

基于结构张量图像建模方法的滤波性能研究

邵文泽, 韦志辉

(南京理工大学计算机科学与技术学院, 江苏南京 210094)

摘 要: 主要研究结构张量驱动的变分偏微分方程 (variational Partial Differential Equation; variational PDE) 图像建模方法的滤波性能. 基于角形强度度量和水平线演化理论, 设计了一种具有角点增强性能的角形冲击滤波器, 以克服边缘冲击滤波器增强图像的不足. 基于边缘和角形冲击滤波器, 分析了扩散张量驱动的各向异性 PDE 的滤波性能. 指出, 散度型各向异性 PDE 实质上对应着角点保持的平滑-增强滤波机制; 而可计算迹型 PDE 是散度型各向异性 PDE 的退化情形, 对应的是不具有角点保持性能的平滑滤波机制. 在此基础上, 给出了结构张量驱动的变分泛函满足角点保持性的条件, 同时建立了面向应用的统一正则 PDE 框架, 直观有效地刻画了平坦区域、边缘和角形状结构的滤波性能. 单幅图像插值实验结果验证了统一正则 PDE 框架的有效性.

关键词: 变分泛函; 偏微分方程; 冲击滤波; 结构张量; 角点保持; 图像插值

中图分类号: TN911.72 **文献标识码:** A **文章编号:** 0372-2112 (2011) 07-1556-07

Research on Filtering Behavior of Structure Tensor Based Image Modeling Approaches

SHAO Wen-ze, WEI Zhi-hui

(School of Computer Science and Technology, Nanjing University of Science and Technology, Nanjing, Jiangsu 210094, China)

Abstract: This paper mainly focuses on the structure tensor based image modeling approaches, including partial differential equations (PDE) and variational functionals. A type of corner shock filter is designated based on measures of corner strength and the theory of level-set evolution to enhance the corner structures. The filtering behavior of structure tensor based anisotropic PDE's is subsequently analyzed based on the edge shock filter and our proposed corner shock filter. The analysis comes to the conclusion that, Weickert's anisotropic PDE corresponds to a kind of smoothing-enhancing, and corner-preserving filtering mechanism, while Tschumperlè's trace-based PDE is the reduced version of Weickert's PDE, corresponding to a kind of smoothing filtering scheme but not corner-preserving. With the above conclusion, conditions of corner-preservation are intuitively proposed for structure tensor based variational functionals. Finally, a kind of unified regularization PDE framework is proposed for different image applications. The filtering behavior on homogeneous regions, edge, and corner structures can be described by our unified framework more intuitively and efficiently. Experimental results on image magnification demonstrate the efficiency of the unified PDE framework.

Key words: variational functional; partial differential equation (PDE); shock filtering; structure tensor; corner preserving; image interpolation

1 引言

传统的数字信号处理往往基于信号的平稳性或者高斯随机过程假设, 因此线性算法被认为是最优的. 然而, 实际的数字信号尤其是自然图像往往存在具有边缘、角点等具有重要视觉意义的非平稳几何结构, 很难用简单的高斯过程进行有效刻画, 所以数字图像处理逐渐倾向于非线性算法的研究. 事实上, 有效的图像建模

对后续图像处理算法的设计和性能具有至关重要的作用. 经过近 20 年的发展, 研究者们已经从多个角度建立起图像的数学模型, 主要包括^[1,2]: 基于马尔科夫随机场的统计图像建模, 基于正则化函数空间的几何图像建模, 基于调和分析的几何多尺度图像建模, 基于多重分形的几何图像建模, 以及基于人类视觉系统感知的图像建模. 基于正则化函数空间的几何图像建模将导致基于变分泛函和几何偏微分方程 (Partial Differential Equation;

PDE)的图像处理方法,统称为变分 PDE.目前,变分 PDE 图像处理方法已经引起了国内外众多学者的广泛关注^[3-6].

本文重点关注结构张量(structure tensor)驱动的图像建模方法^[7-14].通过研究发现,Weickert^[7-14]提出的散度型各向异性 PDE 实质上对应着角点保持的平滑-增强滤波机制;Tschumperlè^[12-14]提出的可计算迹型 PDE 是散度型各向异性 PDE 的退化情形,对应的是不具有角点保持性能的平滑滤波机制.在此基础上,本文给出了结构张量驱动的可变分泛函满足角点保持性的条件,同时建立了面向应用的统一正则 PDE 框架,直观有效地刻画了平坦区域、边缘和角形状结构的滤波性能.

2 基于结构张量的变分 PDE

首先给出结构张量的定义^[9]:

$$J_\rho(\nabla \mathbf{u}_\sigma) = G_\rho * (\nabla \mathbf{u}_\sigma \otimes \nabla \mathbf{u}_\sigma) = (J_{m,n})_{m/n=1,2}$$

其中 \mathbf{u}_σ 为图像 \mathbf{u} 经过高斯滤波的图像(方差 $\sigma > 0$),减少噪声对求导运算的影响,从而增强边缘检测的噪声鲁棒性;对张量 $\nabla \mathbf{u}_\sigma \otimes \nabla \mathbf{u}_\sigma$ 进行高斯滤波(方差 $\rho \geq 0$),以增强几何结构方向的估计鲁棒性.矩阵 J_ρ 对称且半正定,存在正交单位特征向量,分别记为 \mathbf{w} 和 $\mathbf{v} = \mathbf{w}^\perp$.其中, $\mathbf{w} = (2J_{12}, J_{22} - J_{11} + \sqrt{(J_{22} - J_{11})^2 + 4J_{12}^2})^\top$, $\mathbf{w} = \mathbf{w}/|\mathbf{w}|$ 指向几何结构的最大对比度方向,称为主向量;相应地, \mathbf{v} 指向几何结构的最小对比度方向,看作是几何结构的方向.它们相应的特征值分别记为 μ 和 μ^\perp :

$$\mu, \mu^\perp = (J_{11} + J_{22} \pm \sqrt{(J_{22} - J_{11})^2 + 4J_{12}^2})^{0.5}$$

这两个值可以作为局部几何结构的属性描述子:在平滑区域, $\mu \approx \mu^\perp \approx 0$;在边缘区域, $\mu \gg \mu^\perp \approx 0$;在角形区域, $\mu \geq \mu^\perp \gg 0$.

基于结构张量的 PDE 1994 年,Weickert 首次基于结构张量提出了散度型各向异性 PDE^[9]

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} = \nabla (D(J_\rho(\nabla \mathbf{u}_\sigma)) \cdot \nabla \mathbf{u}) \quad (1)$$

其中, $D(J_\rho(\nabla \mathbf{u}_\sigma))$ 称为扩散张量,通常定义为 $D(J_\rho(\nabla \mathbf{u}_\sigma)) = \lambda_1 \mathbf{w}\mathbf{w}^\top + \lambda_2 \mathbf{v}\mathbf{v}^\top$.注意到, PDE(1) 的滤波性能主要由 $D(J_\rho(\nabla \mathbf{u}_\sigma))$ 决定. Weickert 不仅探讨了 PDE(1) 解的存在性、唯一性、极值性等问题,而且将其应用于图像去噪、指纹增强、光流场计算等多种图像处理问题^[7,8,15,16].王正明等人^[17]在 2006 年出版的《SAR 图像提高分辨率技术》一书中以定理的形式指出,利用散度型各向异性 PDE(1) 对 \mathbf{u}_0 进行光滑近似于分别以 λ_1, λ_2 的速度沿 \mathbf{w}, \mathbf{v} 方向光滑. Albert 等人^[18]在 2002 年出版的《Mathematical Problems in Image Processing》一书讨论基于 PDE 的图像处理部分中,将主要 PDE 分成三类:平滑

型 PDE、平滑-增强型 PDE、以及增强型 PDE,并且将散度型各向异性 PDE 划为平滑型 PDE.此外, Tschumperlè 等人^[12-14]指出扩散张量驱动的散度型 PDE(3) 不能完全刻画扩散张量所要体现的滤波性能,并且提出一种扩散张量驱动的可计算迹型 PDE

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} = \text{trace}(D(J_\rho(\nabla \mathbf{u}_\sigma)) \cdot \mathbf{H}) \quad (2)$$

其中, \mathbf{H} 为 Hessian 矩阵.

基于结构张量的变分泛函 2001 年, Weickert^[19]首次基于结构张量提出了用于运动估计的变分泛函:

$$E_r(\mathbf{u}) = \int_\Omega \text{trace}(\varphi(\mu) \mathbf{w}\mathbf{w}^\top + \varphi(\mu^\perp) \mathbf{v}\mathbf{v}^\top) d\Omega$$

其中, φ 为具有边缘保持性的势函数^[20].进一步地, 2005 年 Tschumperlè 等人^[14]基于结构张量提出了一般性变分泛函:

$$E_r(\mathbf{u}) = \int_\Omega \Psi(\mu, \mu^\perp) d\Omega \quad (3)$$

其中, $\Psi(\cdot, \cdot)$ 通常采用边缘保持势函数 φ 的定义.一般性变分泛函对应的 PDE 为

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} = 2 \cdot \nabla \left(\left(\frac{\partial \Psi}{\partial \mu} \mathbf{w}\mathbf{w}^\top + \frac{\partial \Psi}{\partial \mu^\perp} \mathbf{v}\mathbf{v}^\top \right) \cdot \nabla \mathbf{u} \right) \quad (4)$$

但是, Tschumperlè 等人在提出一般性变分泛函时没有给出 $\Psi(\cdot, \cdot)$ 的选取条件.

3 角形冲击滤波器

3.1 边缘冲击滤波器

Osher 等人^[21]在 1992 年首次提出一种称为冲击滤波器的 PDE 图像增强方法.最常用的冲击滤波器定义如下

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} = -\text{sign}(D^2 \mathbf{u}(\boldsymbol{\eta}, \boldsymbol{\eta})) |\nabla \mathbf{u}| \quad (5)$$

其中, $\boldsymbol{\eta} = \nabla \mathbf{u}/|\nabla \mathbf{u}|$ 为图像的梯度方向.可见,冲击滤波器根据边缘检测项 $D^2 \mathbf{u}(\boldsymbol{\eta}, \boldsymbol{\eta})$ 的符号确定冲击流的方向,根据图像的梯度模确定冲击流的强度.然而, PDE(5) 存在两点重要不足:其一,增强边缘的同时增强噪声点;其二,只能增强边缘不能增强角形结构,因此实质上是边缘冲击滤波.针对第一点不足,研究者们通过耦合边缘冲击滤波和平滑型 PDE^[22],实现同时增强边缘和抑制噪声的目的.然而,对于如何在 PDE 框架下实现角形增强,至今没有解决方案.为此,对应于边缘冲击滤波,本文研究设计出一种角形冲击滤波器,通过耦合边缘冲击滤波和角形冲击滤波,能够同时实现增强边缘和角点结构的目的.

受边缘冲击滤波器的启发,角形冲击滤波器(edge shock filter)的设计分成两步:第一,通过研究角形强度度量确定角形冲击流的速度;第二,在基于水平集方法的曲线演化理论框架下研究如何确定角形冲击流的方

向.

3.2 角形强度度量

由于角形强度是用于确定角形冲击流的速度,因此本文认为角形强度度量应该满足以下三个基本准则:噪声鲁棒性;边缘鲁棒性;度量精确性.上述准则的提出主要基于以下考虑:

- (1)角形的强度度量应该对噪声鲁棒,角形冲击滤波器不能同时增强噪声;
- (2)角形的强度度量只能刻画角形区域的强度,不能刻画其它结构的强度;
- (3)传统的角点检测算法不能替代角形的强度度量,只能检测锐化的角点;
- (4)不同的角形具有不同的强度,对应的角形冲击流应该具有不同的速度.

目前,图像处理文献中对于角形强度度量的研究还相对较少,主要有两种度量^[23]:

$$Q_1 = |D^2 u(\xi, \xi)| = |\kappa \cdot |\nabla u|| \quad (6)$$

$$Q_2 = (1 - moa) \cdot |\nabla u| \quad (7)$$

其中, $\xi \perp \eta$, κ 为曲率, $moa = (\mu^\perp - \mu)^2 / (\mu^\perp + \mu)^2$ 为各向异性测度. 由于结构张量的特征值可以作为局部几何结构的属性描述子,因此 moa 实际上起到指示边缘区域的作用. 然而,式(6)和式(7)对噪声过分敏感. 另外,式(6)对曲线型边缘较为敏感,因此需要研究设计更为精确鲁棒的角形强度度量.

引入新型角形强度度量之前,首先定义矩阵 $M = (m_{i,j})_{i,j=1,2}$ 的散度运算:

$$\nabla \cdot M = \left(\frac{\partial m_{11}}{\partial x} + \frac{\partial m_{12}}{\partial y}, \frac{\partial m_{21}}{\partial x} + \frac{\partial m_{22}}{\partial y} \right)^T \quad (8)$$

根据定义(8),容易证明如下定理.

定理 1 假设 $u(x, y)$ 处处二阶连续可微, ξ 为图像的切线方向,则等式 $(\nabla \cdot (\xi \xi^T))^T \cdot \nabla u = -D^2 u(\xi, \xi)$ 成立.

根据结构张量的定义,当 $J_\rho(\nabla u_\sigma)$ 中的 ρ 和 σ 均取 0 时, $J_\rho(\nabla u_\sigma)$ 的特征向量 w, v 分别退化为 η, ξ . 由于结构张量通过考虑局部邻域增强结构方向估计的鲁棒性,更重要的是,只有考虑局部邻域才能识别角形结构,因此 w, v 比起 η, ξ 能够更为精确地刻画局部结构的方向. 为此,根据 Q_1 和定理 1,我们提出如下新型角形强度度量

$$Q_3 = |(\nabla \cdot (vw^T))^T \cdot \nabla u| \quad (9)$$

图 1 和图 2 给出两组实验比较三种角形强度度量检测角形区域的有效性,分别对应无噪情形和噪声情形. 在结构张量中, ρ 和 σ 分别取值 2 和 1.5. 角形强度度量图像利用公式 $5 * Q_j + 50, j = 1, 2, 3$ 进行计算显示. 对于两种情形下的角形度量图像,通过综合考虑噪

声鲁棒性、边缘鲁棒性、以及度量精确性,本文认为 Q_3 比 Q_1 和 Q_2 更适于作为角形冲击滤波的冲击速度.

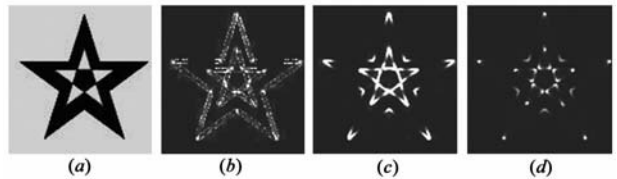


图1 不含噪声情形,(a)-(d)分别为原始图像和利用比 Q_1, Q_2, Q_3 得到的角形强度度量图像

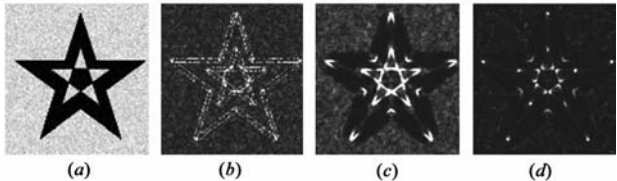


图2 高斯噪声情形,(a)-(d)分别为噪声图像和利用 Q_1, Q_2, Q_3 得到的角形强度度量图像

3.3 角形冲击滤波器

角形冲击滤波器设计的第二步是研究如何确定角形冲击流的方向. 在本文中,角形冲击流的方向是在基于水平集方法的曲线演化理论框架下确定的. 首先,我们给出角形冲击滤波器的一般形式

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -\text{sign}(D^2 u(\xi, \xi)) \cdot Q(u) \quad (10)$$

其中, $Q(u) \geq 0$ 为某种角形强度度量,具备噪声鲁棒性、边缘鲁棒性、以及度量精确性.

为了说明 PDE(10)具有增强角形区域的作用,我们暂且考虑如下 PDE

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -\text{sign}(D^2 u(\xi, \xi)) \cdot Q(u) \quad (11)$$

注意到 $Q(u) \geq 0$ 作为角形强度度量具备噪声鲁棒性、边缘鲁棒性、以及度量精确性,PDE(11)实际上只作用于角形区域. 由于图像可以利用其水平集来表示,因此 PDE(11)可以基于曲线演化理论进行分析. 根据水平线演化理论^[18,24],给定初始曲线 $C_0(p)$,可以通过定义一个高维函数 $\phi(x, y, t): \mathbf{R}^2 \times [0, T] \rightarrow \mathbf{R}$ 来表示: $C_0(p) = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2: \phi(x, y, 0) = 0\}$. 例如, $\phi(x, y, 0)$ 可定义为 $\phi(x, y, 0) = \pm d$,其中 d 为点 (x, y) 到曲线 $C_0(p)$ 的距离. 考虑如下演化 PDE

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} = \text{sign}(\kappa \nabla \phi) \cdot Q(\phi) \quad (12)$$

其中, $\phi(x, y, 0)$ 为初始条件. 根据曲率驱动的水平线演化理论知,PDE(12)演化的速度大小为 $Q(\phi)/|\nabla \phi|$,演化的方向由曲率 κ 的符号确定,并且演化曲线始终对应函数 $\phi(x, y, t)$ 的零水平集. 当 d 在曲线内部取负而在曲线外部取正,对于凸角形区域 κ 取正,此时角形向内部演化;而对于凹角形区域 κ 取负,此时角形向外部演化. 相反地,当 d 在曲线外部取负而在曲线内部取

正,对于凸角形区域 κ 取负,此时角形向外部演化;而对于凹角形区域 κ 取正,此时角形向内部演化.因此,PDE(11)实际上起到平滑角形结构的作用,从而得到圆滑的角形结构.由于 PDE(11)是 PDE(10)的反过程,所以 PDE(10)确实具有增强角形区域的作用.当角形强度度量取为 Q_3 时,角形冲击滤波器即为

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} = -\text{sign}(D^2 \mathbf{u}(\xi, \xi)) \cdot |(\nabla \cdot (\mathbf{v}\mathbf{v}^T))^T \cdot \nabla \mathbf{u}| \quad (13)$$

图 3 分别给出无噪情形和含噪情形下 PDE(13)增强角形区域的效果图.可见,本文角形冲击滤波器不仅能够较好地增强角形结构,同时具有较强的噪声鲁棒性.图 4 给出了高斯模糊情形下基于边缘冲击滤波器和角形冲击滤波的增强效果,较好地显示了本文角形冲击滤波器研究的必要性和重要性.

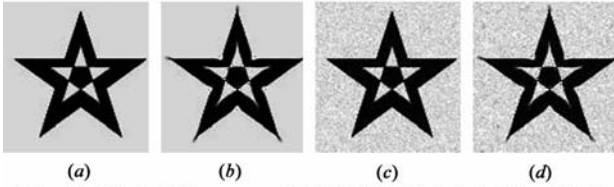


图 3 角形冲击滤波,(a)~(d)分别为原始图像及相应的角形增强图像、噪声图像以及相应的角形增强图像

4 基于结构张量的图像滤波性能分析及统一正则 PDE 框架

4.1 基于结构张量的各向异性 PDE 滤波性能分析

本部分以定理的形式给出基于结构张量的各向异性 PDE 的滤波性能.首先,容易给出如下定理.

定理 2 对于扩散张量 $D(\mathbf{J}_0(\nabla \mathbf{u}_0)) = \lambda_1(|\nabla \mathbf{u}|)\boldsymbol{\eta}\boldsymbol{\eta}^T + \lambda_2(|\nabla \mathbf{u}|)\boldsymbol{\xi}\boldsymbol{\xi}^T$,规范正交的特征向量 $\boldsymbol{\eta}, \boldsymbol{\xi}$ 分别对应图像的梯度方向和切线方向, λ_1, λ_2 分别对应特征向量的两个特征根,则下述等价式成立

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} &= \nabla \cdot (D(\mathbf{J}_0(\nabla \mathbf{u}_0)) \cdot \nabla \mathbf{u}) \Leftrightarrow \\ \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} &= \nabla \cdot (\lambda_1(|\nabla \mathbf{u}|) \cdot \nabla \mathbf{u}) \end{aligned}$$

由定理 2 知,扩散张量 $D(\mathbf{J}_0(\nabla \mathbf{u}_0))$ 驱动的散度型各向异性 PDE(1)实质上等价于各向异性 Perona-Malik 方程^[25],扩散强度仅由 $\boldsymbol{\eta}$ 方向上的扩散系数 $\lambda_1(|\nabla \mathbf{u}|)$ 决定.可见,基于扩散张量的散度型 PDE 不能较好地刻

画扩散张量所要表达的滤波性能.

对于 Tschumperlè 等人^[12~14]提出的基于扩散张量的可计算迹型 PDE(2),我们容易给出如下定理.

定理 3 假设 $\mathbf{u}(x, y)$ 处处二阶连续可微, $D(\mathbf{J}_\rho(\nabla \mathbf{u}_\sigma)) = \lambda_1 \mathbf{w}\mathbf{w}^T + \lambda_2 \mathbf{v}\mathbf{v}^T$ 为连续的 2×2 扩散矩阵,规范正交的特征向量 \mathbf{v}, \mathbf{w} 分别对应图像的边缘方向和垂直方向, λ_2, λ_1 分别对应特征向量的两个特征根,利用可计算迹型 PDE(2)扩散近似于分别以 λ_2, λ_1 的速度沿 \mathbf{v}, \mathbf{w} 方向光滑.

可见,基于扩散张量 $D(\mathbf{J}_\rho(\nabla \mathbf{u}_\sigma))$ 的迹型各向异性 PDE(2)能够较好地刻画扩散张量所要表达的滤波性能.同时我们注意到,PDE(2)对应的是平滑型滤波机制.然而,下文将指出:可计算迹型 PDE(2)是散度型各向异性 PDE(1)的一种退化情形,PDE(2)虽然能够直观地刻画 PDE 在图像平坦区域和边缘区域的滤波性能,但是没有刻画角形区域的滤波性能,使得实际图像处理过程中角点结构往往被破坏.

进一步,考虑 $\sigma > 0, \rho > 0$ 情形下扩散张量 $D(\mathbf{J}_\rho(\nabla \mathbf{u}_\sigma))$ 驱动的 PDE(1)的滤波性能.我们给出如下两个定理,由于篇幅有限,详细证明过程见作者的博士论文^[26].

定理 4 对于规范正交向量组 \mathbf{w} 和 \mathbf{v} ,等式 $(\nabla \mathbf{u})^T \cdot (\nabla \cdot (\mathbf{w}\mathbf{w}^T)) = -(\nabla \mathbf{u})^T \cdot (\nabla \cdot (\mathbf{v}\mathbf{v}^T))$ 成立.

定理 5 假设 $\mathbf{u}(x, y)$ 处处二阶连续可微, $D(\mathbf{J}_\rho(\nabla \mathbf{u}_\sigma)) = \lambda_1 \mathbf{w}\mathbf{w}^T + \lambda_2 \mathbf{v}\mathbf{v}^T$ ($\sigma > 0, \rho > 0$) 为连续的 2×2 扩散矩阵,规范正交的特征向量 \mathbf{v}, \mathbf{w} 分别对应图像的边缘方向和垂直方向, λ_2, λ_1 分别对应特征向量的两个特征根,利用各向异性 PDE(1)进行扩散时,PDE 不仅具有以 λ_2, λ_1 为速度沿 \mathbf{v}, \mathbf{w} 方向光滑的作用,同时还具有增强角点和强边缘结构的作用.各向异性 PDE(1)对应的是平滑-增强型滤波机制.

4.2 结构张量驱动的变分泛函角点保持的条件

本节主要讨论 Tschumperlè 等人提出的一般性变分泛函,重点研究分析其具备角点保持性能的条件,并且对文献中的现有变分泛函进行验证讨论.根据 4.1 节中关于结构张量驱动的各向异性 PDE 的滤波性能的研究结果,可以通过忽略具有增强边缘作用的冲击滤波算子,将一般性变分泛函的角点保持性能研究转化为如下 PDE 的性能研究

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} &= \frac{\partial \Psi}{\partial \mu} \cdot D^2 \mathbf{u}(\mathbf{w}, \mathbf{w}) + \frac{\partial \Psi}{\partial \mu^\perp} \cdot D^2 \mathbf{u}(\mathbf{v}, \mathbf{v}) \\ &\quad - \left(\frac{\partial \Psi}{\partial \mu^\perp} - \frac{\partial \Psi}{\partial \mu} \right) \cdot (\nabla \mathbf{u})^T \cdot (\nabla \cdot (\mathbf{w}\mathbf{w}^T)) \quad (14) \end{aligned}$$

对于 $\Psi(\cdot, \cdot)$ 的选取,根据 4.1 节的研究,我们不难给出如下基本条件

$$\Psi \geq 0, \frac{\partial \Psi}{\partial \mu} \geq 0, \frac{\partial \Psi}{\partial \mu^\perp} \geq 0, \left(\frac{\partial \Psi}{\partial \mu^\perp} - \frac{\partial \Psi}{\partial \mu} \right) \geq 0 \quad (15)$$

当 $\Psi(\cdot, \cdot)$ 满足上述条件, 一般性变分泛函在实现边缘保持或边缘增强的图像处理任务的同时还能够保证角点结构的保持. 目前, 文献中已经提出多种 $\Psi(\cdot, \cdot)$ 的选取方式^[12]. 分析不难知道, $\Psi(\mu, \mu^\perp) = \varphi(\sqrt{\mu + \mu^\perp})$ 和 $\Psi(\mu, \mu^\perp) = \sqrt{(1 + \mu)(1 + \mu^\perp)}$ 能够满足基本条件(15), 保证图像处理过程中的边缘保持性和角点保持性, 而 $\Psi(\mu, \mu^\perp) = \varphi(\sqrt{\mu})$, $\Psi(\mu, \mu^\perp) = \varphi(\sqrt{\mu - \mu^\perp})$ 以及 $\Psi(\mu, \mu^\perp) = \varphi(\mu) + \varphi(\mu^\perp)$ 对应的一般性变分泛函在理论上都不具备角点保持性能, 其中 $\varphi(\cdot)$ 是具有边缘保持作用的势函数.

4.3 面向应用的统一正则 PDE 框架

由以上研究讨论知, 扩散张量驱动的散度型 PDE (1) 不能完全刻画扩散张量所要表达的滤波性能, 同时扩散张量本身也不能完全描述散度型 PDE(1) 的滤波性能; 而可计算迹型 PDE(2) 虽然能够直观地刻画 PDE 在图像平坦区域以及边缘区域的滤波性能, 但是没有刻画角形区域的滤波性能, 使得实际图像处理过程中角点结构往往被破坏. 为此, 不同于扩散张量驱动的散度型 PDE(1) 和可计算迹型 PDE(2), 下面给出一种形式更为直观、实现更为简洁、应用更为方便的统一正则 PDE 框架:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} = & \alpha_s [f_w(\mu, \mu^\perp) \cdot D^2 \mathbf{u}(\mathbf{w}, \mathbf{w}) \\ & + f_v(\mu, \mu^\perp) \cdot D^2 \mathbf{u}(\mathbf{v}, \mathbf{v}) \\ & - (f_v - f_w) \cdot (\nabla \mathbf{u})^T \cdot (\nabla \cdot (\mathbf{w} \mathbf{w}^T))] \\ & - \alpha_e (1 - f_w) \text{sign}(D^2 \mathbf{u}(\mathbf{w}, \mathbf{w})) |\nabla \mathbf{u}| \end{aligned} \quad (16)$$

其中, $\alpha_s > 0$, $\alpha_e > 0$ 为控制参数, $f_w \geq 0$, $f_v \geq 0$ 分别为 \mathbf{w} , \mathbf{v} 方向上的扩散系数. PDE(16) 同时实现了三种滤波性能: 平坦区域和边缘区域的各向异性平滑、平滑过程中角形结构的自适应保持、以及增强图像清晰度的边缘冲击滤波. 下面给出了边缘保持和边缘增强两种情形下扩散系数 $f_w \geq 0$, $f_v \geq 0$ 应该满足的条件.

(A) 边缘保持情形:

- (1) $\lim_{moa \rightarrow 0} f_w = \lim_{moa \rightarrow 0} f_v = 1$;
- (2) $\lim_{moa \rightarrow 1} f_w = 0$, $\lim_{moa \rightarrow 1} f_v = 0$ ($\lim_{moa \rightarrow 1} \frac{f_w}{f_v} = 0$);
- (3) $\lim_{\substack{moa \rightarrow c \\ 0 < c < 1}} (f_v - f_w) \geq 0$

(B) 边缘增强情形:

- (1) $\lim_{moa \rightarrow 0} f_w = \lim_{moa \rightarrow 0} f_v = 1$;
- (2) $\lim_{moa \rightarrow 1} f_w = 0$, $\lim_{moa \rightarrow 1} f_v = 1$;
- (3) $\lim_{\substack{moa \rightarrow c \\ 0 \leq c < 1}} (f_v - f_w) = d$ ($0 < d \leq 1$)

其中, moa 为各向异性测度. 注意到两种情形下的第 3 个条件都是为了保证图像处理过程中的角点保持性.

5 实验结果与分析

将统一正则 PDE 框架应用于图像插值以验证其有效性. 其中, 扩散系数取为 $f_w(\mu, \mu^\perp) = c(1 - \mu^\perp)^{0.5}$, $f_v(\mu, \mu^\perp) = 1$, $c(x) = 1/(1 + x^2/d^2)$, 参数 $\rho = 2$, $\sigma = 1.5$, $d = 2$, $\alpha_s = 1$, $\alpha_e = 0.025$ 取值不变.

实验 1 在该组实验中, 尺寸为 256×256 的原始高分辨率图像已知, 如图 5(a) 所示. 根据移动平均退化模型对原始高分辨率图像进行 4 倍率下采样, 得到尺寸为 64×64 的低分辨率图像, 图 5(b) 为其像素复制图像. 分别利用全变差 (Total Variation, TV) 插值方法^[27, 28]、方向扩散 PDE 插值方法^[29]、统一正则 PDE 框架对低分辨率图像进行插值处理. 从插值图像的峰值信噪比 (Peak Signal to Noise Ratio, PSNR) 看, TV 插值图像 (5(c)) 的 PSNR 为 26.6925dB; 方向扩散 PDE 插值图像 (5(d)) 的 PSNR 为 26.8334dB; 统一 PDE 框架插值图像 (5(e)) 的 PSNR 为 27.3792dB. 可见, 基于统一正则 PDE 的图像插值达到了最高的 PSNR 值. 从视觉效果看, TV 插值图像 (5(c)) 在边缘结构上存在明显的锯齿效应; 方向扩散 PDE 插值算法虽然能够较好地抑制锯齿效应, 但是同时钝化了原始图像中的角形结构 (5(d)); 而统一正则 PDE 不仅能够较好地抑制锯齿效应, 并且能够较好地保持图像中的角形结构, 5(d) 和 5(e) 的差异图像 5(f) 很



图5

好地说明了这个问题。

实验 2 在图 6 中,第 1 行为该组实验的低分辨率图像,为 Barbara 图像中含有噪声的局部截图;第 2 行为分别利用 TV 插值算法、方向扩散 PDE 插值算法、以及本文统一正则 PDE 框架对低分辨率图像进行 5 倍率放大的插值图像;第 3 行为利用 Canny 算子对上述插值图像的边缘检测结果。根据图像插值和边缘检测结果可知,TV 算法能够抑制随机噪声,但在边缘结构上存在锯齿效应;方向扩散 PDE 方法能够同时抑制锯齿效应和随机噪声,但是容易模糊低对比度区域中的流线性边缘,导致边缘检测结果中出现很多断裂结构;由于结构张量驱动的方向估计具备的鲁棒性,因此相对 TV 和方向扩散 PDE,统一正则 PDE 框架在一定程度上能够增强流线性边缘结构,插值图像和边缘检测图像具有更好的视觉效果。

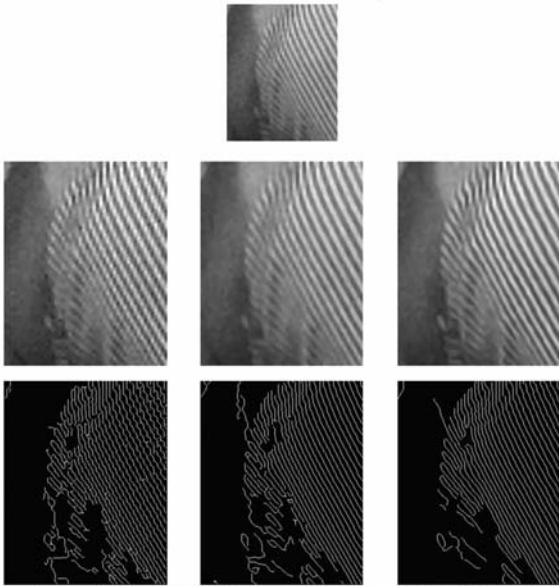


图6 第1行为原始低分辨率图像;第2行为TV插值图像、方向扩散PDE插值图像、统一正则PDE插值图像;第3行为基于Canny算子的边缘检测图像

6 结语

本文主要研究了结构张量驱动的变分偏微分方程图像建模方法的滤波性能。创新工作主要有:(1)首次提出了角形冲击滤波器的概念,基于角形强度度量 and 水平线演化理论,给出了角形冲击滤波器的设计步骤与数值实现;(2)首次给出了结构张量驱动的变分泛函具备角点保持性能的条件,同时建立了一种统一正则 PDE 框架,直观有效地刻画了平坦区域、边缘和角形状结构的滤波性能。单幅图像插值实验结果验证了统一正则 PDE 框架的有效性。此外,需要指出的是,除了图像插值^[28~31],本文提出的统一正则 PDE 框架还适用于图像去噪、图像增强、超分辨率重建、图像修补等多种

图像处理问题^[20~22,32,33]。

参考文献

- [1] Chan T F, Shen J, Vese L. Variational PDE models in image processing[J]. Notices of the American Mathematical Society, 2003, 50(1): 14 - 26.
- [2] 肖亮. 基于变分 PDE 和多重分形的图像建模: 理论与应用[D]. 江苏南京: 南京理工大学, 2003. 12. Xiao Liang. Variational PDE and Multifractal Based Image Modeling: Theory, Algorithm and Application [D]. Nanjing, Jiangsu: Nanjing University of Science and Technology, 2003, 12. (in Chinese)
- [3] 谢美华, 王正明. 基于边缘定向增强的各向异性扩散抑噪方法[J]. 电子学报, 2006, 34 (1) : 59 - 64. Xie Meihua, Wang Zhengming. Edge-directed enhancing based anisotropic diffusion denoising [J]. Acta Electronica Sinica, 2006, 34(1): 59 - 64. (in Chinese)
- [4] 付树军, 阮秋琦, 等. 基于各向异性扩散方程的超声图像去噪与边缘增强[J]. 电子学报, 2005, 33(7): 1191 - 1195. Fu Shujun, Yuan Qiuqi, et al. Anisotropic diffusion equation based ultrasonic image denoising and edge enhancement [J]. Acta Electronica Sinica, 2005, 33 (7) : 1191 - 1195. (in Chinese)
- [5] 周宏潮, 朱炬波, 王正明. SAR 图像增强的前向-后向扩散方程方法[J]. 电子学报, 2004, 32(12): 2070 - 2073. Zhou Hongchao, Zhu Jubo, Wang Zhengming. Forward and backward diffusion processes for SAR image enhancement [J]. Acta Electronica Sinica, 2004, 32 (12) : 2070 - 2073. (in Chinese)
- [6] 王岩, 梁甸农, 郭汉伟. 基于改进正则化方法的 SAR 图像增强技术[J]. 电子学报, 2003, 31(9): 1307 - 1309. Wang Yan, Liang Dianong, Guo Hanwei. SAR image enhancement using modified regularization method [J]. Acta Electronica Sinica, 2004, 31(9): 1307 - 1309. (in Chinese)
- [7] Weickert J. Anisotropic diffusion in image processing [M]. Stuttgart, Germany: Teubner-Verlag, 1998.
- [8] Weickert J. Coherence-enhancing diffusion filtering [J]. International Journal of Computer Vision, 1999, 31(2/3): 111 - 127.
- [9] Weickert J. Scale-Space Properties of Nonlinear Diffusion Filtering with a Diffusion Tensor [R]. Laboratory of Technomathematics, University of Kaiserslautern, Kaiserslautern, Germany, 1994.
- [10] Weickert J. Anisotropic Diffusion in Image Processing [D]. University of Kaiserslautern, Germany, January 1996.
- [11] Weickert J. A scheme for coherence-enhancing diffusion filtering with optimized rotation invariance [J]. Journal of Visual Communication and Image Representation, 2002, 13 (1/2) : 103 - 118.
- [12] Tschumpertlè D. PDE's Based Regularization of Multivalued

- Images and Applications[D]. Université de Nice- Sophia Antipolis, 2002.
- [13] Tschumperlè D, Deriche R. Diffusion PDE's on vector-valued images[J]. IEEE Signal Processing Magazine, 2002, 19(5): 16 – 25.
- [14] Tschumperlè D, Deriche R. Vector-valued image regularization with PDEs: a common framework for different applications[J]. IEEE PAMI, 2005, 27(4): 506 – 517.
- [15] Bruhn A, Weickert J, Feddern C, et al. Variational optical flow computation in real time[J]. IEEE Transactions on Image Processing, 2005, 14(5): 608 – 615.
- [16] Bruhn A, Weickert J. A Multi-grid platform for real-time motion computation with discontinuity-preserving variational methods[J]. International Journal of Computer Vision, 2006, 70(3): 257 – 277.
- [17] 王正明, 朱炬波. SAR 图像提高分辨率技术[M]. 北京: 科学出版社, 2006.
Wang Zhengming, Zhu Jubob. Techniques of Enhancing Resolution for SAR Images[M]. Beijing: Science Press, 2006. (in Chinese)
- [18] Aubert G, Kornprobst P. Mathematical Problems in Image Processing: Partial Differential Equations and the Calculus of Variations[M]. New York: Springer-Verlag, 2000. 111 – 118.
- [19] Weickert J, Schnorr C. A theoretical framework for convex regularizers in PDE-based computation of image motion[J]. International Journal of Computer Vision, 2001, 45(3): 245 – 264.
- [20] Charbonnier P, Féraud L B, Aubert G, et al. Deterministic edge-preserving regularization in computed imaging[J]. IEEE Transactions on Image Processing, 1997, 6(2): 298 – 311.
- [21] Osher S, Rudin L I. Feature-oriented image enhancement using shock filters[J]. SIAM Journal of Numerical Analysis, 1990, 27(4): 919 – 940.
- [22] Alvarez L, Mazorra L. Signal and image restoration using shock filters and anisotropic diffusion[J]. SIAM Journal on Numerical Analysis, 1994, 31(2): 590 – 605.
- [23] Yang G Z, Burger P, Firmin D N, et al. Structure adaptive anisotropic image filtering[J]. Image and Vision Computing, 1996, 14(2): 135 – 145.
- [24] Sapiro G. Geometric Partial Differential Equations and Image Analysis[M]. New York: Cambridge University Press, 2000, 241 – 243.
- [25] Perona P, Malik J. Scale-space and edge detection using anisotropic diffusion[J]. IEEE Transactions on PAMI, 1990, 12(7): 629 – 639.
- [26] 邵文泽. 基于图像建模理论的多帧图像正则化超分辨率重建算法研究[D]. 江苏南京: 南京理工大学, 2008. 6.
Shao Wenze. Image Modeling Based Regularized Multi-Frame Super Resolution Reconstruction[D]. Nanjing, Jiangsu: Nanjing University of Science and Technology, 2008, 6. (in Chinese)
- [27] Guichard F, Malgouyres F. Total variation based interpolation [A]. Proceedings of IX European Signal Processing Conference[C]. Greece; European Association of Signal Processing, 1998. 1741 – 1744.
- [28] Aly H A, Dubois E. Image up-sampling using total-variation regularization with a new observation model[J]. IEEE Transactions on Image Processing, 2005, 14(10): 1647 – 1659.
- [29] Belahmidi A, Guichard F. A partial differential equation approach to image zoom[A]. Proceedings of International Conference on Image Processing[C]. Singapore: IEEE, 2004. 649 – 652.
- [30] Schultz R R, Stevenson R L. A Bayesian approach to image expansion for improved definition[J]. IEEE Transactions on Image Processing, 1994, 3(3): 233 – 242.
- [31] Malgouyres F, Guichard F. Edge direction preserving image zooming: A mathematical and numerical analysis[J]. SIAM Journal of Numerical Analysis, 2001, 39(1): 1 – 37.
- [32] Farsiu S, Robinson M D. Fast and robust multi-frame super resolution[J]. IEEE Transactions on Image Processing, 2004, 13(10): 1327 – 1344.
- [33] Chan T F, Shen J. Mathematical models for local nontexture inpaintings[J]. SIAM Journal of Applied Mathematics, 2002, 62(3): 1019 – 1043.

作者简介



邵文泽 男, 1981 年 10 月出生, 江苏赣榆人. 2003 年和 2008 年在南京理工大学分别获理学学士和工学博士学位. 目前主要从事计算机图像处理、复杂系统设计与建模、稳健设计最优化等方面的相关研究工作.

E-mail: shaowenze1010@yahoo.com.cn



韦志辉 男, 1963 年 11 月出生, 江苏淮安人. 教授、博士生导师、中国兵器工业协会高级会员. 1983 年、1986 年和 2003 年在东南大学分别获理学学士、理学硕士和工学博士学位. 主要从事图像编码、超分辨率重建、稀疏表示、基于偏微分方程的遥感图像处理等方面的研究工作.

E-mail: gswei@mail.njust.edu.cn