

# 基于离散分数阶正交小波变换图像降噪新方法

徐小军<sup>1,2</sup>, 王友仁<sup>1</sup>

(1. 南京航空航天大学自动化学院, 江苏南京 210016; 2. 淮南师范学院电气信息工程学院, 安徽淮南 232001)

**摘 要:** 分数阶小波变换是小波变换时间-频域的分析方法在时间-分数阶频率域的推广, 在时间和分数阶频率域具有表征信号特征的能力. 本文在离散分数阶正交小波变换(DFRWT)多分辨率分析(MRA)理论上, 推导出DFRWT系数分解及重构新形式并作二维扩展. 根据图像DFRWT子带系数能量随不同阶数 $p$ 变化的特点, 提出基于DFRWT阈值降噪新方法. 该方法在保持子带低频能量为绝对大值条件下, 适当提高子带高频能量值, 更利于抑制图像噪声. 实验结果表明, 与传统小波阈值降噪方法相比, 该方法主观质量得到了明显增强, 提高了峰值信噪比.

**关键词:** 分数阶小波变换; 小波变换; 多分辨率分析; 图像降噪

**中图分类号:** TN911.72      **文献标识码:** A      **文章编号:** 0372-2112 (2014)02-0280-08

**电子学报 URL:** <http://www.ejournal.org.cn>

**DOI:** 10.3969/j.issn.0372-2112.2014.02.011

## Novel Image Denoising Method Based on Discrete Fractional Orthogonal Wavelet Transform

XU Xiao-jun<sup>1,2</sup>, WANG You-ren<sup>1</sup>

(1. College of Automation Engineering, Nanjing University of Aeronautics and Astronautics, Nanjing, Jiangsu 210016, China;

2. Department of Electrical and Information Engineering, Huainan Normal College, Huainan, Anhui 232001, China)

**Abstract:** The fractional wavelet transform extend the analysis method of wavelet transform about time-frequency domain to time-fractional frequency domain, can characterize signal features in time and fractional-frequency domain. Based on the theory of multiresolution analysis(MRA) of the fractional wavelet, the new forms about coefficient decomposition and reconstruction of discrete fractional wavelet transform(DFRWT) are given and made two-dimensional expansion. According to the feature of subband coefficient energy of image based on DFRWT varies with different  $p$  order, a novel image threshold denoising method based on DFRWT is proposed. The method in conditions of keeping the energy of low frequency subband for absolute great value, appropriate to raise the distribution of energy percentage, more beneficial for image noise suppression. The experimental results show that the performance of this method is better than the traditional wavelet threshold denoising method both in vision effect and peak signal to noise ratio.

**Key words:** fractional wavelet transform; wavelet transform; multiresolution analysis; image denoising

## 1 引言

小波变换(WT)是信号是时间-频率分析方法, 在时频域具有表征信号局部特征的能力, 广泛应用于信号处理诸多领域. 近年来出现了一种新的时频分析理论-分数阶小波变换(FRWT)<sup>[1]</sup>, 为上述领域问题的研究提供新的途径. 该理论将分数阶傅里叶变换(FRFT)理论与WT理论优点结合起来, 将传统的WT中对信号时间-频率的分析方法, 推广至时间-分数阶频率域(简称分数域), 使得在时间和分数域都具有表征信号特征的能力,

由于增加了分数阶频率概念<sup>[2]</sup>, 因此对信号处理更具有灵活性.

1997年Mendlovic和Zalevsky提出FRWT的定义形式<sup>[3]</sup>, 1998年Huang Ying提出了分数阶小波包变换的定义<sup>[4]</sup>, 这两种定义是对信号进行分数阶Fourier变换后的分数域谱作小波变换处理, 虽然得到一定形式的结果, 但结果并不具备时-分数域局部化特征, 目前在信号加密、去噪得到应用<sup>[5~7]</sup>. 2012年SHI Jun等人有别于上述定义和分数B样条小波理论<sup>[1]</sup>从时频分析的角度提出具有时-分数阶域局部化特征的新型FRWT, 导出FRWT

的基本性质,在时间-分数域的平面上,FRWT 提供可调的时-分数域分析窗口增加了处理信号的灵活性.在此基础上,SHI Jun 等人进一步发展了 FRWT 多分辨率分析(MRA)理论<sup>[8]</sup>,定义了 FRWT 尺度方程和小波方程,证明了构建分数阶正交小波基条件,为 DFRWT 应用研究提供理论基础.此外孟祥意等人将传统的两通道滤波器组理论扩展到分数阶傅里叶域,得出分数阶域滤波器的多抽样率实现结果,为研究 DFRWT 的 MRA 提供理论依据<sup>[9,10]</sup>.

本文在文献[1],文献[8]基础上,进一步研究了 DFRWT 应用实现,推导了 DFRWT 系数分解和重构一般过程,根据二维 DFRWT 系数能量分布特点,结合于传统的阈值降噪方法对图像进行降噪,来改善小波图像阈值降噪方法效果.

## 2 理论背景

### 2.1 FRWT 定义

采用一族分析宽度不断变化的基函数  $\psi_{p;a,b}(t)$  对信号  $f(t)$  进行分数阶卷积分析,得到  $p$  阶 FRWT 的表达式<sup>[1,11]</sup>:

$$\begin{aligned} W_{p,x}(\alpha, a, b) &= \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \psi_{p;a,b}^*(t) dt \\ &= e^{-i\frac{b^2}{2}\cot\alpha} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \cdot e^{i\frac{t^2}{2}\cot\alpha} \frac{1}{\sqrt{a}} \psi^*\left(\frac{t-b}{a}\right) dt \end{aligned} \quad (1)$$

此处,  $\psi_{p;a,b}(t) = \frac{1}{\sqrt{a}} e^{-i\frac{t^2-b^2}{2}\cot\alpha} \psi\left(\frac{t-b}{a}\right)$  为分数阶小波变换算子核,  $\alpha = p\pi/2$  分数域与时域的夹角,  $p$  为 FRFT 的阶次,按照 FRFT 与时频域对应关系,本文取  $p \in [0,1]$ .  $\psi(t)$  为 WT 母小波,  $a, b$  分别为尺度因子和时移因子.当  $p=1, \alpha = \pi/2$  时,  $\psi_{p;a,b}(t)$  退化成小波变换算子核  $\psi_{a,b}(t)$ ,  $W_{p,x}(\alpha, a, b)$  退化成小波变换表达式.观察式(1),对于  $p$  阶 FRWT,可分解为三步:

(1)对信号  $f(t)$  乘以调频率为  $\cot\alpha$  的 chip 调制信号,令  $f_\alpha(t) = f(t) e^{i\frac{t^2}{2}\cot\alpha}$ .

(2)对  $f_\alpha(t)$  在作 WT,  $WT_{f_\alpha}(a, b) = \int_{-\infty}^{\infty} f_\alpha(t) \frac{1}{\sqrt{a}} \psi^*\left(\frac{t-b}{a}\right) dt$ .

(3)对得到的小波变换系数中的时移变量作相位调制,即:

$$W_{p,x}(\alpha, a, b) = WT_{f_\alpha}(a, b) e^{-i\frac{b^2}{2}\cot\alpha}$$

FRWT 逆变换及容许性条件,设  $\Psi(\omega)$  是母小波  $\psi(t)$  的 FT,若  $C_\psi = \int \frac{|\Psi(\omega)|^2}{|\omega|} d\omega < \infty$ ,则

$$f(t) = \frac{1}{2\pi C_\psi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} W_{p,x}(\alpha, a, b) \psi_{p;a,b}(t) \frac{da}{a^2} db \quad (2)$$

### 2.2 分数阶小波域函数空间

文献[8]为研究 FRWT 的 MRA 过程,定义了由分数阶尺度函数  $\varphi_{p;j,k}(t)$  组成的一系列子空间逼近序列

$$\begin{aligned} V_j^\alpha &= \text{span}\{\varphi_{p;j,k}(t) \mid \varphi_{p;j,k}(t) = e^{-i(\frac{t^2}{2} - \frac{1}{2}(k2^j)^2)\cot\alpha} \\ &\quad \cdot \varphi_{j,k}(t), j, k \in \mathbb{Z}\}, \end{aligned}$$

且  $V_j^\alpha \subset V_{j-1}^\alpha$ . 以及分数阶小波函数  $\psi_{p;j,k}(t)$ ,  $\psi_{p;j,k}(t)$  随  $j, k$  变化得到一个尺度和位移均可变化的函数集合  $\{\psi_{p;j,k}(t)\}$ , 每一固定尺度  $j$  上的平移系列  $\psi_{p;k}(2^{-j}t)$  所张成的空间  $W_j^\alpha$  为尺度为  $j$  的空间

$$\begin{aligned} W_j^\alpha &= \text{span}\{\psi_{p;j,k}(t) \mid \psi_{p;j,k}(t) = e^{-i(\frac{t^2}{2} - \frac{1}{2}(k2^j)^2)\cot\alpha} \\ &\quad \cdot \psi_{j,k}(t), j, k \in \mathbb{Z}\} \end{aligned}$$

$\varphi_{j,k}(t)$ 、 $\psi_{j,k}(t)$  为小波域尺度函数和小波函数.

文献[8]详细分析了  $\varphi_{p;j,k}(t)$ 、 $\psi_{p;j,k}(t)$  构成  $V^\alpha, W^\alpha$  空间的标准正交基的条件,在符合条件下有:

$$\begin{aligned} \langle \varphi_{p;j,k}, \varphi_{p;j,m} \rangle &= e^{i\frac{(k2^j)^2 - (m2^j)^2}{2}\cot\alpha} \langle \varphi_{j,k}(t), \varphi_{j,m}(t) \rangle \\ &= \delta_{k,m} \end{aligned} \quad (3)$$

$$\begin{aligned} \langle \psi_{p;j,k}, \psi_{p;l,m} \rangle &= \int_R e^{-i\frac{t^2 - (k2^j)^2}{2}\cot\alpha} \psi_{j,k} \\ &\quad \cdot (e^{-i\frac{t^2 - (m2^l)^2}{2}\cot\alpha} \psi_{l,m})^* dt = \delta_j, l \delta_{k,m} \end{aligned} \quad (4)$$

$$\begin{aligned} \langle \psi_{p;j,k}, \varphi_{p;j,m} \rangle &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\frac{t^2 - (k2^j)^2}{2}\cot\alpha} \psi_{j,k} \\ &\quad \cdot (e^{-i\frac{t^2 - (m2^j)^2}{2}\cot\alpha} \varphi_{j,m})^* dt = 0 \end{aligned} \quad (5)$$

说明分数阶小波函数  $\psi_{p;j,k}(t)$  对所有  $j, k \in \mathbb{Z}$  都是相互正交的,即  $\{\psi_{p;j,k}^j\}_{j \in \mathbb{Z}}$  构成了  $L^2(R)$  空间的一系列正交子空间.文献[8]给出  $W_j^\alpha \perp V_j^\alpha$ , 且  $V_{j-1}^\alpha = W_j^\alpha \oplus V_j^\alpha$  的详细证明.本文研究工作是在文献[8]建立 FRWT 的 MRA 框架上进行的.

### 2.3 DFRWT 级数表现形式

设  $f_j(t)$ 、 $D_j(t)$  为  $f(t)$  在  $V_j^\alpha, W_j^\alpha$  中的投影,  $c_k^j, d_k^j$  为其展开系数,由基函数  $\{\varphi_{p;j,k}\}$ 、 $\{\psi_{p;j,k}\}$  正交性可得

$$\begin{aligned} f_j(t) &= \sum_{k \in \mathbb{Z}} \langle f(t), \varphi_{p;j,k} \rangle \varphi_{p;j,k} \\ D_j(t) &= \sum_{k \in \mathbb{Z}} \langle f(t), \psi_{p;j,k} \rangle \psi_{p;j,k} \end{aligned} \quad (6)$$

$$\begin{aligned} c_k^j &= \langle f(t), \varphi_{p;j,k}(t) \rangle \\ &= e^{-i\frac{1}{2}(k2^j)^2\cot\alpha} \langle f_\alpha(t), \varphi_{j,k}(t) \rangle = e^{-i\frac{1}{2}(k2^j)^2\cot\alpha} \cdot c_k^j \end{aligned} \quad (7)$$

$$\begin{aligned} \text{同理 } d_k^j &= \langle f(t), \psi_{p;j,k}(t) \rangle = e^{-i\frac{1}{2}(k2^j)^2\cot\alpha} d_k^j \end{aligned} \quad (8)$$

$c_k^j, d_k^j$  为小波域  $j$  尺度下  $f_\alpha(t)$  近似系数和小波系数.在 MRA 确定的 DFRWT 分解关系的框架下,  $L^2(R)$

$= \bigoplus W_{j \in z}^{\alpha}, f(t) \in L^2(R)$  表示为分数阶正交小波级数:

$$f(t) = \sum_{j=-\infty}^J \sum_{k=-\infty}^{\infty} d_k^j \psi_{p;j,k}(t) + \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k^j \varphi_{p;J,k}(t) \quad (9)$$

当  $J \rightarrow \infty$  时, 上式变为

$$f(t) = \sum_{j,k \in z} d_k^j \psi_{p;j,k}(t) \quad (10)$$

可见, FRWT 的 MRA 由  $\varphi_{p;j,k}(t)$  生成, 并通过  $V_{j+1}^{\alpha} = W_j^{\alpha} \oplus V_j^{\alpha}$  确立了子空间的直和分解关系:  $L^2(R) = \bigoplus_{j \in z} W_j^{\alpha}$ . FRWT 的 MRA 可理解为将信号  $f(t) \in L^2(R)$  在分数域划分成各子频带的直和, 将时域信号分解为代表分数阶频域子频段特点的时域分量之和的过程, 是关于分数频域局部化功能的表现形式.

### 3 DFRWT 系数分解与重构

#### 3.1 DFRWT 的分解

设  $\{\varphi_p(t)\}, \{\psi_p(t)\}$  是上述空间标准正交基, 对已知系数  $\{c_n^j\}$  求得  $\{c_k^{j+1}\}$  和  $\{d_k^{j+1}\}$ . 将  $f(t)$  向各空间的正交投影可得:

$$\begin{aligned} c_k^{j+1} &= \langle f(t), \varphi_{p;j+1,k}(t) \rangle = \langle f_j(t), \varphi_{p;j+1,k}(t) \rangle \\ &= \sum_{n \in z} c_n^j \langle \varphi_{p;j,n}(t), \varphi_{p;j+1,k}(t) \rangle \\ &= e^{-i\frac{1}{2}((2k) \cdot 2^j)^2 \cot \alpha} \sum_{n \in z} c_n^j \cdot h_0(n-2k) \\ &= e^{-i\frac{1}{2}((2k) \cdot 2^j)^2 \cot \alpha} \cdot c_k^j \end{aligned} \quad (11)$$

同理可得:

$$\begin{aligned} d_k^{j+1} &= e^{-i\frac{1}{2}((2k) \cdot 2^j)^2 \cot \alpha} \sum_{n \in z} c_n^j \cdot h_1(n-2k) \\ &= e^{-i\frac{1}{2}((2k) \cdot 2^j)^2 \cot \alpha} \cdot d_k^j \end{aligned} \quad (12)$$

式中  $h_0(n), h_1(n)$  为 DWT 理论中分解滤波器组低频和 高频系数. 式(11)、(12)表明将第  $j$  层分数阶小波近似系数  $c_n^j$  进行调制得到  $c_n^j$ , 再进行 DWT, 对得到分解系数  $c_k^{j+1}, d_k^{j+1}$  进行相位调制得到第  $j+1$  层分解系数  $c_k^{j+1}, d_k^{j+1}$ . 可见分解至每层的系数是复数形式.

#### 3.2 DFRWT 的重构

DFRWT 重构是分解算法的逆过程, 由第  $j+1$  层系数  $\{c_n^{j+1}\}_{n \in z}$  和  $\{d_n^{j+1}\}_{n \in z}$  来重构得到原始数据  $\{c_k^0\}$ . 由函数空间投影关系  $f_j(t) = f_{j+1}(t) + D_{j+1}(t)$  可得:

$$\begin{aligned} c_k^j &= c_k^j \cdot e^{-i\frac{1}{2}(k2^j)^2 \cot \alpha} \\ &= \langle f_{j+1}(t), \varphi_{p;j,k}(t) \rangle + \langle D_{j+1}(t), \psi_{p;j,k}(t) \rangle \\ &= e^{-i\frac{1}{2}(k2^j)^2 \cot \alpha} \left( \sum_{n \in z} c_n^{j+1} \cdot e^{i\frac{1}{2}(n2^{j+1})^2 \cot \alpha} \langle \varphi_{p;j+1,n}(t), \varphi_{p;j,k}(t) \rangle \right) \\ &\quad + \sum_{n \in z} d_n^{j+1} \cdot e^{i\frac{1}{2}(n2^{j+1})^2 \cot \alpha} \langle \psi_{p;j+1,n}(t), \varphi_{p;j,k}(t) \rangle \end{aligned} \quad (13)$$

$$\text{则: } c_k^j = \sum_{n \in z} c_n^{j+1} \cdot g_0(k-2n) + \sum_{n \in z} d_n^{j+1} \cdot g_1(k-2n) \quad (14)$$

其中  $g_0(k) = \langle \varphi_{p;j+1,0}(t), \varphi_{p;j,k}(t) \rangle = -h_0(N-1-k)$ ,

$g_1(k) = \langle \psi_{p;j+1,0}(t), \varphi_{p;j,k}(t) \rangle = (-1)^{k+1} h_0(k)$ , 式(14)为 DWT 系数重构过程, 结合式(13), 首先将  $j+1$  层系数  $c_n^{j+1}$  和  $d_n^{j+1}$  进行调制, 再进行一维 IDWT 得到  $c_k^j$ , 将  $c_k^j$  调制至分数阶小波域得  $c_k^j$ , 由此逐级恢复至原始数据  $\{c_k^0\}$ , 实现对信号的重构. 其流程如图 2 所示.

结合文献[12], 图 1、图 2 为分数阶卷积分解结构图的表现形式, 表明 DFRWT 实现过程是在不同尺度下分数阶卷积过程.



图1 一维DFRWT系数分解示意图

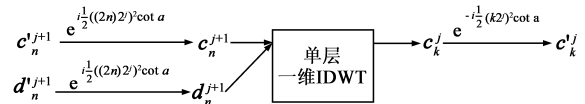


图2 一维DFRWT系数重构示意图

#### 3.3 二维 DFRWT 分析

在一维连续 FRWT 表达式基础上对其进行二维扩展: 设  $f(x, y) \in L^2(R^2)$ , 称

$$W_{p_1, p_2; x, y}(a, b_1, b_2) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) \psi_{p_1, p_2; a, b_1, b_2}^*(x, y) dx dy \quad (15)$$

为二维连续 FRWT. 取  $\psi_{p_1, p_2; a, b_1, b_2}(x, y)$  为可分离的二元函数<sup>[14]</sup>:

$$\psi_{p_1, p_2; a, b_1, b_2}(x, y) = \psi_{p_1; a, b_1}(x) \psi_{p_2; a, b_2}(y) \quad (16)$$

式(15)变为

$$\begin{aligned} W_{p_1, p_2; x, y}(a, b_1, b_2) &= e^{-i\frac{1}{2}(b_1^2 \cot \alpha_1 + b_2^2 \cot \alpha_2)} \\ &\quad \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) e^{i\frac{1}{2}(x^2 \cot \alpha_1 + y^2 \cot \alpha_2)} \\ &\quad \cdot \frac{1}{a} \psi^* \left( \frac{t-b_1}{a} \right) \psi^* \left( \frac{t-b_2}{a} \right) dx dy \end{aligned} \quad (17)$$

式中  $\alpha_1 = p_1\pi/2, \alpha_2 = p_2\pi/2$ , 为二维分数域与时域的夹角<sup>[13]</sup>,  $p_1, p_2$  为二维 FRWT 的阶次,  $a, b_1, b_2$  分别为尺度因子和时移因子. 当  $p_1 = p_2 = 1, \alpha_1 = \alpha_2 = \pi/2$  时,  $W_{p_1, p_2; x, y}(\alpha_1, \alpha_2; a, b)$  退化成传统二维小波变换表达式.

设  $\{V_j^{\alpha}\}_{j \in z}$  是由  $\varphi_p(x)$  生成的  $L^2(R)$  的 MRA<sup>[14]</sup>, 则  $V_j^{\alpha_1}$  与  $V_j^{\alpha_2}$  的张量积为  $V_j^{\alpha_1} \otimes V_j^{\alpha_2}, j \in z$ , 构成  $L^2(R^2)$  上一个 MRA, 通过  $V_j^{\alpha_1} \oplus W_j^{\alpha_1} = V_{j-1}^{\alpha_1}$  及  $V_j^{\alpha_2} \oplus W_j^{\alpha_2} = V_{j-1}^{\alpha_2}$  关系, 可得:

$$\begin{aligned} V_{j-1}^{\alpha_1} \otimes V_{j-1}^{\alpha_2} &= (V_j^{\alpha_1} \oplus W_j^{\alpha_1}) \otimes (V_j^{\alpha_2} \oplus W_j^{\alpha_2}) \\ &= (V_j^{\alpha_1} \otimes V_j^{\alpha_2}) \oplus (V_j^{\alpha_1} \otimes W_j^{\alpha_2}) \\ &\quad \oplus (W_j^{\alpha_1} \otimes V_j^{\alpha_2}) \oplus (W_j^{\alpha_1} \otimes W_j^{\alpha_2}) \\ &= V_j^{\alpha_1} \otimes V_j^{\alpha_2} \end{aligned} \quad (18)$$

$V_j^2$  即  $V_j^1 \otimes V_j^2$  的规范正交基由  $\{\varphi_{p_1;j,k_1}(x) \varphi_{p_2;j,k_2}(y), k_1, k_2 \in z\}$  (分数域低频) 构成, 在该尺度上对  $f(x, y) \in L^2(R^2)$  作 MRA 展开. 二维分数阶小波空间  $W_j^2$  由  $V_j^1 \otimes W_j^2, W_j^1 \otimes V_j^2, W_j^1 \otimes W_j^2$  三个空间正交和组成, 其基函数分别为  $\varphi_{p_1;j,k_1}(x) \psi_{p_2;j,k_2}(y)$  (水平分数域高频),  $\psi_{p_1;j,k_1}(x) \varphi_{p_2;j,k_2}(y)$  (垂直分数域高频),  $\psi_{p_1;j,k_1}(x) \psi_{p_2;j,k_2}(y)$  (对角分数域高频). 对一维 DFRWT 进行二维扩展可得到二维 DFRWT 变换形式, 图(3)、(4)为变换出示意. 图中  $E_{n_1 n_2}^j$  表示对  $c_{n_1 n_2}^j$  进行  $e^{i\frac{1}{2}[(n_1 2^j)^2 \cot \alpha_1 + (n_2 2^j)^2 \cot \alpha_2]}$  调制过程,  $\bar{E}_{k_1 k_2}^{j+1}$  表示对  $d_{k_1 k_2}^{j+1}, \lambda_{k_1 k_2}^{j+1}, \beta_{k_1 k_2}^{j+1}$  进行  $e^{-i\frac{1}{2}[(2k_1 2^j)^2 \cot \alpha_1 + (2k_2 2^j)^2 \cot \alpha_2]}$  调制过程,  $|\cdot|$  表示求系数模. 为验证理论正确性, 在  $p \in [0, 1]$  随机取  $p_1 = 1, p_2 =$

$= 1; p_1 = 0.945, p_2 = 0.938; p_1 = 0.752, p_2 = 0.803$  三组值对图像进行一层 DFRWT 分解, 观察时间为  $[0, 1]$ , 当  $p_1 = 1, p_2 = 1$  时, 分析结果与二维 DWT 相一致(图 5).  $p_1 = 0.945, p_2 = 0.938$  时,  $p$  值在 1 附近, 受相位干涉的影响, 图像形成了明暗亮度变化的区域(图 6), 图像在时-分数域上的 MRA 分解结果接近于时-频域分析结果, 图像的局部细节有较好的反映. 当  $p_1 = 0.758, p_2 = 0.803$  时,  $p$  值离 1 较远, 受调频率  $\cot \alpha$  增大的影响, 图像信号整体像素点值经调制后幅度和相位发生较大变化(图 7), 各子带形成明显明暗变化的区域. 对分解后系数加以重构, 重构误差分别为  $2.6412e-010, 6.4071e-010, 7.3607e-010$ . 证明上述理论方法是有效的. 图 8 为  $p_1 = 0.758, p_2 = 0.803$  重构图与原始图的比较.

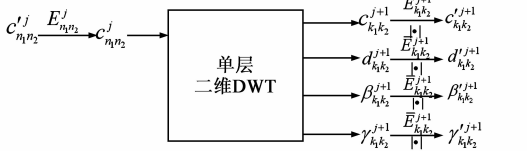


图3 二维DFRWT系数分解示意图

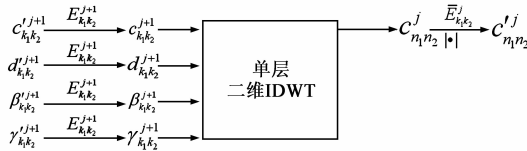


图4 二维DFRWT系数重构示意图

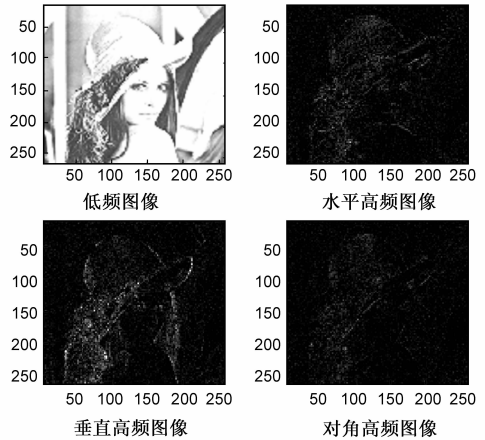


图5  $p_1=1, p_2=1$  图像的MRA

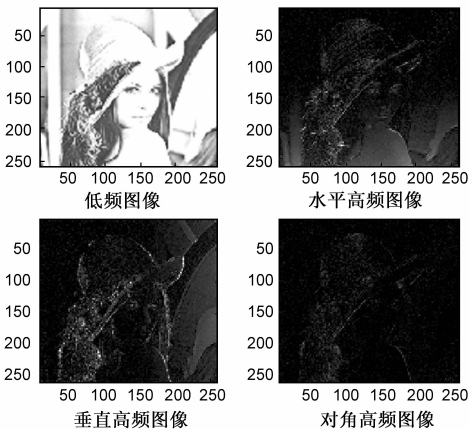


图6  $p_1=0.945, p_2=0.938$  图像MRA

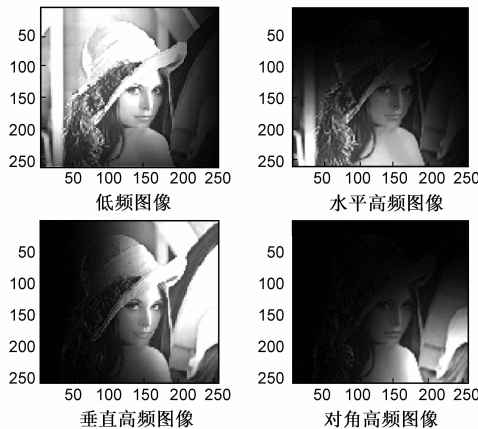


图7  $p_1=0.758, p_2=0.803$  图像的MRA

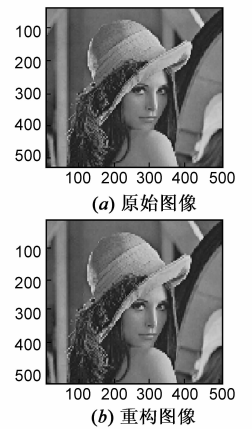


图8  $p_1=0.758, p_2=0.803$  图像重构图

#### 4 DFRWT 系数能量聚集分布特性

对自然图像作小波分解后, 图像的绝大部分能量集中在低频子带上, 高频子带上大部分点的数值都接近于零, 其主要能量集中在少数的显著系数上. 从仿真图看,

对图像进行 DFRWT 后, 低频分量和高频分量随  $p$  值变化而不同,  $p$  值在 1 附近时, 高频分量仍能保持稀疏性. 但  $p_1 = 0.758, p_2 = 0.803$  时, 分解后低频分量能量已不占绝对优势, 高频分量不再集中在少数系数上, 不具有能量聚集性. 此处从实例来解释能量聚集性变化过程, 分

别取  $p_1 = p_2 = 1, p_1 = p_2 = 0.900, p_1 = p_2 = 0.945$ , 对图像进行二层 DFRWT 分解, 由小波系数能量公式:

$$energy = \frac{1}{MN} \sum_i \sum_j |x(i, j)|^2 \quad (19)$$

$x(i, j)$  为 DFRWT 分解后各子带系数值,  $M$  和  $N$  表示图像的长和宽, 计算各自低频分量和高频分量能量所占百分比, 结果参见表 1. 从数据上看,  $p$  值较小(0.900)时, 高频分量所占百分比有所增大, 低频分量含量有所减小. 说明在一定  $p$  值范围内, 低频分量能量和高频分量能量随  $p$  值下降有反向变化的趋势. 配合表 1 观察图

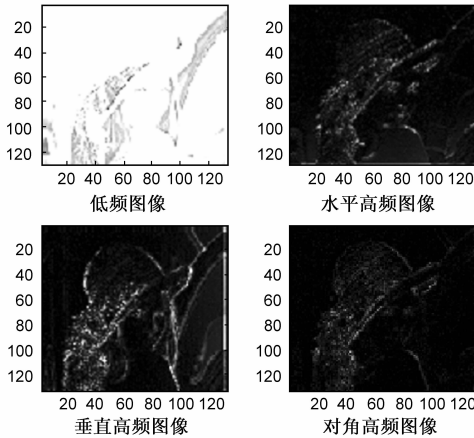


图9  $p_1=p_2=0.945$  图像第2层MRA

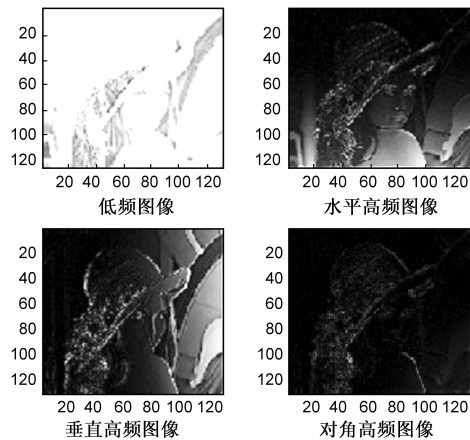


图10  $p_1=p_2=0.900$  图像第2层MRA

9、图 10, 尽管在  $p = 0.900$  时, 高频分量能量增加, 但高频子带系数稀疏性却不如  $p_1 = p_2 = 0.945$  情况.

由于二维 DFRWT  $p$  值为行列方向  $p_1, p_2$  任意值, 在低频能量占绝对量条件下, 如何来分析高频能量随  $p$  值变化的规律(简称  $p-w$ ). 本文方法如下, 首先以一定步长将  $p$  从 1 逐步下降某一确定值, 分别分析  $p = p_1 < p_2 \rightarrow 1, p = p_2 < p_1 \rightarrow 1, p_1 = p_2$  时能量百分比分布情况. 由于  $p = p_1 < p_2 \rightarrow 1, p = p_2 < p_1 \rightarrow 1$  要比  $p_1 = p_2 = p$  更接近于在时频面对图像的分析, 所得系数稀疏性要高些, 所以  $p_1 = p_2 = p$  要比  $p = p_1 < p_2 \rightarrow 1, p = p_2 < p_1 \rightarrow 1$  所占低频能量分量要低, 所占高频能量分量要高. 因此分析出  $p_1 = p_2$  时能量情况, 就得出能量随  $p$  值变化趋势. 图 11 分别统计了  $p = 1, 0.972, 0.955, 0.944$  时对 lena 图像进行二层分解后, 在  $p = p_1 < p_2 \rightarrow 1, p = p_2 < p_1 \rightarrow 1$  高低频能量分布曲线, 图中 A、B、C、D 点表示  $p_1 = p_2$  时能量百分值, 将多个  $p_1 = p_2$  点连起来(虚线所示)就可得到随  $p$  值变化的能量变化规律. 由图 11 可知, 在低频分量占绝对大值条件下, 低频能量随  $p$  值减小呈减少趋势, 高频能量呈上升趋势.

图 12 分别采用分数阶 db4 小波, 分数阶 coif3 小波对 lena ( $512 \times 512$ )、cameraman ( $256 \times 256$ )、barbara ( $512 \times 512$ )、pepper ( $256 \times 256$ ) 等自然图像在区间  $p \in [0.85, 1]$ , 以步长 0.01 变化进行二层 DFRWT, 得到的高低频能量分布图, 从分布图中可以看出, 在  $p \in [0.9, 1]$  区间内, 分解后的图像低频成分仍能保持绝对大值 ( $> 90%$ ), 高频分量保持较小量 ( $< 5%$ ), 但在区间之外, 低频分量有明显衰减, 高频分量值急剧增大, 说明在  $p < 0.9$  之外, 分解后高频系数值稀疏性明显降低.

表 1 统计了在区间  $[0.825, 1]$  中取部分  $p$  值, 采用分数阶 db4 小波对 lena 图像二层分解后细节部分和近似部分模系数均值及所占整图像能量比值.

由表 1, 在区间  $[0.925, 1]$ , 经过 DFRWT 分解后, 图像的绝大部分能量仍集中在  $LL_2$  低频部分, 高频子带系数能量随  $p$  值下降有所增加, 但仍集中在少数的显著系数上, 能量百分比比较小, 细节系数均值稍有增大, 说明系数幅值有所增加. 但随着  $p$  值进一步降低, 经 DFRWT

表 1 不同  $p$  值下 lena 图像高、低频系数均值及所占图像能量百分比

$(p_1, p_2)$	第 1 层分解细节系数均值			能量合计	第 2 层分解细节系数均值			能量合计	近似系数均值	能量合计
	LH1	HL1	HH1		LH2	HL2	HH2		LI2	
(1, 1)	2.5019	3.5088	1.9190	0.0855	6.1727	10.4142	5.1325	0.2517	498.9032	99.6628
(0.945, 0.945)	3.7385	4.9273	2.1248	0.1253	9.7480	14.7322	5.3628	0.3673	499.0703	99.5075
(0.925, 0.925)	6.5329	8.1653	2.2477	0.3157	15.7097	21.5768	5.5083	0.6734	498.4011	99.0109
(0.900, 0.900)	14.0760	16.8091	2.8179	1.5137	30.7901	38.7633	6.7373	2.1251	492.8112	96.3612
(0.885, 0.885)	21.0544	24.7680	3.8961	3.4450	43.8789	53.6701	8.8968	4.1168	483.3107	92.4382
(0.855, 0.855)	39.3434	45.6491	9.4678	12.0204	72.4700	86.4761	18.0328	10.4629	440.1519	77.5167
(0.825, 0.825)	58.5962	67.9718	21.3164	26.8828	88.2641	105.5058	29.7192	14.7705	365.2776	58.3467

分解后的图像能量均衡分布在第一、二层细节和近似部分,此时分解后的图像系数不具有稀疏性。

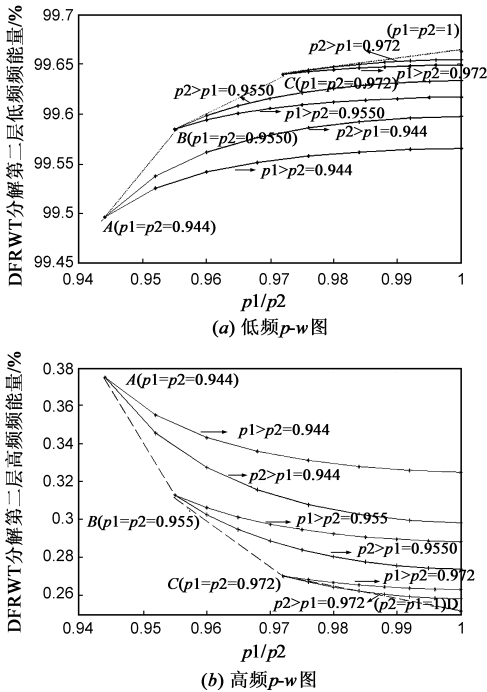


图11 lena图像DFRWT二层分解  $p$ - $w$  图

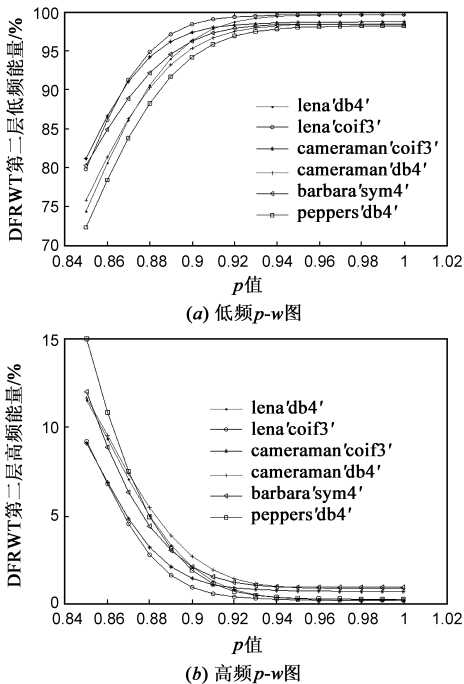


图12 自然图像DFRWT二层分解高、低频  $p$ - $w$  图

性、多分辨率特性、去相关性、选基灵活性以及良好的时频特性在图像去噪得到广泛应用.小波阈值去噪方法最早由 Donoho 提出 VisuShrink 方法,其基本原理对含噪信号  $f(t) = s(t) + n(t)$  ( $s(t)$  为原始信号,  $n(t)$  为 0 均值, 方差  $\sigma^2$  高斯白噪声) 进行小波变换, 对分解后的各层系数中, 对模大于和小于某阈值  $T$  的系数进行处理, 对处理后的小波系数再反变换重构出去噪信号  $\hat{s}(t)$ . 阈值函数一般有硬、软阈值方法, 经典的阈值估计方法有 Visushrink、SureShrink、BayesShrink 等方法<sup>[15,16]</sup>.

### 5.2 DFRWT 阈值降噪方法

小波阈值降噪方法是将大尺度低分辨率下的全部小波系数保留下来, 对高分辨率下的小波系数设定一个阈值, 将低于该阈值的小波系数尺度置零, 高于阈值者完全保留或适当收缩处理. 对分解后信号小波系数中, 原信号模值太高和太低的系数都容易取舍, 但处于中间值的细节系数与噪声差别不大, 很容易被当作噪声误滤除掉. 根据 DFRWT 变换后系数能量分布特性, 在确保细节分量能量聚集性前提下, 选择恰当的  $p$  值, 抬高细节分量的幅值, 在采用阈值算法时被当做噪声滤除掉可能性就小些.

本文以标准 Lena 图像 ( $512 \times 512$ ) 为例, 加入  $\sigma = 30, 50, 90$  不同强度高斯白噪声 (图 13), 以  $coif5$  小波进行 2 层 DFRWT, 在  $p \in [0.895, 1]$  取不同的  $p$  值通过全局 VisuShrink 阈值法、BayesShrink 阈值法进行图像降噪, 实验采用峰值信噪比 (PSNR) 作为评价指标.

表 2 记录了不同  $p$  值下降噪图像的 PSNR 值, 从结果来看 DFRWT 阈值去噪方法对较高  $\delta$  值含噪图像作用效果更明显些.  $\delta = 30$  时, 采用 DFRWT 去噪要比 DWT ( $p = 1$ ) 方法 PSNR 提高近 0.5db,  $\delta = 50$  时, 提高近 0.8db, 在  $\delta = 90$  时, 提高近 1.6db. 图 15 作出随  $p$  值变化的 PSNR 值的变化趋势图, 在  $p \in [0.905, 1]$  区间上, PSNR 值随  $p$  值减小有所增加且高于  $p = 1$  的 PSNR 值, 当  $p < 0.9$  后, PSNR 值均有下降的趋势, 这点与上述的子带能量变化趋势具有相关性.

实验中发现对  $\delta = 50, 90$  含噪图像在某一  $p$  值采用多次迭代降噪, 降噪结果要好于进行一次降噪的效果. 表 2 中记录了进行两次迭代的 PSNR 值, 其相应的趋势曲线如图 15 虚线所示.

图 15、图 16、图 17 为不同  $\delta$  值和方法下, 较高 PSNR 值对应降噪图与  $p = 1$  的降噪图的对比, 可见图像降噪效果要优于  $p = 1$  结果. 图 18 比较了  $\delta = 30$  时,  $p = 1, p = 0.925$  时降噪图像中帽子细节对比图, 相对于  $p = 1, p = 0.925$  帽沿边缘光滑, 弱化了毛刺现象, 帽子纹理也得到很好的保留, 表明 DFRWT 对伪吉普斯效应有一定抑制作用.

## 5 DFRWT 图像降噪应用

### 5.1 小波阈值降噪方法

图像去噪是常见的信号处理问题, 由于 WT 的低熵

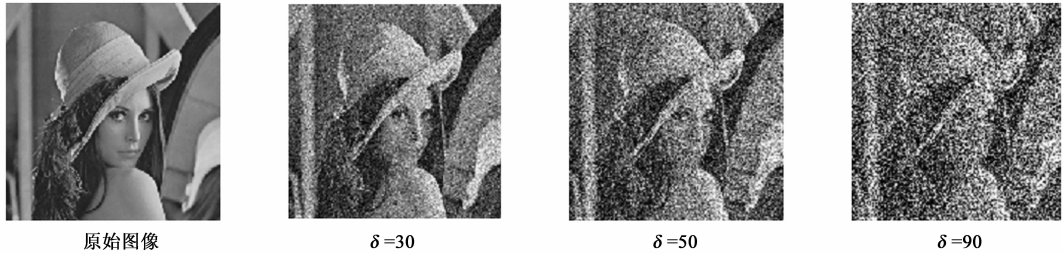


图13 不同 $\delta$ 值lena图像加噪图

表 2 不同  $p$  值下 lena 降噪图像 PSNR(db) 值

$\delta$ (PSNR)	$P$										
	方法	1	0.985	0.975	0.965	0.945	0.935	0.925	0.915	0.905	0.895
30 (20.8979)	VisuShrink	27.5935	27.6531	27.6631	27.7261	27.8901	27.7622	27.9585	27.9401	27.8548	27.2869
	BayesShrinks	28.0552	28.0858	28.1006	28.1069	28.9971	28.9659	28.0075	28.0813	28.0834	27.7873
50 (18.2558)	VisuShrink	24.8394	24.9449	25.0517	25.1775	25.4154	25.5156	25.5990	25.6541	25.6346	25.3928
	BayesShrinks	24.9069	24.9116	25.0123	25.1268	25.3552	25.4586	25.5504	25.6221	25.6594	25.6124
	VisuShrink (迭代)	25.3652	25.5081	25.6882	25.8862	26.1868	26.2778	26.3629	26.3590	26.1981	25.7008
90 (15.9062)	VisuShrink	20.6592	20.9476	21.0727	21.2165	21.5006	21.6324	21.7579	21.8757	21.9665	21.9654
	BayesShrinks	20.6592	20.9387	21.0554	21.1969	21.5169	21.6771	21.8352	21.9882	22.1315	22.2441
	VisuShrink (迭代)	20.8606	22.0293	22.2939	22.5889	23.1363	23.3795	23.6009	23.8033	23.9142	23.8190

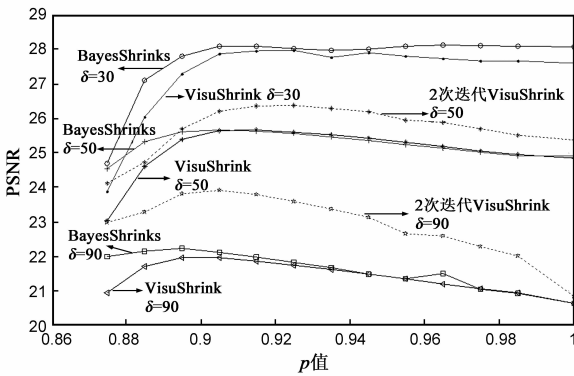


图14 不同 $\delta$ 值下lena去噪图像 $p$ -PSNR趋势图



图17  $\delta=90$  DFRWT降噪比较图



图18  $\delta=30$  DFRWT降噪局部比较图



图15  $\delta=30$  DFRWT降噪比较图



图16  $\delta=50$  DFRWT降噪比较图

由上总结 DFRWT 图像阈值降噪的一般方法,在  $p = 1$  附近选取的多个  $p$  值点对含噪图像进行 DFRWT 多尺度分解,按传统阈值估计方法得到高频子带阈值,对分解后的小波系数进行阈值处理,对处理后的系数进行 DFRWT 逆变换进行图像重构,得到降噪后的图像,最后根据主观观察和客观评价来选择所需去噪图像。

## 6 结论

DFRWT 是传统小波理论 MRA 理论在时间-分数频域的广义推广,是具备时-分数域局部化特征变换形式.本文在 DFRWT 的 MRA 基础上,利用分数阶正交小

波变换尺度函数  $\varphi_{p,j,k}(t)$ 、分数阶小波函数  $\psi_{p,j,k}(t)$  性质,推导出 DFRWT 系数分解和重构过程,并将其作二维扩展.在此基础上,根据分数阶小波变换子带能量随阶数  $p$  变化分布特点,对含噪图像采用阈值去噪处理.实验证明,在低频分量能量值为绝对大条件下,采用 DFRWT 阈值去噪效果要优于传统 DWT 阈值去噪方法.

## 参考文献

- [1] Shi Jun, Zhang Nai-tong, Liu Xiao-ping. A novel fractional wavelet transform and its applications[J]. Science China Information Sciences, 2012, 55(6): 1270 – 1279.
- [2] 陈 ■, 彭钰林, 王舒文. 从离散到连续 – 分数阶信号处理的理论、方法与应用[J]. 电子学报, 2012, 40(11): 2282 – 2289.  
Chen Zhe, Peng Yu-lin, Wang Shu-wen. From discrete to continuous-fractional signal processing theories, methods and applications[J]. Acta Electronica Sinica, 2012, 40(11): 2282 – 2289. (in Chinese)
- [3] Mendlovic D, Zalevsky Z, Mas D. Fractional wavelet transform [J]. Applied Optics, 1997, 36(20): 4801 – 4806.
- [4] Ying Huang. The fractional wave packet transform[J]. Multidimensional Systems and Signal Processing, 1998, 4(9): 399 – 402.
- [5] 黄雨青, 王友仁, 罗慧. 分数阶小波包时频域的信号去噪新方法[J]. 仪器仪表学报, 2011, 32(7): 1534 – 1538.  
Huang Yu-qing, Wang You-ren, Luo Hui. A new signal denoising method based on fractional wavelet packet transform in time-frequency domain[J]. Chinese Journal of Scientific Instrument, 2011, 32(7): 1534 – 1538. (in Chinese)
- [6] Gaurav Bhatnagar, Q M Jonathan Wu. Biometrics inspired watermarking based on a fractional dual tree complex wavelet transform[J]. Future Generation Computer Systems, 2012, 29(1): 182 – 195.
- [7] Gaurav Bhatnagar, Q M Jonathan Wu, Balasubramanian raman. discrete fractional wavelet transform and its application to multiple encryption [J]. Future Generation Computer Systems, 2013, 223(20): 297 – 316.
- [8] Shi J, Liu X, Zhang N. Multiresolution analysis and orthogonal wavelets associated with fractional wavelet transform[J/OL]. <http://link.springer.com/article/10.1007/s11760-013-0498-2>, 2013-8-27.
- [9] 孟祥意, 陶然, 王越. 分数阶傅里叶域两通道滤波器组 [J]. 电子学报, 2008, 36(5): 919 – 926.

Meng Xiang-yi, Tao Ran, Wang Yue. The fractional fourier domain analysis of two channel filter banks[J]. Acta Electronica Sinica, 2008, 36(5): 919 – 926. (in Chinese)

- [10] 孟祥意, 陶然, 王越. 分数阶傅里叶域两通道滤波器组的一般化设计方法[J]. 电子学报, 2009, 37(9): 2046 – 2051.  
Meng Xiang-yi, et al. Generalized design method of multirate filter banks in the fractional fourier domain[J]. Acta Electronica Sinica, 2009, 37(9): 2046 – 2051. (in Chinese)
- [11] L B Almeida. The fractional fourier transform and time-frequency representations [J]. IEEE Trans Signal Processing, 1994, 42(11): 3084 – 3091.
- [12] A I Zayed. A convolution and product theorem for the fractional fourier transform [J]. IEEE Signal Processing Letters, 1998, 5(4): 101 – 103.
- [13] Soo-Chang Pei, Min-Hung Yeh. Two dimensional discrete fractional Fourier transform [J]. Signal Processing, 1998, 67(1): 99 – 108.
- [14] Ingrid Daubechies. 小波十讲[M]. 李建平, 杨万年译. 北京. 国防工业出版社, 2004.
- [15] F Ruggeri, B Vidakovic. A Bayesian decision theoretic approach to wavelet thresholding[J]. Statist Sinica, 1999, 9(1): 183 – 197.
- [16] D L Donoho. De-noising by soft-thresholding[J]. IEEE Trans Inform Theory, 1995, 41(5): 613 – 627.

## 作者简介



徐小军 男, 1973 年生, 南京航空航天大学博士研究生. 主要研究方向为分数阶小波变换、信号处理.

E-mail: hfxjxu@163.com



王友仁 男, 1996 年于南京航空航天大学获得博士学位, 现为南京航空航天大学教授、博士生导师, 主要研究方向为检测技术与信号处理、机载设备健康监测、仿生硬件与智能系统.

E-mail: wangyiac@nuaa.edu.cn