔函数 $\varphi(A)$的 k 个值作了 0,1 互换,η_G 作用于$[B]$同样对 $\varphi(B)$的相应的 k 个值也作了 0,1 互换. 由此可见,布尔函数 $\varphi(A)$与 $\varphi(B)$有多少个相等的值,在经过上述的 0,1 互换后所得的布尔函数 $\varphi(\eta_G([A]))$与 $\varphi(\eta_G([B]))$仍有多少的相等的值. 所以(1)成立.

(2)因为 η_G 作用于$[A]$只是将布尔函数 $\varphi(A)$的$|G|$个值作了 0,1 互换,其余的值不变所以由命题 1(3)知(2)成立.

(3)设$[A],[B]$是 $M(n)$中不同的元,则 $\varphi(A)$与 $\varphi(B)$是不相等的 n 元布尔函数,由 η_G 的作用效果知 $\varphi(\eta_G([A]))$与 $\varphi(\eta_G([B]))$仍是不同的布尔函数,即,$\eta_G([A])\neq\eta_G([B])$,所以 η_G 是一一映射. 又,设$[B]\in M(n)$,则 $\eta_G([B])\in M(n)$,满足 $\eta_G(\eta_G([B]))=[B]$,所以 η_G 是满射.

由命题 3 知 η_G 确为$M(n)$上的平移变换.

由命题 3 中(3)的证明知下面的推论成立:

推论 1　设$[A],[B]\in M(n)$,则存在 $\eta\in T(n)$使 $\eta([A])=[B]$.

定理 1　设 $G,H\subseteq N(2^n)$,定义 $T(n)$上的加法$\oplus$如下

$$(\eta_G\oplus\eta_H)([A])=[B],\varphi(B)(\beta_j)=\varphi(A)(\beta_j)\quad(9)$$

当且仅当 $j\in(G\cap H)\cup(N(2^n)-(G\cup H))$

这里 $\beta_j\in\{0,1\}^n$,则$(T(n),\oplus)$构成可换群.

证明　(1)令 G 为空集,则由式(9)知 η_G 是$T(n)$中的恒等变换,即,η_ϕ 是$(T(n),\oplus)$中的加法单位. (2)由定义 8 和式(9)知,若设 $\eta_G\oplus\eta_H=\eta_X$,则 X 是 G 与 H 的对称差,即,

$$X=G\cup H-G\cap H\quad(10)$$

设 $((\eta_G\oplus\eta_H)\oplus\eta_K)([A])=[C]$,

$(\eta_G\oplus(\eta_H\oplus\eta_K))([A])=[D],G,H,K\subseteq N(2^n)$.

则不难由式(9)和式(10)验证 $\varphi(C)(\beta_j)=\varphi(A)(\beta_j)$当且仅当

$$\begin{aligned}j\in&(G\cap H-K)\cup(G\cap K-H)\cup(H\cap K-G)\\&\cup(N(2^n)-(G\cup H\cup K))\end{aligned}\quad(11)$$

同理可验证 $\varphi(D)(\beta_j)=\varphi(A)(\beta_j)$当且仅当式(11)成立. 所以对任意的$[A]\in M(n)$,恒有

$$((\eta_G\oplus\eta_H)\oplus\eta_K)([A])=(\eta_G\oplus(\eta_H\oplus\eta_K))([A]).$$

所以$(\eta_G\oplus\eta_H)\oplus\eta_K=\eta_G\oplus(\eta_H\oplus\eta_K)$. 即,$\oplus$满足结合律. (3)由式(9)可证 $\eta_G\oplus\eta_G=\eta_\emptyset$,即,$\eta_G$ 的逆元就是它自己,所以$(T(n),\oplus)$是群. 由式(9)知$(T(n),\oplus)$是可换群.

定理 2　设 $G,H\subseteq N(2^n)$,则

$$(\eta_G\oplus\eta_H)([A])=\eta_G(\eta_H([A]))\quad(12)$$

即,式(9)中定义的两个平移变换之间的加法运算其实就是复合运算. 由$\oplus$的交换性知

$$\eta_G(\eta_H([A]))=\eta_H(\eta_G([A])),$$
$$\eta_G,\eta_H\in T(n),[A]\in M(n)\quad(13)$$

所以 η_G 与 η_H 的作用顺序可以交换,从而由定义 5 知$(T(n),\oplus)$是可换平移群,$(M(n),T(n))$是可换平移空间.

η_G 与 η_H 的作用顺序的可交换性可由定义 8 直接看出,并不需要借助于$\oplus$的交换性来得出,但定理 2 揭示了模 2 加法$\oplus$与复合运算之间的关系.

证明　设 $\eta_H([A])=[C]$, $\eta_G([C])=[B]$则 $\eta_G(\eta_H([A]))=[B]$. 由定义 7 知

$\varphi(A)(\beta_j)\oplus 1=\varphi(C)(\beta_j)$当且仅当 $j\in H$,

$\varphi(C)(\beta_j)\oplus 1=\varphi(B)(\beta_j)$当且仅当 $j\in G$,

所以当且仅当 $j\in(G\cap H)\cup(N(2^n)-(G\cup H))$时

$$\varphi(B)(\beta_j)=\varphi(A)(\beta_j)\oplus 1\oplus 1=\varphi(A)(\beta_j).$$

即,当且仅当 $j\in(G\cap H)\cup(N(2^n)-(G\cup H))$时

$\varphi(A)(\beta_j)=\varphi(B)(\beta_j)$是 $\eta_G(\eta_H([A]))=[B]$成立

的充要条件.

所以由式(9)知式(12)成立.

推论 2 设 $\eta_G\eta_H=\eta_K$,则 $K=G\cup H-G\cap H$.

证明 由定理 2 和式(10)即得本推论.

命题 4 设$[A],[B]\in M(n)$,则存在唯一的平移变换 $\eta\in T(n)$使 $\eta([A])=[B]$.

证明 设$[A],[B]\in M(n)$,$\eta,\lambda\in T(n)$,$\eta([A])=\lambda([A])=[B]$.任取$[X]\in M(n)$,由推论 1 知存在 $\zeta\in T(n)$使 $\zeta([A])=[X]$.因为$(T(n),\oplus)$是可换的平移群,所以

$$\eta([X])=\eta(\zeta([A]))=\zeta(\eta([A]))=\zeta(\lambda([A]))$$
$$=\lambda(\zeta([A]))=\lambda([X]).$$

所以 $\eta=\lambda$.

定义 9 设 G 为单点集,则称 η_G 为单点变换.设 $G=N(2^n)$,则称 η_G 为全变换,记为 η^*.设 G 和 H 不相交,则称 η_G 和 η_H 为不交变换.

命题 5 设$(T(n),\oplus)$是 $M(n)$上的变换群,则

(1)$|T(n)|=2^{2^n}$.

(2)η_G 和 η_H 是不交变换,且 $G\cup H=K$ 时有 $\eta_G\oplus\eta_H=\eta_K$.

(3)$T(n)$中的每个变换都可表示为若干个单点变换的和.

(4)$\eta_G\oplus\eta_G=\eta_G\eta_G=\eta_\varnothing$,即,$T(n)$中每个元都是幂零元,每个元都是其自身的逆元.

(5)逻辑公式 A 与 B 互为否命题当且仅当 $\eta^*([A])=[B]$.

证明 (1)$T(n)$中变换的个数等于 $N(2^n)$的子集的个数,所以(1)成立.

(2)由推论 2 和定理 2 即得(2).

(3)由(2)和定义 8 可归纳地证明(3).

(4)由模 2 加法的意义和定义 8 即得.

(5)设逻辑公式 A 与 B 互为否命题,即,$B=\neg A$,则 $\varphi(B)=1-\varphi(A)=1\oplus\varphi(A)$,即,布尔函数 $\varphi(B)$在每个 n 维向量处的值都可由$\varphi(A)$在该向量处的值模 2 加 1 而得,所以 $\eta^*([A])=[B]$.反过来,由 $\eta^*([A])=[B]$可证 A 与 B 互为否命题.

4 次范整线性空间 $M(n)$

定义 10 [17] 设$(X,+,\theta)$是 Abel 群,Z 是整数加群.如果

(1)对于每个序对$(m,x)\in Z\times X$,X 中有唯一的元 mx 与之对应,且满足

$$m(x+y)=mx+my,(m+n)x=mx+nx,\quad(14)$$
$$(mn)x=m(nx),1x=x.$$

(2)可在 X 上引入次范$\|\circ\|:X\to Z$,满足条件

$$\|x\|\geqslant0;\|x\|=0\text{ 当且仅当 }x=\theta;$$
$$\|x+y\|\leqslant\|x\|+\|y\|;\|-x\|=\|x\|;x.y\in X\quad(15)$$

则我们称$(X,+,\theta,\|\circ\|)$为次范整线性空间,或简称为 Z-空间.

定理 3 在可换平移空间$(M(n).T(n))$中,基于平移群 $T(n)$可在 $M(n)$中定义加法+和次范$\|\circ\|$,使$(M(n),+,[E],\|\circ\|)$成为 Z-空间,这里$[E]$是 $M(n)$中任意选定的元.

证明 任取$[E]\in M(n)$并固定这个$[E]$.对每个$[A]\in M(n)$,$T(n)$中有唯一的平移变换 η 使$\eta([E])=[A]$,记此 η 为 g_A,则$[A]=g_A([E])$.在 $M(n)$中定义加法+如下:

$$[A]+[B]=g_A([B])\quad(16)$$

由 $T(n)$是可换平移群和式(16)得

$$[A]+[B]=g_A([B])=g_A(g_B([E]))=g_B(g_A([E]))$$
$$=g_B([A])=[B]+[A]\quad(17)$$

所以加法+是可换的.其次,

$$([A]+[B])+[C]=[C]+([B]+[A])=g_C(g_B(g_A([E])))$$
$$=g_A(g_B(g_C([E])))=[A]+([B]+[C]).$$

所以+是结合的.又,由$[E]+[A]=[A]+[E]=g_A([E])=[A]$知$[E]$是加法+的单位元.最后,$g_A$ 在群 $T(n)$中有逆元 h_A,由

$$[A]+h_A[E]=g_A(h_A([E]))=(g_Ah_A)([E])=[E]$$

知 $h_A[E]$是$[A]$关于加法+的逆.所以$(M(n),+,[E])$是 Abel 群.$[A]$的逆 $h_A[E]$可简写为$-[A]$.由群的性质知$-([A]+[B])=(-[A])+(-[B])$等等.

由命题 5(4)和式(17)知$[A]+[A]=g_A(g_A([E]))=\eta_\varnothing([E])=[E]$.由此易证

$$m[A]=[E]\text{若}m\text{ 是偶数},m[A]=[A]\text{若}m\text{ 是奇数},m\in Z\quad(18)$$

由式(18)易证式(14)中的各等式对于 $x,y\in M(n)$和 $m,n\in Z$ 都成立.

最后,定义次范如下:

$$\|[A]\|=\rho([A],[E])\quad(19)$$

这里 ρ 是经典逻辑度量空间$([F(S)],\rho)$的子空间 $M(n)$中的度量函数.显然

$$\|[A]\|\geqslant0;\|[A]\|=0\text{ 当且仅当}[A]=[E],$$

所以式(15)中的第一部分成立.又,由 g_A 和 h_A 是等距变换得

$$\|-[A]\|=\rho(-[A],[E])=\rho(h_A([E]),[E])$$
$$=\rho(g_A(h_A([E])),$$
$$g_A([E]))=\rho([E],[A])=\|[A]\|.$$

$$\|[A]+[B]\|=\|g_A([B])\|=\rho(g_A([B]),[E])$$
$$=\rho([B],h_A([E]))=\rho([B],-[A])$$
$$\leqslant\rho([B],[E])+\rho([E],-[A])$$
$$=\|[B]\|+\|-[A]\|=\|[A]\|+\|[B]\|.$$

所以式(15)中的条件都成立.这就证明了$(M(n),+,[E],\|\circ\|)$是 Z-空间.

定理 4　在 Z-空间$(M(n),+,[E],\|\circ\|)$中,若 E 是矛盾式,则对 $M(n)$中的每个$[A]$和$[B]$有

(1)$\|[A]\|=\tau(A)$　(20)

(2)$\|[A]-[B]\|=\rho([A],[B])$.　(21)

证明　(1)因为当 E 为矛盾式$[\bar{0}]$时 $A\to E$ 和$E\to A$ 分别为$\neg A$ 和重言式,所以由式(19)得

$$\begin{aligned}\|[A]\|&=\rho([A],[E])=\rho(A,E)\\&=1-\tau((A\to E)\wedge(E\to A))\\&=1-\tau(\neg A)=\tau(A).\end{aligned}$$

所以式(20)成立.

(2)由式(18)知 $2[A]=2[B]=[\bar{0}]$,所以由 h_A 是等距变换以及 h_A 与 g_A 互逆得

$$\begin{aligned}\|[A]-[B]\|&=\|[A]+[B]\|=\rho(g_A([B]),[\bar{0}])\\&=\rho([B],h_A([\bar{0}]))=\rho([B],-[A])\\&=\rho([A],[B]).\end{aligned}$$

所以式(21)成立.

式(16)中的 g_A 既然是平移群 $T(n)$中的平移,自然有 $G\subseteq N(2^n)=\{1,2,\cdots,2^n\}$使 $g_A=\eta_G$.可以证明,G 与 $\Delta(A)$和$\Delta(E)$之间的关系是:G 等于$\Delta(A)$和$\Delta(E)$的对称差,即

$$G=\Delta(A)\cup\Delta(E)-\Delta(A)\cap\Delta(E)\qquad(22)$$

由$\Delta(A)$与$\Delta(E)$在式(22)中的对称性知,若$[A]=g_A([E])$,则$[E]=g_E([A])$.又,若 $E=\bar{0}$,这里$\bar{0}$为矛盾式,则$\Delta(\bar{0})=\varnothing$,所以由式(22)得

$$G=\Delta(A)\qquad(23)$$

特别是,令 $G=\Delta(E)$,则 η_G 是 $T(n)$中把$[E]$变为$[\bar{0}]$的平移.

5　有限域 $F(2)$上的标准 n 维线性赋范空间

定义 11　设 $F(2)=\{0,1\}$是有限域,$V(n)=\{\boldsymbol{\alpha}:\boldsymbol{\alpha}$ 是n 维 $0-1$ 向量$\}$,在 $V(n)$中规定向量的加法为按坐标的模 2 加法$\oplus$,单位向量 $\boldsymbol{\theta}$ 是各坐标全为 0 的向量,$0\boldsymbol{\alpha}=\theta,1\boldsymbol{\alpha}=\boldsymbol{\alpha}$.又,规定 $\boldsymbol{\alpha}$ 的范数$\|\boldsymbol{\alpha}\|=k/n$,这里 k 是向量α 中坐标等于 1 的坐标的个数.则称$(V(n),\oplus,\|\circ\|)$为 $F(2)$上的标准 n 维线性赋范空间.

在定义 11 中定义的$\|\circ\|$确为范数.事实上,显然$\|\boldsymbol{\alpha}\|\geqslant0$,$\|\boldsymbol{\alpha}\|=0$ 当且仅当 $\boldsymbol{\alpha}=\theta$.又,设$\|\boldsymbol{\alpha}\|=k/n$,$\|\beta\|=m/n$,则 $\boldsymbol{\alpha}$ 和$\boldsymbol{\beta}$ 各有 k 个和 m 个坐标等于 1,由模 2 加法的意义知 $\boldsymbol{\alpha}\oplus\boldsymbol{\beta}$ 有不多于$k+m$ 个等于 1 的坐标.所以$\|\boldsymbol{\alpha}\oplus\boldsymbol{\beta}\|\leqslant\|\boldsymbol{\alpha}\|+\|\boldsymbol{\beta}\|$.最后,因为在 $F(2)$中 $-1=1$,所以$\|-\boldsymbol{\alpha}\|=\|\boldsymbol{\alpha}\|$.可见$\|\circ\|$确为范数.

定理 5　Z-空间$(M(n),+,[\bar{0}],\|\circ\|)$与有限域 $F(2)$上的标准 2^n 维线性赋范空间同构,这里$\bar{0}$代表矛盾式.

证明　有定义 6(2)知存在由 $M(n)$到 $V(2^n)$的一一的满射 f,这里 $f([A])=Vec(A)$.

因为矛盾式$\bar{0}$诱导的布尔函数 $\varphi(\bar{0})$的值恒为 0,所以 $f([\bar{0}])=\theta$.

在定理 3 的证明中取 $E=\bar{0}$,则由$[A]=g_A([\bar{0}])$和平移变换的定义以及模 2 加法的定义知存在 $G\subseteq N(2^n)=\{1,2,\cdots,2^n\}$使 $g_A=\eta_G$ 且$\varphi(A)$的第 j 个值等于 1 当且仅当 $j\in G$.所以由式(16)知$[A]+[B]=\eta_G([B])=[C]$所对应的布尔函数 $\varphi(C)$的值是将$\varphi(B)$的按自然排列的第 j 个值作 $0-1$ 互换而得,这里 $j\in G$.换句话说,如果 $j\notin G$,则 $\varphi(C)$的第 j 个值等于$\varphi(B)$的第 j 个值.注意这时$\varphi(A)$的第 j 个值等于 0,所以$[A]+[B]$所对应的布尔函数的值恰由$\varphi(A)$与$\varphi(B)$的相应的值模 2 相加而得.这就证明了 $f([A]+[B])=f([A])\oplus f([B])$.

由$\forall[A]\in M(n),[A]+[A]=[\bar{0}]$和$\forall v\in V(2^n)$,$v\oplus v=\theta$ 易证$f(m[A])=mf([A]),(m\in Z)$.

最后,由式(2)和 $E=\bar{0}$以及定理 4 知$\|[A]\|=\tau(A)=k/2^n$,这里 k 是A 所诱导的布尔函数$\varphi(A)$等于 1 的值的个数.由定义 11 知这恰等于 $f([A])$在$(V(2^n),\oplus,\|\circ\|)$中的范数$\|f([A])\|$.

综上所述知 Z-空间$(M(n),+,[\bar{0}],\|\circ\|)$与$(V(2^n),\oplus,\|\circ\|)$同构.

由以上证明看出下面的推论成立:

推论 3　$[A]+[B]=[C]$当且仅当 $\varphi(A)\oplus\varphi(B)=\varphi(C)$.

定理 6　对于任意固定的$[E]\in M(n)$,Z-空间$(M(n),+,[E],\|\circ\|)$与$(V(2^n),\oplus,\|\circ\|)$同构.

证明　只需证明 Z-空间$(M(n),+,[E],\|\circ\|)$与$(M(n),+,[\bar{0}],\|\circ\|)$同构.首先注意,这两个空间中的$[A]$与$[B]$的和虽然都由 $g_A([B])$定义,但在以$[E]$为单位的空间中 g_A 是 $T(n)$中把$[E]$变为$[A]$的平移变换,它并不是把$[\bar{0}]$变为$[A]$的平移变换,可见以上两个 $Z-$空间中的加法是不同的.所以我们把第二个 Z-空间中的加法改记为$\oplus$.相应地,第二个空间中的乘法记为$*$.$T(n)$中有唯一的平移 η_H 把$[\bar{0}]$变为$[E]$.由式(23)知 $H=\Delta(E)$.作 $M(n)$上的自映射

$$h:(M(n),+,[E],\|\circ\|)\to(M(n),\oplus,[\bar{0}],\|\circ\|),\quad h([A])=\eta_H([A]).\qquad(24)$$

则

(1)$h([E])=\eta_H([E])=[\bar{0}]$.

(2)$h([A]+[B])=h([A])\oplus h([B])$.事实上,这个等式的右边 $h([A])\oplus h([B])=\eta_H([A])\oplus\eta_H([B])$.其中 $\eta_H([A])$与 $\eta_H([B])$所对应的布尔函数

在 β_j 处的值分别等于 $\varphi(A)(\beta_j)\oplus 1$ 与 $\varphi(B)(\beta_j)\oplus 1$ 当且仅当 $j\in H$ 或分别等于 $\varphi(A)(\beta_j)$ 与 $\varphi(B)(\beta_j)$ 当且仅当 $j\notin H$. 所以 $h([A])\oplus h([B])$ 所对应的布尔函数就是 $\varphi(A)\oplus\varphi(B)$. 由式(16)和式(24)知 $h([A]+[B])=\eta_H(g_A([B]))$. 设 $g_A=\eta_G$, 则由式(22)知

$$G=\Delta(A)\cup\Delta(E)-\Delta(A)\cap\Delta(E) \tag{25}$$

这时

$$h([A]+[B])=\eta_H(\eta_G([B]))=\eta_G(\eta_H([B]))=\eta_K([B]).$$

由推论 2 和式(25)经简单计算可得

$$K=G\cup H-G\cap H=G\cup\Delta(E)-G\cap\Delta(E)=\Delta(A).$$

从而由式(7)知 $\eta_K([B])$ 所对应的布尔函数正是 $\varphi(A)\oplus\varphi(B)$. 所以 $h([A]+[B])=h([A])\oplus h([B])$.

(3)易证 $h(m[E])=m*h([E])$.

(4)由式(19)知在第一个 Z-空间中 $\|[A]\|=\rho([A],[E])$. 又, 在第二个 Z-空间中 $\|h([A])\|=\rho(h([A]),[\bar{0}])$. 由 $\eta_H([E])=[\bar{0}]$ 得 $\eta_H([\bar{0}])=[E]$. 所以由 η_H 为二次幂零等距变换知

$$\|h([A])\|=\rho(\eta_H([A]),[\bar{0}])=\rho([A],\eta_H([\bar{0}]))=\rho([A],[E])=\|[A]\|.$$

综上所述知 Z-空间 $(M(n),+,[E],\|\circ\|)$ 与 $(M(n),+,[\bar{0}],\|\circ\|)$ 同构.

现在考虑整个的经典逻辑度量空间 $M=([F(S)],\rho)$. 任取 $[A],[B]\in[F(S)]$, 则由式(4)知存在 n 使 $[A],[B]\in M(n)$. 这时自然 $[A],[B]\in M(n+m)$, $(m=1,2,\cdots)$. 那么 $[A],[B]$ 在 $M(n)$ 中的加法和与它们在 $M(n+m)$ 中的加法和是否相等呢? 又, 在 $M(n)$ 中和在 $M(n+m)$ 中 $[A]$ 的范数是否相等? 我们有

引理 1 任取 $[A],[B]\in[F(S)]$, 设 $[A],[B]\in M(n)$, 则在 $(M(n),+,[\bar{0}],\|\circ\|)$ 和 $(M(n+m),+,[\bar{0}],\|\circ\|)$ 中 $[A]$ 与 $[B]$ 的加法和不变, $[A]$ 的范数也不变.

证明 由式(20)知 $[A]$ 的范数等于 $\tau(A)$, 所以在两个空间中是不变的. 以下证明加法和的不变性. 设在 $M(n)$ 中 $[A],[B],[C]$ 的代表元分别为 A,B,C. 令

$$D=\bigwedge_{i=n+1}^{n+m}(p_i\rightarrow p_i),\ A^*=A\wedge D,\ B^*=B\wedge D,\ C^*=C\wedge D \tag{26}$$

则 A^*,B^*,C^* 可分别作为在 $M(n+m)$ 中 $[A],[B],[C]$ 的代表元. 以下只需证明在 $M(n)$ 中 $[A]+[B]=[C]$ 当且仅当在 $M(n+m)$ 中 $[A^*]+[B^*]=[C^*]$. 分别以 $\varphi(A),\varphi(B),\varphi(C)$ 记 A,B,C 所诱导的 n 元布尔函数, 分别以 $\varphi^*(A),\varphi^*(B),\varphi^*(C)$ 记 A^*,B^*,C^* 所诱导的 $n+m$ 元布尔函数, 则由推论 3 知只需证明 $\varphi(A)\oplus\varphi(B)=\varphi(C)$ 当且仅当 $\varphi^*(A)\oplus\varphi^*(B)=\varphi^*(C)$. 事实上, 由式(26)知 $\varphi(A)$ 与 $\varphi^*(A)$ 之间的关系是: 对于 n 元布尔函数 $\varphi(A)$ 的任一自变量向量 $\beta\in N(2^n)$, 当且仅当 $n+m$ 元 0－1 向量 $\boldsymbol{\gamma}$ 的前 n 个坐标构成 β 时 $\varphi(A)(\beta)=\varphi^*(A)(\gamma)$. 对于 $\varphi(B)$ 与 $\varphi^*(B)$ 以及 $\varphi(C)$ 与 $\varphi^*(C)$ 也有同样的关系成立. 所以 $\varphi(A)\oplus\varphi(B)=\varphi(C)$ 当且仅当 $\varphi^*(A)\oplus\varphi^*(B)=\varphi^*(C)$.

由引理 1 以及模 2 加法的意义知在上述两个 Z-空间中 $m[A]$ 的值不变, 所以容易证明下面的命题成立:

命题 6 在经典度量空间 $M=([F(S)],\rho)$ 中取矛盾式所在的类 $[\bar{0}]$ 为零元. 定义加法 + 如下: 设 $[A],[B]\in[F(S)]$, 取 $M(n)$ 使 $[A],[B]\in M(n)$, 令 $[A]+[B]$ 同 $(M(n),+,[\bar{0}],\|\circ\|)$ 中的 $[A]+[B]$. 又, 定义 M 中的数乘和范数如下: 设 $[A]\in[F(S)]$, 取 $M(n)$ 使 $[A]\in M(n)$, 令 $m[A]$ 同 $(M(n),+,[\bar{0}],\|\circ\|)$ 中的 $m[A]$, $\|\circ\|$ 同 $(M(n),+,[\bar{0}],\|\circ\|)$ 中的范数, 则 $(M,+,[\bar{0}],\|\circ\|)$ 构成 Z-空间.

定理 7 在经典度量空间 $M=([F(S)],\rho)$ 中按命题 6 中的方法定义加法、数乘和范数, 则 $(M,+,[\bar{0}],\|\circ\|)$ 同构于有限域 $F(2)$ 上的线性赋范空间, 且

(1) $\forall A\in F(S)$, $[A]$ 的范数等于 A 的真度, 即, $\|[A]\|=\tau(A)$.

(2) $\forall A\in F(S)$, $[A]$ 与 $[B]$ 之间的距离等于 $[A]-[B]$ 的范数, 即, $\rho([A],[B])=\|[A]-[B]\|$.

(3) $(M,+,[\bar{0}],\|\circ\|)$ 中的线性运算关于距离 ρ 是连续的.

证明 基于引理 1 和命题 6, 可仿照定理 5 的证明得到 $(M,+,[\bar{0}],\|\circ\|)$ 同构于有限域 $F(2)$ 上的线性赋范空间的证明. 任取 $[A],[B]\in[F(S)]$, 则存在自然数 n 使 $[A],[B]\in M(n)$, 所以由定理 4 即得(1)和(2).

最后, 设 ε 是任意给定的正数, $\rho([A],[B])<\varepsilon$, $\rho([C],[D])<\varepsilon$ 则

$$\begin{aligned}\rho([A]+[C],[B]+[D])&=\|([A]+[C])-([B]+[D])\|\\&=\|([A]-[B])+([C]-[D])\|\\&\leqslant\|[A]-[B]\|+\|[C]-[D]\|\\&=\rho([A],[B])+\rho([C],[D])\\&<2\varepsilon.\end{aligned}$$

所以 $(M,+,[\bar{0}],\|\circ\|)$ 中的加法运算关于距离 ρ 是连续的, 从而模 2 数乘运算也关于距离 ρ 是连续的.

6 结论

本文首次证明了在经典逻辑度量空间 $M=([F(S)],\rho)$ 中存在着内蕴的次范整线性空间结构, 即, 有限域 $F(2)$ 上的线性赋范空间结构. 所谓内蕴是指这种线性结构是由逻辑公式所诱导的布尔函数之间的关系所决定的, 且其中的范数又是由逻辑公式的真度所决定的. 至此我们看到空间 M 兼备了逻辑结构、拓扑结构和线性结构于一身, 这就使我们可能从多种角度

出发研究空间 M 的性质.比如,逻辑公式间的交运算、并运算和蕴涵运算在平移变换下将如何变化?又如,由平移变换是等距变换知 M 中的闭集或开集在平移变换下的像仍为闭集或开集,那么 $F(S)$中的逻辑闭的理论在平移变换下的像是否还是逻辑闭的?逻辑理论(即,一组逻辑公式)的相容度在平移变换下是否改变?怎样改变?特别是逻辑理论的可满足性问题(即,SAT 问题,也即相容度是否大于零的问题)在平移变换下是否改变?等等.这些都是有待进一步研究的问题.

参考文献

[1] Adam E W. A Primer of Probability Logic[M]. Stanford:CSLI Publications,1998,11 – 31.

[2] Nilsson N J. Probabilistic logic[J]. Artificial Intelligence,1986,28(1):71 – 87.

[3] Fagin R,Halpern J Y,Megiddo N. A logic for reasoning about probabilities[J]. Information and Computation,1990,87(1 – 2):78 – 128.

[4] Halpern J Y. An analysis of first-order logics of probability[J]. Artificial Intelligence,1990,46(3):311 – 350.

[5] Wang G J,Fu L,Song J S. Theory of truth degrees of propositions in two-valued logic[J]. Science in China(Series A),2002,45(9):1106 – 1116.

[6] 王国俊.计量逻辑学(I)[J].工程数学学报,2006,23(2):191 – 215.
Wang G J. Quantitative Logic(I)[J]. Chinese Journal of Engineering Mathematics,2006,23(2):191 – 215.(in Chinese)

[7] 王国俊,宋建社.命题逻辑中的程度化方法[J].电子学报,2006,34(2):252 – 257.
Wang G J,Song J S. Graded method in propositional logic[J]. Acta Electronica Sinica,2006,34(2):252 – 257.(in Chinese)

[8] Hui X J,Wang G J. Randomization of classical inference patterns and its application[J]. Science in China,ser. F,2007,50(6):867 – 877.

[9] 王国俊,惠小静.概率逻辑学基本定理的推广[J].电子学报,2007,35(7):1333 – 1340.
Wang G J,Hui X J. Generalization of fundamental theorem of probability logic[J]. Acta Electronica Sinica,2007,35(7):1333 – 1340.(in Chinese)

[10] 胡明娣,王国俊.模糊模态逻辑中的永真式与准重言式[J].电子学报,2009,35(11):2484 – 2488.
Hu M D,Wang G J. Theory of tautologies and quasi-tautologies in fuzzy modal logic[J]. Acta Electronica Sinica,2009,35(11):2484 – 2488.(in Chinese)

[11] 张东晓,李立峰.二值命题逻辑公式的语构程度化方法[J].电子学报,2008,36(2):325 – 330.
Zhang D X,Li L F. Syntactic graded method of two-valued propositio-nal logic formulas[J]. Acta Electronica Sinica,2008,36(2):325 – 330.(in Chinese)

[12] 王国俊,王伟.逻辑度量空间[J].数学学报(中文版),2001,44(1):159 – 168.
Wang G J,Wang W. Logical metric spaces[J]. Acta Mathematica Sinica,2001,44(1):159 – 168.(in Chinese)

[13] Wang Guo-jun,Zhou Hong-jun. Quantitative logic[J]. Information sciences,2009,179(3):226 – 247.

[14] Wang G J,Zhou H J. Introduction to mathematical logic and resolution principle[M]. Science Press,Beijing & Alpha Science International Limited,Oxford,U.K. 2009,258 – 276.

[15] 王国俊. Sheeffer 定理的推广[J].西北大学学报 1958,37(3):89 – 92.
Wang G J. Generalization of Sheeffer's theorem[J]. Journal of Northwest University,1958,37(3):89 – 92.(in Chinese)

[16] Wang G J,Wang W. Generalization of the Sheeffer's theorem[J]. Indian J Math.,1999,42(3):407 – 413.

[17] 王国俊,白永成.平移空间的线性结构[J].数学学报(中文版),2005,48(1):1 – 10.
Wang G J,Bai Y C. Linear structure on translation spaces[J]. Acta Mathematica Sinica,2005,48(1):1 – 10.(in Chinese)

[18] 王国俊,折延宏.二值命题逻辑中理论的发散性、相容性及其拓扑刻画[J].数学学报(中文版),2007,50(4):841 – 850.
Wang G J,She Y H. Topological description of divergency and consistency of two-valued propositional theories[J]. Acta Mathematica Sinica,2007,50(4):841 – 850.(in Chinese)

[19] Wang G J,She Y H. A topological characterization of consistency of logic theories in propositional logic[J]. Mathematical Logic Quarterly,2006,52(5):470 – 477.

[20] 胡明娣,王国俊.经典逻辑度量空间上的反射变换[J].陕西师范大学学报(自然科学版),2009,37(6):1 – 6.
Hu M D,Wang G J. Reflexive transformation in classical logic metric space[J]. Journal of Shaanxi Normal University,2009,37(6):1 – 6.(in Chinese)

作者简介

胡明娣　女,1970 年生于陕西安康.陕西师范大学数学与信息科学学院博士生,副教授.研究方向为不确定推理、计算智能.
E-mail:humingdiwww@163.com

王国俊　男,1935 年生于北京.陕西师范大学教授,博士生导师.研究方向为不确定推理、计算智能.
E-mail:gjwang@snnu.edu.cn