

一类带有等式约束的动态系统的滤波方法

文传博, 王致杰, 焦 斌

(上海电机学院电气学院, 上海 200240)

摘 要: 在动态系统的状态受到约束的时候, 传统的卡尔曼滤波器无法直接的应用. 本文提出了一种多尺度约束滤波算法来处理一类由等式方程描述的约束问题. 通过对系统状态的分块和小波变换, 建立一个包含约束条件的新的动态系统, 然后对小波系数进行滤波, 最后通过重构得到原系统的估计值. 新算法的估计过程是实时的, 并且具有多尺度分析的能力. 利用约束条件所提供的信息, 所得新算法的估计误差协方差的迹小于不考虑约束时的卡尔曼滤波器, 同时理论证明了新算法的估计精度高于已有的卡尔曼约束滤波器, 仿真例子说明了算法的有效性.

关键词: 等式约束; 卡尔曼滤波; 约束滤波; 小波变换

中图分类号: TN957 **文献标识码:** A **文章编号:** 0372-2112 (2011) 3A-110-005

A Sort of Filtering Method for Dynamic Systems with Equality Constraints

WEN Chuan-bo, WANG Zhi-jie, JIAO Bin

(School of Electric, Shanghai Dianji University, Shanghai 200240, China)

Abstract: The application of traditional Kalman filtering is limited when the state of dynamic systems is constrained. A Multiscale constrained filtering method is proposed in this paper to deal with these constrained problems which is described by equation. The state of systems is rewritten as blocked form and wavelet transform are used to obtain new dynamic systems containing constrained information. The wavelet coefficients are estimated with measurements and finally obtain the estimate results of original state by using inverse wavelet transform. New algorithm is capable of Multiscale analysis and the estimate process is real time. Computer simulations show that the trace of the estimate error covariance of the new algorithm is smaller than that of the traditional Kalman filter, and the estimate accuracy of it is better than that of the existing constraint algorithm.

Key words: equality constraints; Kalman filter; constrained filtering; wavelet transform

1 引言

在对动态目标的跟踪当中, 卡尔曼滤波器是一种实时递归的最优线性滤波器, 它由一个已知的固定模型描述, 并且模型受到的干扰假定是高斯白噪声^[1]. 然而, 在实际的应用当中, 系统的状态有时会受到自然条件或人为的约束, 也就不再满足卡尔曼滤波的应用条件, 经典的卡尔曼滤波理论也就不能直接的应用. 当约束条件由等式方程描述的时候, 一些学者对系统的滤波问题进行了研究, 希望通过约束条件所提供的先验信息得到比不考虑这些信息时的卡尔曼滤波算法更优的估计值^[2,3]. 文献[4]通过减少系统模型参数来解决这类问题, 该方法要求了解每个状态明确的物理意义, 并且参数的减少可能会导致系统物理意义的不明确. 文献[5]把这些约束条件当做不带噪声的测量信息进行处理, 但这个条件会导致推导过程中矩阵是不可逆的. 文献[6]提出的卡

尔曼约束滤波算法把约束条件加入到估计结果的框架当中, 这类方法并没有增加计算的负担, 但计算精度有限. 文献[7]对以上几种算法进行了总结, 给出了它们在精度上的优劣. 文献[8]给出了一种零空间的状态分解方法, 把待估状态分为确定部分和不确定部分, 然后保留确定部分, 对不确定部分进行估计, 再对两部分进行组合得到最后的状态估计值. 但上述算法均是在时域中给出的结果, 并没有考虑系统在频域上的信息.

我们考虑一类状态受到等式方程约束时的动态系统, 提出一种多尺度分析的方法进行处理, 首先对原系统进行分块, 然后进行小波变换, 再对小波系数进行滤波, 最后重构得到原状态的估计值. 由于得到了小波系数的估计值, 因此可以得到状态在频域上的信息, 最后计算机仿真比较了新算法与 Simon 的算法在估计精度上的优劣, 从而说明多尺度约束算法在的优越性.

2 模型及分块描述

考虑一类带有约束条件的离散系统:

$$\mathbf{x}(k+1) = \mathbf{A}(k)\mathbf{x}(k) + \mathbf{w}(k), k=1,2,\dots \quad (1)$$

$$\mathbf{z}(k) = \mathbf{C}(k)\mathbf{x}(k) + \mathbf{v}(k) \quad (2)$$

$$\mathbf{D}\mathbf{x}(k) = \mathbf{d} \quad (3)$$

其中 $\mathbf{x}(k)$ 和 $\mathbf{z}(k)$ 分别表示状态和测量. $\mathbf{A}(k) \in \mathbf{R}^{n \times n}$ 和 $\mathbf{H}(k) \in \mathbf{R}^{p \times n}$ 是转移矩阵. $\mathbf{D} \in \mathbf{R}^{s \times n}$ 是已知的秩为 s 的矩阵, $\mathbf{d} \in \mathbf{R}^s$ 是一已知向量, 受约束的向量维数 $s \leq n$. 过程噪声 $\mathbf{w}(k) \in \mathbf{R}^n$ 和测量噪声 $\mathbf{v}(k) \in \mathbf{R}^p$ 分别为零均值的白噪声, 其协方差分别为 \mathbf{Q} 和 \mathbf{R} .

由式(1)~(3)所描述的约束系统可改写成长度为 $M=2^N$ (N 为正整数) 的分块形式^[9]

$$\mathbf{X}(m+1) = \bar{\mathbf{A}}(m)\mathbf{X}(m, M) + \bar{\mathbf{w}}(m), m=0,1,2,\dots \quad (4)$$

$$\mathbf{Z}(m+1) = \bar{\mathbf{C}}(m+1)\mathbf{X}(m+1) + \bar{\mathbf{v}}(m+1) \quad (5)$$

$$\bar{\mathbf{D}}\mathbf{X}(m+1) = \bar{\mathbf{d}} \quad (6)$$

其中 $\mathbf{X}(m+1)$ 表示状态的第 $m+1$ 块, $\mathbf{Z}(m+1)$ 表示对应于状态块 $\mathbf{X}(m+1)$ 的测量块, 即:

$$\mathbf{X}(m+1) = [\mathbf{x}^T(mM+1), \mathbf{x}^T(mM+2), \dots, \mathbf{x}^T(mM+M)]^T$$

$$\mathbf{Z}(m+1) = [\mathbf{z}^T(mM+1), \mathbf{z}^T(mM+2), \dots, \mathbf{z}^T(mM+M)]^T$$

$\mathbf{X}(m, M)$ 表示第 m 块的第 M 个元素, $\bar{\mathbf{A}}(m)$, $\bar{\mathbf{C}}(m+1)$, $\bar{\mathbf{D}}$, $\bar{\mathbf{w}}(m)$, $\bar{\mathbf{v}}(m+1)$ 为相应的矩阵和噪声, 表达式为:

$$\bar{\mathbf{A}}(m) = \left[\left(\prod_{i=0}^0 \mathbf{A}(mM+i) \right)^T, \left(\prod_{i=1}^0 \mathbf{A}(mM+i) \right)^T, \dots, \left(\prod_{i=M-1}^0 \mathbf{A}(mM+i) \right)^T \right]^T$$

$$\bar{\mathbf{C}}(m+1) = \text{diag} \{ \mathbf{C}(mM+1), \mathbf{C}(mM+2), \dots, \mathbf{C}(mM+M) \}$$

$$\bar{\mathbf{D}} = \text{diag} \{ \overbrace{\mathbf{D} \quad \mathbf{D} \quad \dots \quad \mathbf{D}}^{M \uparrow} \}$$

$$\bar{\mathbf{d}} = \text{diag} \{ \overbrace{\mathbf{d} \quad \mathbf{d} \quad \dots \quad \mathbf{d}}^{M \uparrow} \}$$

$$\bar{\mathbf{v}}(m+1) = [\mathbf{v}^T(mM+1), \mathbf{v}^T(mM+2), \dots, \mathbf{v}^T(mM+M)]^T$$

$$\bar{\mathbf{w}}(m) = \mathbf{B}(m)\tilde{\mathbf{w}}(m)$$

其中

$$\tilde{\mathbf{w}}(m) = [\mathbf{w}^T(mM), \mathbf{w}^T(mM+1), \dots, \mathbf{w}^T(mM+M-1)]^T$$

令 \mathbf{W}_X 是一小波算子矩阵, 它满足

$$\mathbf{W}_X^H \mathbf{W}_X = \mathbf{I} \quad (7)$$

其中 \mathbf{W}_X^H 是 \mathbf{W}_X 的共轭转置矩阵.

把式(7)小波算子矩阵分别作用于式(4)系统方程的两端, 可以得到用新的块状态方程

$$\boldsymbol{\gamma}(m+1) = \bar{\mathbf{A}}_w(m)\mathbf{X}(m, M) + \boldsymbol{\mu}(m) \quad (8)$$

其中

$$\boldsymbol{\gamma}(m+1) = \mathbf{W}_X \mathbf{X}(m+1), \bar{\mathbf{A}}_w(m) = \mathbf{W}_X \bar{\mathbf{A}}(m),$$

$$\boldsymbol{\mu}(m) = \mathbf{W}_X \bar{\mathbf{w}}(m)$$

易知, $\boldsymbol{\mu}(m)$ 也是零均值的白噪声.

同样, 利用性质方程式(7), 可以将观测方程式(5)描述为新的形式

$$\mathbf{Z}(m+1) = \bar{\mathbf{C}}_w(m+1)\boldsymbol{\gamma}(m+1) + \bar{\mathbf{v}}(m+1) \quad (9)$$

其中 $\bar{\mathbf{C}}_w(m+1) = \bar{\mathbf{C}}(m+1)\mathbf{W}_X^H$, 由于 $\mathbf{Z}(m+1)$ 包含了 $\mathbf{z}(mM+1), \mathbf{z}(mM+2), \dots, \mathbf{z}(mM+M)$, 由式(9), 测量方程可写为:

$$\mathbf{Z}(mM+s) = \bar{\mathbf{C}}_w(m+1, s, \cdot)\boldsymbol{\gamma}(m+1) + \bar{\mathbf{v}}(mM+s) \quad (10)$$

其中 $\bar{\mathbf{C}}_w(m+1, s, \cdot)$ 表示 $\bar{\mathbf{C}}_w(m+1)$ 的第 $(s-1)p+1$ 至 sp 行, 块约束方程(6)可变为:

$$\bar{\mathbf{D}}_w \boldsymbol{\gamma}(m+1) = \bar{\mathbf{d}} \quad (11)$$

其中 $\bar{\mathbf{D}}_w = \bar{\mathbf{D}}\mathbf{W}_X^H$

这样, 我们就得到了新的系统方程式(8), 测量方程式(9), (10)以及约束条件式(11), 下面基于这几个方程求系统块的最优估计结果.

3 最优滤波算法的推导

本节中, 我们根据式(8)~(11), 对小波系数 $\boldsymbol{\gamma}(m)$ 进行滤波, 使得估计值满足式(11)并且均方估计误差最小, 状态块最优解可描述为:

$$\hat{\boldsymbol{\gamma}}_1(m|m) = E\{\boldsymbol{\gamma}(m) | \mathbf{Z}_1^m\}, \text{并满足 } \bar{\mathbf{D}}_w \hat{\boldsymbol{\gamma}}_1(m|m) = \bar{\mathbf{d}}$$

其中 $\mathbf{Z}_1^m = \{\mathbf{Z}(1), \mathbf{Z}(2), \dots, \mathbf{Z}(m)\}$ 表示第 1 至第 m 个测量块的集合.

最优估计值满足

$$\min_{\hat{\boldsymbol{\gamma}}_1} E\{[\boldsymbol{\gamma}(m) - \hat{\boldsymbol{\gamma}}_1(m|m)]^T [\boldsymbol{\gamma}(m) - \hat{\boldsymbol{\gamma}}_1(m|m)] | \mathbf{Z}_1^m\}$$

和

$$\bar{\mathbf{D}}_w \hat{\boldsymbol{\gamma}}_1(m|m) = \bar{\mathbf{d}} \quad (12)$$

为了描述的方便, 符号 m 在下式中略去, 利用条件概率, 均方误差一般可表示为:

$$E\{[\boldsymbol{\gamma} - \hat{\boldsymbol{\gamma}}_1]^T [\boldsymbol{\gamma} - \hat{\boldsymbol{\gamma}}_1] | \mathbf{Z}\} = \int [\boldsymbol{\gamma} - \hat{\boldsymbol{\gamma}}_1]^T [\boldsymbol{\gamma} - \hat{\boldsymbol{\gamma}}_1] P(\boldsymbol{\gamma} | \mathbf{Z}) d\boldsymbol{\gamma}$$

$$= \int \boldsymbol{\gamma}^T \boldsymbol{\gamma} P(\boldsymbol{\gamma} | \mathbf{Z}) d\boldsymbol{\gamma} - 2\hat{\boldsymbol{\gamma}}_1^T \int \boldsymbol{\gamma} P(\boldsymbol{\gamma} | \mathbf{Z}) d\boldsymbol{\gamma} + \hat{\boldsymbol{\gamma}}_1^T \hat{\boldsymbol{\gamma}}_1 \quad (13)$$

由式(12)和式(13), 块约束问题的拉格朗日方程可写为:

$$L = E\{[\boldsymbol{\gamma} - \hat{\boldsymbol{\gamma}}_1]^T [\boldsymbol{\gamma} - \hat{\boldsymbol{\gamma}}_1] | \mathbf{Z}\} + \lambda^T (\bar{\mathbf{D}}_w \hat{\boldsymbol{\gamma}}_1 - \bar{\mathbf{d}})$$

$$= \int \boldsymbol{\gamma}^T \boldsymbol{\gamma} P(\boldsymbol{\gamma} | \mathbf{Z}) d\boldsymbol{\gamma} - 2\hat{\boldsymbol{\gamma}}_1^T \int \boldsymbol{\gamma} P(\boldsymbol{\gamma} | \mathbf{Z}) d\boldsymbol{\gamma} + \hat{\boldsymbol{\gamma}}_1^T \hat{\boldsymbol{\gamma}}_1 + \lambda^T (\bar{\mathbf{D}}_w \hat{\boldsymbol{\gamma}}_1 - \bar{\mathbf{d}}) \quad (14)$$

在式(14)中, $\boldsymbol{\gamma}$ 的条件均值是 $\hat{\boldsymbol{\gamma}} = \int \boldsymbol{\gamma} P(\boldsymbol{\gamma} | \mathbf{Z}) d\boldsymbol{\gamma}$, 也就是 $\boldsymbol{\gamma}$ 在不受约束情况下的最优估计值.

在上式中分别对 $\hat{\boldsymbol{\gamma}}_1$ 和 λ 求导并解方程可得:

$$\lambda = 2(\bar{\mathbf{D}}_w \bar{\mathbf{D}}_w^T)^{-1} (\bar{\mathbf{D}}_w^T \hat{\boldsymbol{\gamma}} - \bar{\mathbf{d}}) \quad (15)$$

$$\hat{\boldsymbol{\gamma}}_1 = \hat{\boldsymbol{\gamma}} - \bar{\mathbf{D}}_w^T (\bar{\mathbf{D}}_w \bar{\mathbf{D}}_w^T)^{-1} (\bar{\mathbf{D}}_w \hat{\boldsymbol{\gamma}} - \bar{\mathbf{d}}) \quad (16)$$

相应的估计误差协方差为

$$\mathbf{P}_{\gamma_1} = [\mathbf{I}_M - \bar{\mathbf{D}}_w^T (\bar{\mathbf{D}}_w \bar{\mathbf{D}}_w^T)^{-1} \bar{\mathbf{D}}_w] \mathbf{P}_\gamma [\mathbf{I}_M - \bar{\mathbf{D}}_w^T (\bar{\mathbf{D}}_w \bar{\mathbf{D}}_w^T)^{-1} \bar{\mathbf{D}}_w]^T \quad (17)$$

其中 \mathbf{I}_M 是维数为 nM 的单位矩阵。

从式(16)可以看出,根据约束条件和测量方程得到的估计结果可由不带约束条件下的最优滤波结果线性表示,那么,这类问题可转化为求不带约束小波系数最优解,下面给出结果。

没有约束条件下,状态 $\gamma(m)$ 的估计值是其由 \mathbf{Z}_m^T 所张成空间上的投影。下面,我们假定第 $m-1$ 块的所有估计值已经得到,对第 m 块的状态进行估计。

由于第 $m-1$ 块的状态已经得到,则 $\hat{\mathbf{X}}(m-1, M)$, $\mathbf{P}_X(m-1, M)$ 均已知。

$\gamma(m)$ 的预测值:

$$\hat{\gamma}(m|m, 0) = \bar{\mathbf{A}}_w(m) \hat{\mathbf{X}}(m-1, M) \quad (18)$$

预测误差协方差:

$$\mathbf{P}_\gamma(m|m, 0) = \bar{\mathbf{A}}_w(m) \mathbf{P}_X(m-1, M) \bar{\mathbf{A}}_w^T(m) + \mathbf{B}(m) \mathbf{W}_X \bar{\mathbf{Q}}(m) \mathbf{W}_X^T \mathbf{B}^T(m) \quad (19)$$

其中

$$\bar{\mathbf{Q}}(m) = \text{diag}\{\mathbf{Q}((m-1)M+1), \dots, \mathbf{Q}(mM)\}$$

当用 $\mathbf{Z}(m, s)$, $s = 1, 2, \dots, M$ 对第 m 块进行更新时,更新方程为:

$$\hat{\gamma}(m|m, s) = \hat{\gamma}(m|m, s-1) + \mathbf{K}(m, s) [\mathbf{Z}(m, s) - \hat{\mathbf{Z}}(m|m, s)] \quad (20)$$

$$\mathbf{P}_\gamma(m|m, s) = [\mathbf{I} - \mathbf{K}(m, s) \bar{\mathbf{C}}_w(m, s, \cdot)] \cdot \mathbf{P}_\gamma(m|m, s-1) \quad (21)$$

其中

$$\mathbf{K}(m, s) = \mathbf{P}_\gamma(m|m, s-1) \bar{\mathbf{C}}_w^T(m, s, \cdot)$$

$$\{\bar{\mathbf{C}}_w(m, s, \cdot) \mathbf{P}_\gamma(m|m, s-1) \bar{\mathbf{C}}_w^T(m, s, \cdot) + \mathbf{R}((m-1)M+s)\}$$

$$\hat{\mathbf{Z}}(m|m, s) = \bar{\mathbf{C}}_w(m, s, \cdot) \hat{\gamma}(m|m, s-1)$$

最终得到小波系数的估计值及估计误差协方差为:

$$\hat{\gamma}(m|m) = \hat{\gamma}(m|m, M) \quad (22)$$

$$\mathbf{P}_\gamma(m|m) = \mathbf{P}_\gamma(m|m, M) \quad (23)$$

把式(22)和(23)的结果代入式(16)和(17),可得约束条件下小波块的估计值 $\hat{\gamma}_1(m|m)$ 及估计误差协方差 $\mathbf{P}_{\gamma_1}(m|m)$, 由此我们得到了小波系数的估计值。

利用小波逆变换,得到状态块的估计值

$$\hat{\mathbf{X}}(m|m) = \mathbf{W}_X^H \hat{\gamma}_1(m|m)$$

$$\bar{\mathbf{P}}_X(m|m) = \mathbf{W}_X^H \mathbf{P}_{\gamma_1}(m|m) \mathbf{W}_X$$

4 多尺度约束滤波在性能上的优点

本节我们通过两个定理来说明一下多尺度约束滤波算法在估计精度上的优越性,定理1说明了新算法对

状态的估计误差协方差小于 Simon 给出的卡尔曼约束滤波算法,定理2说明新算法估计误差协方差的迹小于不考虑约束条件时的卡尔曼滤波算法。

4.1 卡尔曼滤波

在给出两个定理之前,先回顾一下卡尔曼滤波,滤波过程为:

$$\hat{\mathbf{x}}(k|k) = \hat{\mathbf{x}}(k|k-1) + \mathbf{P}(k|k) \mathbf{C}^T \mathbf{R}^{-1} [\mathbf{z}(k) - \mathbf{C} \hat{\mathbf{x}}(k|k-1)] \quad (24)$$

$$\mathbf{P}^{-1}(k|k) = \mathbf{P}^{-1}(k|k-1) + \mathbf{C}^T \mathbf{R}^{-1} \mathbf{C} \quad (25)$$

其中

$$\hat{\mathbf{x}}(k|k-1) = \mathbf{A} \hat{\mathbf{x}}(k-1|k-1) \quad (26)$$

$$\mathbf{P}^{-1}(k|k-1) = [\mathbf{A} \mathbf{P}(k-1|k-1) \mathbf{A}^T + \mathbf{Q}]^{-1} \quad (27)$$

4.2 精度比较的主要结论

引理1(矩阵求逆引理) 若矩阵 $\mathbf{A} \in \mathbf{R}^{n \times n}$, $\mathbf{C} \in \mathbf{R}^{m \times m}$ 均为非奇异矩阵,矩阵 $\mathbf{B} \in \mathbf{R}^{n \times m}$, $\mathbf{D} \in \mathbf{R}^{m \times n}$ 则矩阵 $\mathbf{A} + \mathbf{BCD}$ 具有逆矩阵:

$$(\mathbf{A} + \mathbf{BCD})^{-1} = \mathbf{A}^{-1} - \mathbf{A}^{-1} \mathbf{B} [\mathbf{D} \mathbf{A}^{-1} \mathbf{B} + \mathbf{C}^{-1}]^{-1} \mathbf{D} \mathbf{A}^{-1} \quad (28)$$

引理2^[10] 卡尔曼约束滤波的估计误差协方差的迹小于不考虑约束条件时卡尔曼滤波估计误差协方差的迹。

引理3 为了下面证明述的方便,记块长度为 $M(N) = 2^N$, $N = 1, 2, \dots$ 的第 m 个状态块为 $\mathbf{X}_N(m)$, 不考虑约束条件的时候,基于该分块对 $\mathbf{x}(k)$ 的估计值和估计误差协方差记为 $\hat{\mathbf{x}}_N(k)$ 和 $\mathbf{P}_{N,X}(k)$, 基于分块长度为 $M(N-1) = 2^{N-1}$ 得到的 $\mathbf{x}(k)$ 估计值和相应的估计误差协方差分别记为 $\hat{\mathbf{x}}_{N-1}(k)$ 和 $\mathbf{P}_{N-1,X}(k)$, 那么 $\mathbf{P}_{N,X}(k) \leq \mathbf{P}_{N-1,X}(k)$ 成立。

证明 先来说明当 $N=1$ 时的情形,来证明 $\mathbf{P}_1(k) \leq \mathbf{P}_0(k)$ 。这时 $M(N-1) = 1$, 相当于不分块,因此基于此所得的估计结果 $\hat{\mathbf{x}}_0(k)$ 和 $\mathbf{P}_0(k)$ 即是标准的卡尔曼滤波的结果。

由于每块包含 $M(1) = 2$ 个元素,那么第 m 块第 i 个元素, $i = 1, 2$ 对应 $M(0)$ 分块的第 $2(m-1) + i$ 个元素,即 $\mathbf{X}_1(m, i) = \mathbf{x}(2(m-1) + i)$, 有:

$$\mathbf{X}_1(m) = \begin{bmatrix} \mathbf{X}_1(m, 1) \\ \mathbf{X}_1(m, 2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{x}(2m-1) \\ \mathbf{x}(2m) \end{bmatrix}$$

假设第 $m-1$ 块的估计结果已知,并有

$$\hat{\mathbf{x}}_1(2m-2) = \hat{\mathbf{x}}(2m-2|2m-2)$$

$$\mathbf{P}_1(2m-2) = \mathbf{P}(2m-2|2m-2)$$

接下来根据分块 $M_1(m)$ 来离线计算第 m 块的估计误差协方差。

预测误差协方差

$$\mathbf{P}_{1,\gamma}(m|m-1) = \bar{\mathbf{A}}_w \mathbf{P}_1(2m-2) \bar{\mathbf{A}}_w^T + \mathbf{W}_X \mathbf{B} \mathbf{Q} \mathbf{B}^T \mathbf{W}_X^T$$

$$= \mathbf{W}_X \begin{bmatrix} \Gamma(m-2) & \Gamma(m-2)\mathbf{A}^T \\ \mathbf{A}\Gamma(m-2) & \mathbf{A}\Gamma(m-2)\mathbf{A}^T + \mathbf{Q} \end{bmatrix} \mathbf{W}_X^H$$

其中, $\Gamma(m-2) = \mathbf{A}\mathbf{P}_1(2m-2)\mathbf{A}^T + \mathbf{Q}$

类似于式(27),

$$\mathbf{P}_{1,\gamma}^{-1}(m|m) = \mathbf{W}_X \begin{bmatrix} \Omega(2m-2) & -\mathbf{A}^T\mathbf{Q}^{-1} \\ -\mathbf{A}\mathbf{Q}^{-1} & \mathbf{Q}^{-1} + \mathbf{C}^T\mathbf{R}^{-1}\mathbf{C} \end{bmatrix} \mathbf{W}_X^H$$

其中, $\Omega(2m-2) = [\mathbf{A}\mathbf{P}_1(2m-2)\mathbf{A}^T + \mathbf{Q}]^{-1} + \mathbf{A}^T\mathbf{Q}^{-1}\mathbf{A} + \mathbf{C}^T\mathbf{R}^{-1}\mathbf{C}$

则由式(25)

$$\begin{aligned} \mathbf{P}_{1,x}(m|m) &= \mathbf{W}_X^H \mathbf{P}_{1,\gamma}(m|m) \mathbf{W}_X \\ &= \begin{bmatrix} \mathbf{P}_{1,x,11}(m|m) & \mathbf{P}_{1,x,12}(m|m) \\ \mathbf{P}_{1,x,21}(m|m) & \mathbf{P}_{1,x,22}(m|m) \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (29)$$

式(29)各块的表达式分别为

$$\begin{aligned} \mathbf{P}_{1,x,11}(m|m) &= \Delta^{-1} \\ \mathbf{P}_{1,x,12}(m|m) &= \Delta^{-1}\mathbf{A}^T\mathbf{Q}^{-1}(\mathbf{Q}^{-1} + \mathbf{C}^T\mathbf{R}^{-1}\mathbf{C})^{-1} \\ \mathbf{P}_{1,x,21}(m|m) &= \mathbf{P}_{1,x,12}^T(m|m) \\ \mathbf{P}_{1,x,22}(m|m) &= (\mathbf{Q}^{-1} + \mathbf{C}^T\mathbf{R}^{-1}\mathbf{C})^{-1}\mathbf{Q}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{A}^{-1} \\ &\quad \cdot \mathbf{A}^T\mathbf{Q}^{-1}(\mathbf{Q}^{-1} + \mathbf{C}^T\mathbf{R}^{-1}\mathbf{C})^{-1} \\ &\quad + (\mathbf{Q}^{-1} + \mathbf{C}^T\mathbf{R}^{-1}\mathbf{C})^{-1} \end{aligned} \quad (30)$$

其中

$$\begin{aligned} \Delta &= [\mathbf{A}\mathbf{P}_1(2m-2)\mathbf{A}^T + \mathbf{Q}]^{-1} + \mathbf{A}^T\mathbf{Q}^{-1}\mathbf{A} \\ &\quad + \mathbf{C}^T\mathbf{R}^{-1}\mathbf{C} - \mathbf{A}^T\mathbf{Q}^{-1}(\mathbf{Q}^{-1} + \mathbf{C}^T\mathbf{R}^{-1}\mathbf{C})^{-1}\mathbf{Q}^{-1}\mathbf{A} \end{aligned}$$

由式(28)和(30)

$$\begin{aligned} \mathbf{P}_{1,x,11}^{-1}(m|m) &= \Delta \\ &= \mathbf{P}^{-1}(2m-1|2m-1) + \mathbf{A}^T[\mathbf{Q} + (\mathbf{C}^T\mathbf{R}^{-1}\mathbf{C})^{-1}]^{-1}\mathbf{A} \end{aligned}$$

则

$$\begin{aligned} \mathbf{P}_{1,x,11}^{-1}(m|m) - \mathbf{P}^{-1}(2m-1|2m-1) \\ &= \mathbf{A}^T[\mathbf{Q} + (\mathbf{C}^T\mathbf{R}^{-1}\mathbf{C})^{-1}]^{-1}\mathbf{A} > 0 \end{aligned}$$

因此有

$$\mathbf{P}_{1,x,11}(m|m) < \mathbf{P}(2m-1|2m-1) \quad (32)$$

同样,由式(28)和(31)得

$$\begin{aligned} \mathbf{P}_{1,x,22}^{-1}(m|m) &= \mathbf{Q}^{-1} + \mathbf{C}^T\mathbf{R}^{-1}\mathbf{C} - \mathbf{Q}^{-1}\mathbf{A} \\ &\quad \{[\mathbf{A}\mathbf{P}_1(m-1,2)\mathbf{A}^T + \mathbf{Q}]^{-1} + \mathbf{A}^T\mathbf{Q}^{-1}\mathbf{A} + \mathbf{C}^T\mathbf{R}^{-1}\mathbf{C}\}^{-1} \\ \mathbf{A}^T\mathbf{Q}^{-1} &= \mathbf{P}^{-1}(2m|2m), \text{ 即:} \\ \mathbf{P}_{1,x,22}(m|m) &= \mathbf{P}(2m|2m) \end{aligned} \quad (33)$$

又由于 $\mathbf{P}_{1,x,11}(m|m)$ 和 $\mathbf{P}_{1,x,22}(m|m)$ 分别对应 $\mathbf{x}(2m-1)$ 和 $\mathbf{x}(2m)$, 可知有 $\mathbf{P}_1(k) \leq \mathbf{P}_0(k)$ 成立. 当 $N=2, 3, \dots$ 时, 块状态 $\mathbf{X}_N(m)$ 对应的原状态为

$$\begin{aligned} &[\mathbf{x}^T(2^N(m-1)+1), \mathbf{x}^T(2^N(m-1)+2), \dots, \mathbf{x}^T(2^Nm)]^T, \\ \text{而 } \mathbf{X}_{N-1}(2m-1) \text{ 对应的原状态是} \\ &[\mathbf{x}^T(2^N(m-1)+1), \mathbf{x}^T(2^N(m-1)+2), \dots, \mathbf{x}^T(2^Nm-2^{N-1})]^T, \\ \text{则 } \mathbf{X}_{N-1}(2m) \text{ 对应的原状态是} \\ &[\mathbf{x}^T(2^Nm-2^{N-1}+1), \mathbf{x}^T(2^Nm-2^{N-1}+2), \dots, \mathbf{x}^T(2^Nm)]^T. \end{aligned}$$

$$\text{因此有 } \mathbf{X}_N(m) = \begin{bmatrix} \mathbf{X}_{N-1}(2m-1) \\ \mathbf{X}_{N-1}(2m) \end{bmatrix}.$$

类似步骤,可证明

$$\mathbf{P}_{N,x,11}(2m-1|2m-1) < \mathbf{P}_{N-1,x}(2m-1|2m-1) \quad (34)$$

$$\mathbf{P}_{N,x,22}(2m-1|2m-1) = \mathbf{P}_{N-1,x}(2m|2m) \quad (35)$$

根据式(33)和(34)可知 $\mathbf{P}_N(k) \leq \mathbf{P}_{N-1}(k)$, $k = 2^N(m-1)+1, 2^N(m-1)+2, \dots, 2^Nm$ 成立.

定理 1 对于每块长度为 $M(N) = 2^N$ 的系统,由多尺度约束滤波算法得到的关于原状态的估计误差协方差记为 $\bar{\mathbf{P}}_N(x(k))$, 卡尔曼约束滤波的估计误差协方差记为 $\bar{\mathbf{P}}(k|k)$, 则有 $\bar{\mathbf{P}}_N(x(k)) \leq \bar{\mathbf{P}}(k|k)$ 成立.

证明 由于卡尔曼约束滤波的结果等于不分块时的多尺度滤波结果, 即有 $\bar{\mathbf{P}}_0(x(k)) = \bar{\mathbf{P}}(k|k)$, 根据引理 3 可知有 $\bar{\mathbf{P}}_N(x(k)) \leq \bar{\mathbf{P}}_0(x(k))$ 成立.

由式(17), 可知多尺度约束滤波的估计误差协方差为

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{P}}_N(x(m|m)) &= \mathbf{W}_X^T \mathbf{P}_{\gamma_1}(m|m) \mathbf{W}_X \\ &= [\mathbf{I}_M - \bar{\mathbf{D}}^T(\bar{\mathbf{D}}\bar{\mathbf{D}}^T)^{-1}\bar{\mathbf{D}}] \mathbf{P}_N(m|m) [\mathbf{I}_M - \bar{\mathbf{D}}^T(\bar{\mathbf{D}}\bar{\mathbf{D}}^T)^{-1}\bar{\mathbf{D}}]^T \end{aligned}$$

分析可知, 对 m 内的每个元素 $\mathbf{x}(k)$, $k = 2^N(m-1)+1, 2^N(m-1)+2, \dots, 2^Nm$, 由多尺度滤波算法得到结果的估计误差协方差为

$$\bar{\mathbf{P}}_N(x(k)) = [\mathbf{I}_1 - \bar{\mathbf{D}}^T(\bar{\mathbf{D}}\bar{\mathbf{D}}^T)^{-1}\bar{\mathbf{D}}] \mathbf{P}_{N,x}(k) [\mathbf{I}_1 - \bar{\mathbf{D}}^T(\bar{\mathbf{D}}\bar{\mathbf{D}}^T)^{-1}\bar{\mathbf{D}}]^T$$

卡尔曼滤波约束的结果为:

$$\bar{\mathbf{P}}_0(x(k)) = [\mathbf{I}_1 - \bar{\mathbf{D}}^T(\bar{\mathbf{D}}\bar{\mathbf{D}}^T)^{-1}\bar{\mathbf{D}}] \mathbf{P}_{0,x}(k) [\mathbf{I}_1 - \bar{\mathbf{D}}^T(\bar{\mathbf{D}}\bar{\mathbf{D}}^T)^{-1}\bar{\mathbf{D}}]^T$$

所以有:

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{P}}_N(x(k)) - \bar{\mathbf{P}}_0(x(k)) \\ &= [\mathbf{I}_1 - \bar{\mathbf{D}}^T(\bar{\mathbf{D}}\bar{\mathbf{D}}^T)^{-1}\bar{\mathbf{D}}] [\mathbf{P}_{N,x}(k) - \mathbf{P}_{0,x}(k)] [\mathbf{I}_1 - \bar{\mathbf{D}}^T(\bar{\mathbf{D}}\bar{\mathbf{D}}^T)^{-1}\bar{\mathbf{D}}]^T \leq 0, \text{ 即:} \end{aligned}$$

$$\bar{\mathbf{P}}_N(x(k)) \leq \bar{\mathbf{P}}_0(x(k))$$

定理 2 多尺度约束滤波算法的估计误差协方差的迹小于不考虑约束时卡尔曼滤波估计误差协方差的迹.

证明 根据定理 1, 有 $\text{tr}(\bar{\mathbf{P}}_N(x(k))) \leq \text{tr}(\bar{\mathbf{P}}_0(x(k)))$, 结合引理 2, 命题得证.

5 计算机仿真结果

本节考虑一类加速直线运动系统, 状态 $\mathbf{x} = [\mathbf{x}_1 \quad \mathbf{x}_2 \quad \mathbf{x}_3]^T$ 的三个元素分别表示位移、速度和加速度. 在相同初始条件下, 将基于多尺度约束滤波算法、卡尔曼滤波约束算法以及未考虑约束条件下的经典卡尔曼滤波算法所得的仿真结果进行比较. 仿真中动态系统的各个参数为:

$$\begin{aligned} \mathbf{A}(k) &= \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \mathbf{H}(k) = \begin{bmatrix} 0.8 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.9 \end{bmatrix}, \\ \mathbf{Q}(k) &= \begin{bmatrix} 0.1 & 0 & 0 \\ 0 & 0.3 & 0 \\ 0 & 0 & 0.1 \end{bmatrix}, \mathbf{R}(k) = \begin{bmatrix} 0.2 & 0 \\ 0 & 0.1 \end{bmatrix}, \end{aligned}$$

$D = [1 \ 0.3 \ 0.2]$, $d = 1$, 利用二进制的 Haar 小波变换, 以 $M = 2^2$ 对系统进行分块.

多尺度约束滤波算法、约束卡尔曼滤波算法以及经典卡尔曼滤波算法所得结果的估计误差方差均显示在图 1 中, 用来比较三种算法的估计精度. 左上图、右上图和左下图分别表示位移的估计误差方差、速度的估计误差方差以及加速度的估计误差方差, 右下图表示三种估计误差方差的和, 也就是估计误差协方差的迹.

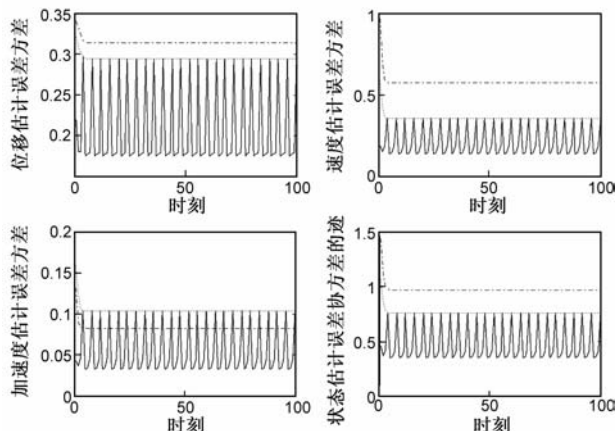


图 1 三种不同方法所得结果的估计精度比较

在图 1 中, 实线表示多尺度约束滤波的估计结果, 虚线表示约束卡尔曼滤波算法, 点划线表示经典卡尔曼滤波的估计结果. 从上面两幅图和右下图可以看出多尺度约束滤波算法优于卡尔曼约束滤波算法, 验证了定理 1; 虽然在前三幅图中多尺度约束滤波算法和卡尔曼滤波算法互有优劣, 但右下图表明了多尺度滤波算法的估计误差协方差的迹却小于不考虑约束条件的卡尔曼滤波算法, 验证了定理 2.

6 结论

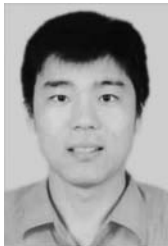
本文用多尺度分析的方法研究了一类状态受到等式约束的动态系统, 通过对原系统的分块及小波变换, 利用分块后的测量对小波系数进行滤波, 得到了最终的估计结果, 理论证明了多尺度约束滤波算法优于已有的卡尔曼约束滤波算法. 计算机仿真比较了三类算法的估计结果, 可看出尽管对系统单个元素的估计各有优劣, 但在迹最小的准则下, 多尺度约束滤波算法最优, 其次是卡尔曼约束滤波算法, 最差的是经典的卡尔曼滤波算法. 本文给出的是约束条件由等式描述的多尺度滤波方法, 而由不等式描述约束条件的动态系统的多尺度滤波是接下来要解决的问题.

参考文献

- [1] D O Anderson, J B Moore. Optimal Filtering[M]. Englewood Cliffs, NJ: Prentice-Hall, 1979.
- [2] J D Geete, H V Brussel. A smoothly constrained Kalman filter [J]. IEEE Trans, 1997, PAM-19(10): 1171 - 1177.

- [3] D Massicotte, R Z Morawski, A Barwicz. Incorporation of a positivity constraint into a Kalman-Filter-based algorithm for correction of spectrometric data [J]. IEEE Trans, 1995, IM-44(1): 2 - 7.
- [4] W Wen, H F Durrant-Whyte. Model-based multi-sensor data fusion [A]. Robotics and Automation, 1992 [C]. Nice, France: IEEE, 1992. 1720 - 1726.
- [5] S D Hayward. Constrained Kalman Filter for Least-squares Estimation of Time-Varying Beamforming Weights. In Mathematics in Signal Processing IV [M]. New York: Oxford University, 1998.
- [6] T L Chia, D Simon, et al. Kalman filtering with statistical state constraints [J]. Control and Intelligent systems, 2006, 34(1): 73 - 79.
- [7] O S Teixeira, J Chandrasekar, et al. State estimation for linear and non-linear equality-constrained systems [J]. International Journal of Control, 2009, 82(5): 918 - 936.
- [8] R J Hewett, M T Heath, et al. A robust null space method for linear equality constrained state estimation [J]. IEEE Trans, 2010, AC-58(8): 3961 - 3971.
- [9] 文成林, 文传博, 陈志国. 动态系统基于时域与频域相结合的多尺度联合滤波器, 电子学报, 2006, 34(11): 26 - 30, Wen Chenglin, Wen Chuanbo, Chen Zhiguo. A multiscale associated filter combining temporal domain with frequency domain for dynamic system [J]. Acta Electronica Sinica. 2006, 34(11): 26 - 30. (in Chinese)
- [10] D Simno, T L Chia. Kalman filtering with state equality constraints [J]. IEEE Trans, 2002, AES-38(1): 128 - 135.

作者简介



文传博 男, 1981 年生于河南开封, 现为上海电机学院讲师, 上海交通大学自动化系在读博士研究生, 研究方向为复杂环境下的数据融合、约束滤波.

E-mail: chuanbowen@163.com



王致杰 男, 1964 生于山东潍坊, 博士(后), 教授, 2007 年中国矿业大学电气工程博士后流动站出站, 主要研究方向为: 太阳能逆变并网技术、变频驱动控制技术与大型设备的故障诊断.

E-mail: wangzj@sdju.edu.cn

焦斌 男, 1958 生于上海市, 博士、教授, 从事自动控制、智能优化、智能控制、电力电子、电力传动等方面的研究.

E-mail: jiaob@sdju.edu.cn