

# 适合处理乘性噪声估计卫星姿态的非线性迭代滤波算法

王炯琦, 矫媛媛, 周海银, 潘晓刚

(国防科技大学数学与系统科学系, 湖南长沙 410073)

**摘要:** 针对带乘性噪声的星敏感器/陀螺非线性卫星姿态确定系统, 提出了一种迭代 MEKF (Iterative Multiplicative Extended Kalman Filter) 姿态估计滤波算法. 通过对带乘性噪声的非线性卫星姿态确定系统的状态方程和测量方程进行二次线性化迭代, 并基于线性最小方差准则和投影公式, 导出了姿态状态递推滤波算法, 解决了线性化误差对姿态滤波精度的影响, 并扩展了 EKF 算法在带乘性随机噪声阵的非线性系统状态估计中的应用范围. 仿真表明, 迭代 MEKF 滤波算法能够有效地克服乘性噪声对姿态估计精度的影响.

**关键词:** 乘性噪声; 非线性系统; 扩展 Kalman 滤波; 粒子滤波; 姿态确定

**中图分类号:** TP391.9      **文献标识码:** A      **文章编号:** 0372-2112 (2011) 06-1417-06

## An Iterative Filter for Nonlinear Satellite Attitude Determination System with Multiplicative Stochastic Matrix

WANG Jiong-qi, JIAO Yuan-yuan, ZHOU Hai-yin, PAN Xiao-gang

(Department of Math and System Science, National University of Defense Technology, Changsha, Hunan 410073, China)

**Abstract:** An iterative attitude estimation algorithm was proposed to solve multiplicative stochastic matrix in satellite attitude determination system. Based on the principle of linear minimum-variance and projection formula, the attitude iterative filter algorithm was deduced. By linearizing and iterating two times respectively for state equation and measure equation, the algorithm can reduce the influence of linearization error to the attitude determination precision. The algorithm enlarges the application range of EKF in the state estimation of nonlinear systems with multiplicative noise. Simulation results indicate that the proposed algorithm provides effective performance in the presence of multiplicative stochastic matrix.

**Key words:** multiplicative noise; nonlinear system; EKF (extended Kalman filter); particle filter; attitude determination

### 1 引言

星敏感器/陀螺组合定姿模式以陀螺为基准<sup>[1]</sup>, 星敏感器对陀螺漂移进行校正<sup>[2]</sup>, 在卫星高精度姿态测量系统中已得到了广泛的应用<sup>[3]</sup>. 利用星敏感器/陀螺确定卫星三轴运动姿态, 需要求解由姿态运动学方程和姿态测量方程构成的非线性系统方程. 解决非线性问题通常采用的方法是传统的扩展 Kalman 滤波 (EKF)<sup>[4,5]</sup>, 但是其推导一般是基于系统模型仅含加性噪声的情况, 然而卫星 (特别是复杂卫星) 在轨运行期间不可避免地存在抖动振动的影响, 使得星敏感器测量模型引入基准偏差或者星敏感器相对于卫星本体的安装矩阵在卫星的运动过程中发生了偏转<sup>[6]</sup>, 为了更客观地描述星敏感器测量模型的随机干扰, 除了要考虑加性噪声的影响, 还要考虑乘性噪声的影响. 在这种情况下采用传统的 EKF, 有效性很难保证, 尽管 UKF 滤波与 PF 滤波采用采

样方法近似非线性分布来解决非线性问题, 且可以处理非加性噪声, 但要得到高精度的估计, 需要较多数目的 Sigma 点或粒子数, 即使在待估状态为二维、三维情况下, 也会产生较大的计算量, 在现有计算机计算能力情况下, 很难满足实时性需要<sup>[7,8]</sup>.

针对带乘性噪声的动态系统, 目前存在一些理论研究, 如针对一维乘性噪声系统, Rajasekaram P. K.<sup>[9]</sup> 提出了一种处理乘性噪声的最优线性估计方法, 给出了最优滤波算法, 有效地解决了存在乘性噪声情况下的线性问题. 褚东升等在此基础上, 分别将线性系统的乘性噪声推广为对角阵和随机阵<sup>[10,11]</sup>. 但是对带乘性随机噪声阵的非线性系统进行滤波, 特别是将其应用于卫星姿态估计的研究相对较少. 这在某种程度上提供了星敏感器观测模型优化和定姿精度改善的空间.

为解决卫星高精度姿态确定问题, 考虑到卫星定姿系统的非线性性和实际星敏感器测量模型中存在乘性

噪声,本文提出了一种适合处理乘性噪声估计卫星姿态的非线性迭代滤波算法,即迭代 MEKF(Iterative Multiplicative Extended Kalman Filter),该算法将乘性随机噪声阵的估计方法有效地结合到 EKF 中,通过对非线性系统进行二次线性化迭代,基于最小方差准则和投影公式,导出状态递推滤波算法,仿真表明,迭代 MEKF 滤波算法能够有效地克服乘性噪声对姿态估计精度的影响。

## 2 卫星姿态参数与运动学方程

四元数为一种常用的姿态描述参数<sup>[12]</sup>,利用四元数,由惯性坐标系到卫星本体坐标系的姿态矩阵可表示为

$$A(\bar{q}) = (q_0^2 - |\mathbf{q}|^2) \mathbf{I}_{3 \times 3} + 2\mathbf{q}\mathbf{q}^T - 2q_0[\mathbf{q} \times] \quad (1)$$

其中  $\bar{q} = \begin{bmatrix} q_0 \\ \mathbf{q} \end{bmatrix} = [q_0 \quad q_1 \quad q_2 \quad q_3]^T$ ,

$$[\mathbf{q} \times] = \begin{bmatrix} 0 & -q_3 & q_2 \\ q_3 & 0 & -q_1 \\ -q_2 & q_1 & 0 \end{bmatrix}.$$

四元数微分方程为

$$\dot{\bar{q}} = \frac{1}{2} \boldsymbol{\Omega}(\boldsymbol{\omega}) \bar{q} = \frac{1}{2} \boldsymbol{\Phi}(\bar{q}) \boldsymbol{\omega} \quad (2)$$

式中,  $\boldsymbol{\omega} = [\omega_x \quad \omega_y \quad \omega_z]^T$  是星体坐标系相对于惯性坐标系的旋转角速度,矩阵  $\boldsymbol{\Omega}(\boldsymbol{\omega})$  和  $\boldsymbol{\Phi}(\bar{q})$  定义如下:

$$\boldsymbol{\Omega}(\boldsymbol{\omega}) = \begin{bmatrix} -[\boldsymbol{\omega} \times] & \boldsymbol{\omega} \\ \boldsymbol{\omega}^T & 0 \end{bmatrix}, \boldsymbol{\Phi}(\bar{q}) = \begin{bmatrix} q_0 \mathbf{I}_{3 \times 3} + [\mathbf{q} \times] \\ -\mathbf{q}^T \end{bmatrix}$$

## 3 姿态测量模型

### 3.1 陀螺测量模型

陀螺测量模型<sup>[13]</sup>为:

$$\boldsymbol{\omega}_g = \boldsymbol{\omega} + \mathbf{b} + \mathbf{d} + \mathbf{n}_g \quad (3)$$

式中:  $\boldsymbol{\omega}_g$  为陀螺的测量输出;  $\boldsymbol{\omega}$  为陀螺输入轴的姿态角速度;  $\mathbf{n}_g$  为零均值方差等于  $\sigma_g^2$  的陀螺白噪声;  $\mathbf{b}$ ,  $\mathbf{d}$  分别为陀螺的常值漂移和相关漂移,且满足如下方程

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{b}} &= \boldsymbol{\eta}_b \\ \dot{\mathbf{d}} &= -\mathbf{D}_\tau \mathbf{d} + \boldsymbol{\eta}_d \end{aligned}$$

其中  $\boldsymbol{\eta}_b$ ,  $\boldsymbol{\eta}_d$  为零均值白噪声,  $\mathbf{D}_\tau$  为由相关时间常数  $\tau$  构成的对角阵,  $\mathbf{D}_\tau = \frac{1}{\tau} \mathbf{I}_{3 \times 3}$ , 且  $E\{\boldsymbol{\eta}_b(t) \boldsymbol{\eta}_b(t')\} = \boldsymbol{\Sigma}_b \delta(t - t')$ ,  $E\{\boldsymbol{\eta}_d(t) \boldsymbol{\eta}_d(t')\} = \boldsymbol{\Sigma}_d \delta(t - t')$ .

### 3.2 星敏感器测量模型

设星敏感器坐标系与星体坐标系重合,则星敏感器的测量原理可由下式描述<sup>[12]</sup>:

$$\mathbf{u}_B = A(\bar{q}) \mathbf{u}_I + \mathbf{n} \quad (4)$$

式中,  $\mathbf{u}_I$  是定义在惯性坐标系下的相对于某个恒星天体的单位参考矢量,  $\mathbf{u}_B$  是在星敏感器坐标系中所获得

的单位测量矢量,  $\mathbf{n}$  是星敏感器的测量噪声,  $A(\bar{q})$  是由惯性系到卫星本体系的四元数姿态矩阵. 然而由于卫星在轨运行期间中不可避免地存在抖动振动的影响,使得星敏感器测量模型引入基准偏差或者星敏感器相对于卫星本体的安装矩阵在卫星的运动过程中发生了偏转,此时带有偏转噪声的星敏感器测量模型应为:

$$\mathbf{u}_B = \mathbf{m} A(\bar{q}) \mathbf{u}_I + \mathbf{n} \quad (5)$$

其中,  $\mathbf{m}$  为乘性偏转随机阵,取转序为  $zxy$ ,其欧拉角分别为  $\delta\psi$ ,  $\delta\phi$ ,  $\delta\theta$ , 则:

$$\mathbf{m} = \begin{bmatrix} 1 & \delta\psi & -\delta\theta \\ -\delta\psi & 1 & \delta\phi \\ \delta\theta & -\delta\phi & 1 \end{bmatrix}$$

## 4 姿态估计方案设计

### 4.1 状态变量及系统方程

定义状态变量

$$\mathbf{x} = [\bar{q}^T \quad \mathbf{b}^T \quad \mathbf{d}^T]^T \quad (6)$$

利用四元数微分方程和陀螺观测方程建立状态估计方程

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \hat{\bar{q}}(t) \\ \hat{\mathbf{b}}(t) \\ \hat{\mathbf{d}}(t) \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \boldsymbol{\Omega}(\boldsymbol{\omega}_g) \hat{\bar{q}} - \frac{1}{2} \boldsymbol{\Phi}(\hat{\bar{q}}) (\hat{\mathbf{b}} + \hat{\mathbf{d}}) \\ 0_3 \\ -\mathbf{D}_\tau \hat{\mathbf{d}} \end{bmatrix} \\ &+ \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} \boldsymbol{\Phi}(\hat{\bar{q}}) & 0_{4 \times 3} \\ 0_{3 \times 3} & 0_{3 \times 3} \\ 0_{3 \times 3} & \mathbf{I}_{3 \times 3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{n}_g \\ \mathbf{n}_d \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (7)$$

上式为关于状态变量的非线性函数,简记为

$$\dot{\hat{\mathbf{x}}}(t) = f[\hat{\mathbf{x}}(t), t] + \boldsymbol{\Gamma}[\hat{\mathbf{x}}(t), t] \mathbf{w}(t) \quad (8)$$

星敏感器提供的是离散测量值,为获得某时刻惯性系相对于星体系的三轴姿态,至少需要两个不平行参考矢量的观测信息,目前工程应用中常采用三个不平行参考矢量的观测值. 选定参考矢量  $\mathbf{u}_{I1}$ ,  $\mathbf{u}_{I2}$  和  $\mathbf{u}_{I3}$ , 相应的测量矢量是  $\mathbf{u}_{B1}$ ,  $\mathbf{u}_{B2}$  和  $\mathbf{u}_{B3}$ , 利用  $\mathbf{u}_{B1}$ ,  $\mathbf{u}_{B2}$  和  $\mathbf{u}_{B3}$  构成测量矢量  $\mathbf{z}$ , 建立带有乘性偏转随机阵的测量方程

$$\begin{aligned} \mathbf{z}(k) &= \begin{bmatrix} (m_1(k)) A[\bar{q}(k)] \mathbf{u}_{I1} \\ (m_2(k)) A[\bar{q}(k)] \mathbf{u}_{I2} \\ (m_3(k)) A[\bar{q}(k)] \mathbf{u}_{I3} \end{bmatrix} \\ &+ \mathbf{v}(k) = \mathbf{m}(k) h[\mathbf{x}(k)] + \mathbf{v}(k) \end{aligned} \quad (9)$$

其中星敏感器加性噪声  $\mathbf{v}$  的统计特性满足

$$E\{\mathbf{v}(k)\} = \mathbf{0}, E\{\mathbf{v}(k) \mathbf{v}(j)^T\} = \mathbf{R} \delta_{kj}$$

且  $\{\mathbf{v}(k)\}$ ,  $\{\mathbf{w}(k)\}$  以及  $\mathbf{x}(0)$  之间不相关.

而乘性噪声的统计特性满足

$E\{\mathbf{m}(k)\} = \bar{\mathbf{m}}(k)$ , 其中  $\mathbf{m}(k) = (m_{ij}(k))_{9 \times 9}$ ,  $\bar{\mathbf{m}}(k) = (\bar{m}_{ij}(k))_{9 \times 9}$ ,  $E[m_{ij}(k)] = \bar{m}_{ij}(k)$ , 若记  $\Delta_{ij}(k) = m_{ij}(k) - \bar{m}_{ij}(k)$ ,  $E[(m_{ij}(k) - \bar{m}_{ij}(k))(m_{gl}(k) - \bar{m}_{gl}(k))^T] = E[\Delta_{ij}(k)\Delta_{gl}(k)^T]$ , 记为  $N_{ij,gl}(k)$ ,  $i, j, g, l = 1, 2, \dots, 9$ ,  $E[(\mathbf{m}(k) - \bar{\mathbf{m}}(k))(\mathbf{m}(s) - \bar{\mathbf{m}}(s))^T] = 0$ ,  $k \neq s$ , 且  $\{\mathbf{m}(k)\}$  与  $\{\mathbf{w}(k), \mathbf{v}(k), \mathbf{x}(0)\}$  统计独立.

## 4.2 迭代 MEKF 滤波算法

迭代 MEKF 滤波过程可以分为如下三部分.

### (1) 非线性函数线性化

对姿态确定系统状态方程和测量方程离散化, 得到带乘性噪声的星敏感器/陀螺非线性卫星姿态确定的离散系统方程.

$$\mathbf{x}(k+1) = f[\mathbf{x}(k), k] + \Gamma[\mathbf{x}(k), k]\mathbf{w}(k) \quad (10)$$

$$\mathbf{z}(k) = \mathbf{m}(k)h[\mathbf{x}(k)] + \mathbf{v}(k)$$

将非线性函数  $f$  和  $h$  分别在状态滤波值  $\mathbf{x}(k|k)$  和状态预测值  $\mathbf{x}(k|k-1)$  展开, 取 Taylor 级数的一阶项和常数项, 则

$$\mathbf{x}_1(k+1) = \mathbf{A}_1(k+1, k)\mathbf{x}(k) + \mathbf{a}_1(k) + \mathbf{B}_1(k)\mathbf{w}(k) \quad (11)$$

$$\mathbf{z}_1(k) = \mathbf{m}(k)\mathbf{C}_1(k)\mathbf{x}_1(k) + \mathbf{m}(k)\mathbf{c}_1(k) + \mathbf{v}(k) \quad (12)$$

其中

$$\mathbf{A}_1(k+1, k) = \partial f(\mathbf{x}(k), k) / \partial \mathbf{x}(k|k)$$

$$\mathbf{B}_1(k) = \Gamma(\mathbf{x}(k|k), k)$$

$$\mathbf{C}_1(k) = \partial h(\mathbf{x}(k), k) / \partial \mathbf{x}(k|k-1)$$

$$\mathbf{a}_1(k) = f(\mathbf{x}(k|k), k) - [\partial f(\mathbf{x}(k), k) / \partial \mathbf{x}(k|k)]\mathbf{x}(k|k)$$

$$\mathbf{c}_1(k) = h(\mathbf{x}(k|k-1), k)$$

$$- [\partial h(\mathbf{x}(k), k) / \partial \mathbf{x}(k|k-1)]\mathbf{x}(k|k-1)$$

### (2) 第一阶段滤波过程

利用投影定理来推导系统方程式(11)和式(12)在线性最小方差意义下的状态最优滤波算法.

$$\hat{\mathbf{z}}_1(k/k-1) = E\{z_1(k)/\mathbf{Z}^{k-1}\} \quad (13)$$

其中

$$\mathbf{Z}^{k-1} = \text{col}\{z(0), z(1), \dots, z(k-1)\}$$

事实上,  $\mathbf{Z}^{k-1}$  是由  $\mathbf{x}(0), \mathbf{w}(0), \mathbf{w}(1), \dots, \mathbf{w}(k-2), \mathbf{v}(0), \mathbf{v}(1), \dots, \mathbf{v}(k-2), \mathbf{m}(1), \dots, \mathbf{m}(k-1)$  组成, 并且由假设条件, 有

$$\mathbf{v}(k) \perp \mathbf{Z}^{k-1}$$

由系统测量方程(12), 其一步预测为

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{z}}_1(k/k-1) &= E\{z_1(k)/\mathbf{Z}^{k-1}\} \\ &= E\{\mathbf{m}(k)\mathbf{C}_1(k)\mathbf{x}_1(k) + \mathbf{m}(k)\mathbf{c}_1(k) + \mathbf{v}(k)/\mathbf{Z}^{k-1}\} \\ &= \bar{\mathbf{m}}(k)\mathbf{C}_1(k)\hat{\mathbf{x}}_1(k|k-1) + \bar{\mathbf{m}}(k)\mathbf{c}_1(k) \\ &= \bar{\mathbf{m}}(k)h(\hat{\mathbf{x}}_1(k/k-1), k) \end{aligned} \quad (14)$$

同理, 可知  $\mathbf{w}(k-1) \perp \mathbf{Z}^{k-1}$ , 由系统状态方程式

(11), 其一步预测为

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{x}}_1(k/k-1) &= E\{\mathbf{x}_1(k)/\mathbf{Z}^{k-1}\} \\ &= E\{\mathbf{A}_1(k, k-1)\mathbf{x}(k-1) + \mathbf{a}_1(k-1) \\ &\quad + \mathbf{B}_1(k-1)\mathbf{w}(k-1)/\mathbf{Z}^{k-1}\} \\ &= \mathbf{A}_1(k, k-1)\mathbf{x}(k-1/k-1) + \mathbf{a}_1(k-1) \\ &= f(\hat{\mathbf{x}}(k-1/k-1), k-1) \end{aligned} \quad (15)$$

状态的一步预测误差为

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{x}}_1(k/k-1) &= \mathbf{x}_1(k) - \hat{\mathbf{x}}_1(k/k-1) \\ &= \mathbf{A}_1(k, k-1)\tilde{\mathbf{x}}(k-1/k-1) \\ &\quad + \mathbf{B}_1(k-1)\mathbf{w}(k-1) \end{aligned} \quad (16)$$

则一步预测误差协方差阵为

$$\begin{aligned} \mathbf{P}_1(k/k-1) &= E\{\tilde{\mathbf{x}}(k/k-1)\tilde{\mathbf{x}}^T(k/k-1)\} \\ &= \mathbf{A}_1(k, k-1)\mathbf{P}(k-1)\mathbf{A}_1^T(k, k-1) \\ &\quad + \mathbf{B}_1(k-1)\mathbf{Q}(k-1)\mathbf{B}_1^T(k-1) \end{aligned} \quad (17)$$

同理, 测量的一步预测误差为

$$\begin{aligned} \tilde{z}_1(k/k-1) &= z_1(k) - \hat{z}_1(k/k-1) \\ &= \mathbf{m}(k)\mathbf{C}_1(k)\mathbf{x}_1(k) + \mathbf{m}(k)\mathbf{c}_1(k) + \mathbf{v}(k) \\ &\quad - \bar{\mathbf{m}}(k)\mathbf{C}_1(k)\hat{\mathbf{x}}_1(k|k-1) - \bar{\mathbf{m}}(k)\mathbf{c}_1(k) \\ &= \bar{\mathbf{m}}(k)\mathbf{C}_1(k)\tilde{\mathbf{x}}_1(k|k-1) \\ &\quad + [\mathbf{m}(k) - \bar{\mathbf{m}}(k)]\mathbf{C}_1(k)\mathbf{x}_1(k) \\ &\quad + [\mathbf{m}(k) - \bar{\mathbf{m}}(k)]\mathbf{c}_1(k) + \mathbf{v}(k) \end{aligned} \quad (18)$$

根据投影定理, 有

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{x}}_1(k/k) &= E\{\mathbf{x}_1(k)/\mathbf{Z}^k\} \\ &= \hat{\mathbf{x}}_1(k|k-1) + \text{cov}\{\tilde{\mathbf{x}}_1(k/k-1), \tilde{z}_1(k/k-1)\} \\ &\quad \text{var}^{-1}\{\tilde{z}_1(k/k-1)\}\tilde{z}_1(k/k-1) \end{aligned} \quad (19)$$

其中

$$\begin{aligned} \text{cov}\{\tilde{\mathbf{x}}_1(k/k-1), \tilde{z}_1(k/k-1)\} &= E\{\tilde{\mathbf{x}}_1(k/k-1)\tilde{z}_1^T(k/k-1)\} \\ &= \mathbf{P}_1(k/k-1)\mathbf{C}_1^T(k)\bar{\mathbf{m}}(k) \end{aligned}$$

新息方差阵为

$$\begin{aligned} \mathbf{R}_{L1}(k) &\triangleq \text{var}\{\tilde{z}_1(k/k-1)\} \\ &= E\{(\mathbf{m}(k) - \bar{\mathbf{m}}(k))\mathbf{C}_1(k)\mathbf{x}_1(k)\mathbf{x}_1^T(k)\mathbf{C}_1^T(k) \\ &\quad (\mathbf{m}(k) - \bar{\mathbf{m}}(k))^T + E\{(\mathbf{m}(k) - \bar{\mathbf{m}}(k))\mathbf{c}_1(k) \\ &\quad \mathbf{c}_1^T(k)(\mathbf{m}(k) - \bar{\mathbf{m}}(k))^T + \bar{\mathbf{m}}(k)\mathbf{C}_1(k) \\ &\quad \mathbf{P}_1(k/k-1)\mathbf{C}_1^T(k)\bar{\mathbf{m}}^T(k) + \mathbf{R}(k)\} \end{aligned}$$

其中定义

$$\begin{aligned} E\{(\mathbf{m}(k) - \bar{\mathbf{m}}(k))\mathbf{C}_1(k)\mathbf{x}_1(k)\mathbf{x}_1^T(k)\mathbf{C}_1^T(k)(\mathbf{m}(k) - \bar{\mathbf{m}}(k))^T\} \\ = \mathbf{G}_1(k) = (g_{1ul}(k))_{r \times r} \end{aligned}$$

$$g_{1ul}(k) = \sum_{j=1}^r \sum_{i=1}^r \Delta_{ij}(k) p_{1ij} \Delta_{ij}(k)$$

$$= \text{Tr} \left[ \begin{bmatrix} N_{i1,1l}(k) & N_{i2,1l}(k) & \cdots & N_{ir,1l}(k) \\ N_{i1,i2}(k) & N_{i2,i2}(k) & \cdots & N_{ir,i2}(k) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ N_{i1,lr}(k) & N_{i2,lr}(k) & \cdots & N_{ir,lr}(k) \end{bmatrix} \cdot (\mathbf{C}_1(k)\mathbf{S}_1(k)\mathbf{C}_1^T(k)) \right]$$

其中  $p_{1ij}$  为矩阵  $\mathbf{C}_1(k) \mathbf{x}_1(k) \mathbf{x}_1^T(k) \mathbf{C}_1^T(k)$  第  $i$  行第  $j$  列的元素.

$$\begin{aligned} & \mathbf{E}\{(\mathbf{m}(k) - \bar{\mathbf{m}}(k)) \mathbf{c}_1(k) \mathbf{c}_1^T(k) (\mathbf{m}(k) - \bar{\mathbf{m}}(k))^T\} \\ &= \mathbf{D}_1(k) = (d_{1il}(k))_{r \times r} \\ & d_{1il}(k) = \sum_{j=1}^r \sum_{i=1}^r \Delta_{ii}(k) q_{1ij} \Delta_{ij}(k) \\ &= \mathbf{Tr} \left[ \begin{array}{cccc} N_{i1,11}(k) & N_{i2,11}(k) & \cdots & N_{ir,11}(k) \\ N_{i1,12}(k) & N_{i2,12}(k) & \cdots & N_{ir,12}(k) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ N_{i1,ir}(k) & N_{i2,ir}(k) & \cdots & N_{ir,ir}(k) \end{array} \right] \\ & \quad \cdot (\mathbf{c}_1(k) \mathbf{c}_1^T(k)) \end{aligned}$$

其中  $q_{1ij}$  为矩阵  $\mathbf{c}_1(k) \mathbf{c}_1^T(k)$  第  $i$  行第  $j$  列的元素.

由系统状态方程(11),可知状态相关矩阵为

$$\begin{aligned} \mathbf{S}_1(k) &= \mathbf{E}\{\mathbf{x}_1(k) \mathbf{x}_1^T(k)\} \\ &= \mathbf{A}_1(k, k-1) \mathbf{S}(k-1) \mathbf{A}_1^T(k, k-1) + \mathbf{a}_1(k-1) \mathbf{a}_1^T(k-1) \\ & \quad + \mathbf{B}_1(k-1) \mathbf{Q}(k-1) \mathbf{B}_1^T(k-1) \end{aligned} \quad (20)$$

其中  $\mathbf{S}(k)$  满足初始条件:  $\mathbf{S}(0) = \mathbf{P}(0)$ .

令  $\mathbf{K}_1(k) = \mathbf{P}_1(k|k-1) \mathbf{C}_1^T(k) \bar{\mathbf{m}}(k) \mathbf{R}_{L1}^{-1}(k)$

则第一阶段状态滤波值为

$$\hat{\mathbf{x}}_1(k|k) = \hat{\mathbf{x}}_1(k|k-1) + \mathbf{K}_1(k) \bar{\mathbf{z}}_1(k|k-1) \quad (21)$$

此外,可得状态的一步平滑为

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{x}}(k-1|k) &= \mathbf{E}\{\mathbf{x}(k-1) / \mathbf{Z}^k\} \\ &= \hat{\mathbf{x}}(k-1|k-1) + \mathbf{P}(k-1) \mathbf{A}_1^T(k, k-1) \\ & \quad \cdot \mathbf{C}_1^T(k) \bar{\mathbf{m}}(k) \mathbf{R}_{L1}^{-1}(k) \bar{\mathbf{z}}_1(k|k-1) \end{aligned} \quad (22)$$

(3) 第二阶段滤波过程

为了减少线性化误差对状态滤波精度的影响,再次将非线性函数  $f$  和  $h$  分别在状态平滑值  $\mathbf{x}(k-1|k)$  和状态滤波值  $\mathbf{x}(k|k)$  处展开,取 Taylor 级数的一阶项和常数项,则可得到较精确的系统方程如下

$$\mathbf{x}(k+1) = \mathbf{A}(k+1, k) \mathbf{x}(k) + \mathbf{a}(k) + \mathbf{B}(k) \mathbf{w}(k) \quad (23)$$

$$\mathbf{z}(k) = \mathbf{m}(k) \mathbf{C}(k) \mathbf{x}(k) + \mathbf{m}(k) \mathbf{c}(k) + \mathbf{v}(k) \quad (24)$$

其中

$$\mathbf{A}(k+1, k) = \partial f(\mathbf{x}(k), k) / \partial \mathbf{x}(k|k+1)$$

$$\mathbf{B}(k) = \Gamma(\mathbf{x}(k|k+1), k)$$

$$\mathbf{C}(k) = \partial h(\mathbf{x}(k), k) / \partial \mathbf{x}(k|k)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{a}(k) &= f(\mathbf{x}(k|k+1), k) \\ & \quad - [\partial f(\mathbf{x}(k), k) / \partial \mathbf{x}(k|k+1)] \mathbf{x}(k|k+1) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{c}(k) &= h(\mathbf{x}(k|k), k) \\ & \quad - [\partial h(\mathbf{x}(k), k) / \partial \mathbf{x}(k|k)] \mathbf{x}(k|k) \end{aligned}$$

类似与第一阶段的滤波过程,再次利用投影定理可得到系统方程(23)和(24)在线性最小方差意义下的状态最优滤波递推算法为

● 状态滤波公式

$$\hat{\mathbf{x}}(k/k) = \hat{\mathbf{x}}(k/k-1) + \mathbf{K}(k) \bar{\mathbf{z}}(k/k-1) \quad (25)$$

● 新息

$$\bar{\mathbf{z}}(k/k-1) = \mathbf{z}(k) - \bar{\mathbf{m}}(k) h(\mathbf{x}_1(k/k), k) \quad (26)$$

● 状态预测公式

$$\mathbf{x}(k/k-1) = f(\mathbf{x}(k-1/k), k-1) \quad (27)$$

● 预测误差协方差阵

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(k/k-1) &= \mathbf{A}(k, k-1) \mathbf{P}(k-1) \mathbf{A}^T(k, k-1) \\ & \quad + \mathbf{B}(k-1) \mathbf{Q}(k-1) \mathbf{B}^T(k-1) \end{aligned} \quad (28)$$

● 增益阵

$$\mathbf{K}(k) = \mathbf{P}(k/k-1) \mathbf{C}^T(k) \bar{\mathbf{m}}(k) \mathbf{R}_L^{-1}(k) \quad (29)$$

新息方差矩阵

$$\begin{aligned} \mathbf{R}_L(k) &= \text{var}\{\bar{\mathbf{z}}(k/k-1)\} \\ &= \mathbf{E}\{(\mathbf{m}(k) - \bar{\mathbf{m}}(k)) \mathbf{C}(k) \mathbf{x}(k) \mathbf{x}^T(k) \mathbf{C}^T(k) (\mathbf{m}(k) - \bar{\mathbf{m}}(k))^T\} \\ & \quad + \mathbf{E}\{(\mathbf{m}(k) - \bar{\mathbf{m}}(k)) \mathbf{c}(k) \mathbf{c}^T(k) (\mathbf{m}(k) - \bar{\mathbf{m}}(k))^T\} \\ & \quad + \bar{\mathbf{m}}(k) \mathbf{C}(k) \mathbf{P}(k/k-1) \mathbf{C}^T(k) \bar{\mathbf{m}}^T(k) + \mathbf{R}(k) \end{aligned}$$

● 滤波误差协方差阵

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(k) &= \mathbf{E}\{\bar{\mathbf{x}}(k/k) \bar{\mathbf{x}}^T(k/k)\} \\ &= \mathbf{P}(k/k-1) - \mathbf{K}(k) \bar{\mathbf{m}}(k) \mathbf{C}(k) \mathbf{P}(k/k-1) \end{aligned} \quad (30)$$

其中初始值

$$\mathbf{x}(0/0) = \mathbf{E}\{\mathbf{x}(0)\} = \mathbf{0}, \mathbf{P}(0) = \mathbf{S}(0)$$

注:传统 EKF 滤波算法在处理带乘性随机噪声阵的非线性系统(10)时,其状态滤波过程仅为迭代 MEKF 滤波算法中的前面两部分,称之为 MEKF.

## 5 仿真计算

### 5.1 仿真条件

针对方程(10)所描述的带乘性随机噪声阵的星敏感器/陀螺非线性卫星姿态确定系统,对本文所提出的非线性迭代 EKF 滤波算法进行仿真研究.仿真时,选取惯性空间中的三个方向  $\mathbf{u}_{11} = [1 \ 0 \ 0]^T$ ,  $\mathbf{u}_{12} = [0 \ 1 \ 0]^T$  和  $\mathbf{u}_{13} = [0 \ 0 \ 1]^T$  作为参考矢量,来观测某一对地观测卫星的运动姿态,采样间隔为 1s,观测加性噪声的均方差为  $15'' (3\sigma)$ ,乘性噪声均方差为  $\sigma_m = 5'' (3\sigma)$ ;陀螺测量噪声  $\sigma_g = 0.001^\circ/h$ ,相关漂移白噪声  $\sigma_d = 0.05^\circ/h$ ,相关时间常数  $\tau = 1h$ ,常值漂移白噪声  $\sigma_b = 0.01^\circ/h$ ;取状态矢量各分量的初始真值选取如下:  $\bar{\mathbf{q}}(0) = [1 \ 0 \ 0 \ 0]$ ,  $\mathbf{b}(0) = [1 \ -1 \ 1]^\circ/h$ ,  $\mathbf{d}(0) = [0.1 \ 0.1 \ 0.1]^\circ/h$ ;在迭代滤波器中,姿态四元数初始估值取  $\hat{\mathbf{q}}(0) = [\cos 2^\circ \ 1/\sqrt{3} [\sin 2^\circ \ \sin 2^\circ \ \sin 2^\circ]]$ ,陀螺常值漂移和相关漂移初始估值均为零矢量,初始误差协方差阵为

$$\mathbf{P}(0) = \begin{bmatrix} (10^{-3})^2 \mathbf{I}_{4 \times 4} & \mathbf{0}_{4 \times 3} & \mathbf{0}_{4 \times 3} \\ \mathbf{0}_{3 \times 4} & (10^{-5})^2 \mathbf{I}_{3 \times 3} & \mathbf{0}_{3 \times 3} \\ \mathbf{0}_{3 \times 4} & \mathbf{0}_{3 \times 3} & (10^{-5})^2 \mathbf{I}_{3 \times 3} \end{bmatrix}_{10 \times 10}$$

对乘性噪声  $m(k)$ , 通过分解为欧拉角三个变量之间的关系, 令其均值为零, 方差为

$$E \begin{bmatrix} \delta\psi \\ \delta\phi \\ \delta\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta\psi \\ \delta\phi \\ \delta\theta \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} \left(\frac{\sigma_m}{3} \times \frac{\pi}{180} \times \frac{1}{3600}\right)^2 & 0 & 0 \\ 0 & \left(\frac{\sigma_m}{3} \times \frac{\pi}{180} \times \frac{1}{3600}\right)^2 & 0 \\ 0 & 0 & \left(\frac{\sigma_m}{3} \times \frac{\pi}{180} \times \frac{1}{3600}\right)^2 \end{bmatrix}$$

### 5.2 仿真结果及分析

在上述仿真条件下, 迭代 MEKF 姿态估计算法与 MEKF 姿态估计算法的状态估计结果比较如图 1~3 示。

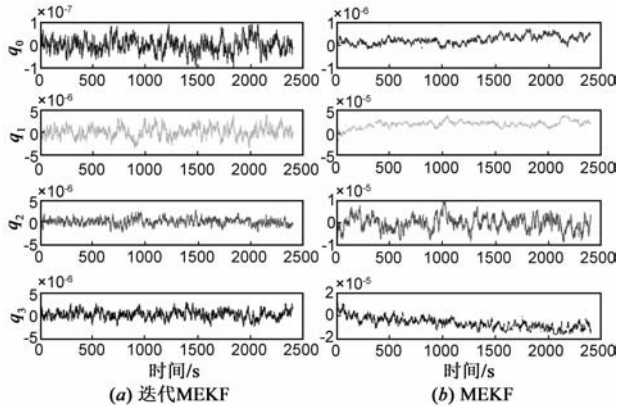


图1 姿态四元数估计偏差比较

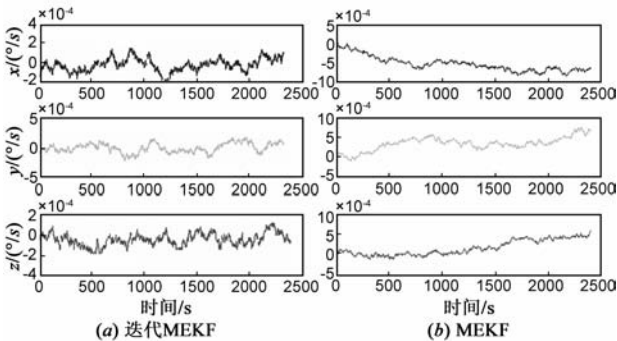


图2 常值漂移偏差比较

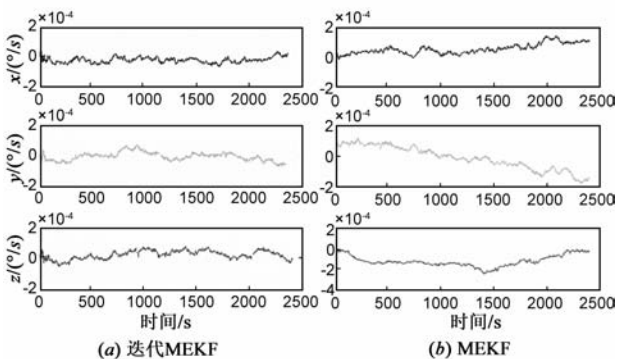


图3 相关漂移偏差比较

从图 1~3 给出的仿真结果可以看出, 无论是迭代 MEKF 还是 MEKF, 均能够处理存在乘性随机阵噪声的非线性姿态确定系统, 在一定程度上抑制乘性噪声对滤波精度的影响. 利用相同的仿真参数, 针对不同乘性噪声, 比较迭代 MEKF 与 MEKF 滤波算法的姿态估计结果(如表 1 所示), 可以发现: 当乘性噪声均方差和初始状态估计误差比较小或为零时, 采用两种算法的滤波效果基本相当, 不过, 在存在显著乘性噪声的情况下, 如果初始状态估计误差比较大或者星敏感器的加性测量噪声比较大, 则迭代 MEKF 的估计性能无论从精度还是稳定性要优于 MEKF.

此外, 在 4.1 仿真条件下, 采用二阶 MEKF 滤波算法<sup>[14]</sup>与 PF 滤波算法<sup>[8]</sup>进行姿态估计, 其定姿性能与本文提出的迭代 MEKF 滤波算法的比较如表 2.

表 1 不同乘性噪声下迭代 MEKF 算法和传统 MEKF 算法的定姿性能对比

乘性噪声方差 (角秒:°)	姿态角估计误差(角秒:°)					
	滚动角		偏航角		俯仰角	
	传统 MEKF	迭代 MEKF	传统 MEKF	迭代 MEKF	传统 MEKF	迭代 MEKF
0.5	9.178	8.918	8.687	8.468	9.413	9.478
1	11.487	9.148	12.792	9.156	15.897	9.548
3	13.782	9.278	14.726	8.638	16.927	9.486
5	15.781	9.363	16.735	8.754	17.156	9.481
10	38.178	12.405	35.174	13.618	39.716	14.324

表 2 不同滤波算法的姿态估计性能分析

滤波算法	姿态角估计误差(角秒:°)			收敛时间 (秒:sec)	计算时间 (秒:sec)
	滚动角	偏航角	俯仰角		
传统 MEKF 算法	15.781	16.735	17.156	23	51
迭代 MEKF 算法	9.363	8.754	8.269	15	89
二阶 MEKF 算法	10.105	7.576	9.481	20	157
PF 滤波算法	8.792	9.458	8.479	40	312

显然, 迭代 MEKF 滤波算法的良好性能是以加大运算量作为代价的, 由于采用了两个阶段的滤波过程, 迭代 MEKF 计算量为传统 EKF 算法的 2 倍左右, 然而庆幸的是, 迭代 MEKF 算法两个阶段的滤波过程在形式上完全一致, 使得姿态确定程序不需要进行大的改动. 不过, 相比基于 Taylor 级数展开的高阶非线性滤波姿态估计算法与其他非线性滤波算法(如 PF 滤波), 其运算负荷有很大改善, 且不需要计算状态变量的高阶偏导数, 或者可以避免粒子滤波的粒子点退化问题(正如表 2 所示).

## 6 结论

本文针对带乘性随机噪声阵的星敏感器/陀螺非线性卫星姿态确定系统, 提出了一种迭代 MEKF 滤波算法. 该算法将乘性随机噪声阵的处理方法有效地结合

到 EKF 滤波中,通过对带乘性噪声的非线性卫星姿态确定系统的状态方程和测量方程进行二次线性化迭代,并基于线性最小方差准则和投影公式,导出了姿态状态递推滤波算法,扩展了 EKF 算法在带乘性随机噪声阵的非线性系统状态估计中的应用范围.仿真结果表明,迭代 MEKF 滤波算法能够有效地克服乘性噪声对姿态估计精度的影响,姿态估计精度与 PF 滤波(粒子滤波)相当,但在计算效率上,明显优于后者.

#### 参考文献

- [1] Mortari D, Pollock T C, Junkins J L. Towards the most accurate attitude determination system using star trackers[J]. IEEE Trans on Aerospace and Electronic System, 1998, 159(98): 839 - 850.
- [2] 章仁为. 卫星轨道姿态动力学与控制[M]. 北京:北京航空航天大学出版社, 1998.
- [3] Reid D B. Description of the milstar attitude determination system[A]. Proceedings of the American Control Conference[C]. CA, USA: Lockheed Martin Missiles & Space, Inc, 1997. 2313 - 2322.
- [4] Lefferts E J, Markley F L, Shuster M D. Kalman filtering for spacecraft attitude estimation[J]. Journal of Guidance, Control, and Dynamics, 1982, 5(5): 417 - 429.
- [5] Pisiaki M L, Martel F, Pal P K. Three-axis attitude determination via Kalman filtering of magnetometer data[J]. Journal of Guidance, Control, and Dynamics, 1990, 13(3): 506 - 514.
- [6] Toyoshima Morio, Takashi Jono, Takahashi Nobuhiro, et al. Transfer Functions of Microvibrational Disturbances on a Satellite[R]. Sengen, Tsukuba, Ibaraki, Japan: National Space Development Agency, 2004. 305 - 505.
- [7] 马野,王孝通,戴耀,等. 基于 UKF 的神经网络自适应全局信息融合方法[J]. 电子学报, 2005, 33(10): 1914 - 1916. MA Ye, WANG Xiao-tong, DAI Yao, et al. Study on nonlinear optimal estimation for neural networks data fusion [J]. Acta Electronica Sinica, 2005, 33(10): 635 - 63. (in Chinese)
- [8] 常发亮,马丽,刘增晓,等. 复杂环境下基于自适应粒子滤波器的目标跟踪[J]. 电子学报, 2006, 34(12): 2150 - 2153. CHANG Fa-liang, MA Li, LIU Ze-xiao, et al. Target tracking

based on adaptive particle filter under complex background[J]. Acta Electronica Sinica, 2006, 34(12): 2150 - 2153. (in Chinese)

- [9] Rajasekaram P. K. Optimal linear estimation of stochastic signals in the presence of multiplicative noises[J]. IEEE Trans on Aerospace and Electronic Systems, 1971, 7(2): 462 - 468.
- [10] 褚东升,王璐,陈萌. 多通道带乘性噪声系统观测噪声的最优估计[J]. 中国海洋大学学报, 2004, 34(3): 475 - 480.
- [11] Dongsheng Chu, Shouwan Gao and Lina Guo. An augmented optimal filter for multi-channel stochastic singular systems with multiplicative noise[A]. Proceedings of the IEEE International Conference on Automation and Logistics [C]. Germany: Springer-Verlag Press, 2007.
- [12] I. Y Bar-Itzhack, Y Oshman. Attitude determination from vector observations: quaternion estimation [J]. IEEE Trans on Aerospace and Electronic Systems, 1985, 21(1): 128 - 135.
- [13] 段方,刘建业,李荣冰. 一种改进的星敏感器/陀螺卫星定姿算法[J]. 系统工程与电子技术, 2006, 28(6): 896 - 899.
- [14] 冯道旺,李腾,黄知涛. 平方根二阶 EKF 及其在目标运动分析中的应用[J]. 系统工程与电子技术, 2009, 31(9): 2101 - 2105.

#### 作者简介



王炯琦 男, 1979 年 9 月出生于浙江上虞. 现为国防科技大学理学院数学与系统科学系讲师, 从事非线性滤波、姿态确定等方面的研究工作. E-mail: wangjq1979@163.com



矫媛媛 女, 1982 年 3 月出生于辽宁凤城. 博士研究生, 主要研究方向为卫星姿态确定. E-mail: jyynudt@gmail.com